Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Theologie

der Katholisch-Theologischen Fakultät

der Universität Augsburg

vorgelegt von

Ludwig Neidhart

aus Augsburg

2005

Tag der mündlichen Prüfung: 07.08.2005

Erstgutachter: Prof. Dr. Dr. **Anton Ziegenaus**, Katholische Dogmatik
Zweitgutachter: Prof. Dr. **Jost Eschenburg**, Differentialgeometrie

In Memoriam Bernd Aulbach

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde von der Katholisch-Theologischen Fakultät der Universität Augsburg im Sommersemester 2005 als Dissertation angenommen. Für den Druck wurde sie noch einmal durchgesehen und hauptsächlich durch weitere Fußnoten inhaltlich geringfügig erweitert.

Das Bemühen um ein umfassendes Verständnis des Unendlichen, dem ich mich seit etwa zwanzig Jahren mehr oder weniger intensiv gewidmet habe, erfordert die Einbeziehung mehrerer Wissenschaften, vor allem der Mathematik und der Theologie, verbunden mit einer wenigstens kursorischen Behandlung der Probleme des „harten Kerns“ der Philosophie, der unter dem Namen *Metaphysik* bekannt ist. Nach den einleitenden Kapiteln 1 und 2 erfolgt daher in Kap. 3–4 zunächst ein grundlegender *philosophischer Teil* mit vorbereitenden psychologischen und ontologischen Klärungen. Daran schließt sich in Kap. 5–7 der *mathematische Teil* an, der als die Vollendung der ontologischen Grundlegung für Unendlichkeitsfragen angesehen werden kann, weil er eine Definition sowie die Einsicht in die Widerspruchsfreiheit und die wesentlichen Eigenschaften des Unendlichen ermöglicht. Dieser Teil enthält nicht nur eine Philosophie der Mathematik mit einer Diskussion der Paradoxien des Unendlichen, sondern auch eine Einführung in die moderne Mengenlehre einschließlich aller benötigten Beweise. Nach dem darauf folgenden *historischen Teil* (Kap. 8), in dem die im Laufe der Geschichte eingenommenen Standpunkte der Religion, der Philosophie und zuletzt auch der *Physik* (Kap. 8.16) zu Unendlichkeitsfragen analysiert werden, werden in Kap. 9–11 systematisch die drei großen metaphysischen Unendlichkeitsfragen behandelt: ob ein unendlicher Gott existiert, ob der Mensch eine unsterbliche Seele hat und ob Unendlichkeiten im Kosmos auftreten können. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Gottesfrage (Kap. 9), in deren Rahmen ich die klassischen Gottesbeweise untersuche und das ontologische Argument neu zu untermauern versuche. Im Schlusskapitel 12 hebe ich als Ergebnis die affirmative Antwort auf die drei vorgenannten Fragen hervor und weise auf die diese Antwort ermöglichende Widerspruchsfreiheit des Unendlichen zurück, die im mathematischen Teil begründet wurde. So zeigt sich insgesamt die zentrale Rolle des Unendlichen in Metaphysik, Mathematik und Theologie sowie seine vermittelnde Rolle zwischen Mathematik und Theologie.

Danken möchte ich an erster Stelle meinem Doktorvater, Professor Dr. theol. Dr. phil. Anton Ziegenaus, der die Idee, die vorliegende interdisziplinäre Arbeit zu schreiben, von Anfang an unterstützt und die Arbeit im weiteren Verlauf sehr gefördert hat. Sodann gilt mein besonderer Dank den beiden Mathematikern Professor Dr. Bernd Aulbach und Professor Dr. Jost-Hinrich Eschenburg. Beide haben mich während meiner mathematischen Ausbildung stark geprägt und gefördert. Professor Aulbach hat meine mathematische Diplomarbeit betreut. Er war auch am Fortgang meiner theologischen Arbeit sehr interessiert und hatte sich bereit erklärt, das Zweitgutachten für die vorliegende Arbeit zu schreiben. Nach seinem unerwarteten Tod im Januar 2005 hat Professor Eschenburg diese Aufgabe übernommen, der ebenso wie Professor Aulbach auch für die philosophisch-theologischen Fragen großes Interesse zeigte. Bedanken möchte ich mich auch bei allen anderen, die mir inhaltliche Anregungen gaben, beim Korrekturlesen halfen oder bei Computerproblemen zur Seite standen. Hier sind zu nennen die Mathematiker Prof. Dr. Gerald van Boogart, Dr. Werner Schabert, Dr. Albert Marquardt, Dr. Martin Rasmussen, Dr. Yuri Iliach, Christoph Kawan, Christian Kreuzer und Christian Moeller, der Physiker Dr. German Hammerl, die Theologen Dr. Stefan Nieborak, Leo Kropfreiter und Andreas Günther, der Historiker Dr. Franz Stuhlhofer und nicht zuletzt meine Eltern, meine Frau und mein Sohn. Schließlich möchte ich mich bei der Diözese Augsburg für die Auszeichnung der Dissertation mit dem Albertus-Magnus-Preis 2005, bei Herrn Karl Theo Holderberg für Übernahme der Druckkosten und beim Cuvillier Verlag für die engagierte verlegerische Betreuung bedanken.

Augsburg, den 15. August 2007,
Ludwig Neidhart

Vorbemerkungen

Eckige Klammern [ ] in Zitaten enthalten stets von mir stammende Hinweise, während *Hervorhebungen* stets auf das Original bzw. die benutzte Textausgabe zurückgehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird.

Die deutschen Anführungsstriche („“) werden für gewöhnliche Zitate, die französischen (≪≫) zur Zitation mathematisch-logischer Ausdrücke verwendet.[1] Daneben werden noch die griechischen Anführungsstriche (« ») zur gewöhnlichen Zitation griechischer Texte benutzt.

Ist bei einem fremdsprachigen Werk im Literaturverzeichnis keine deutsche Ausgabe angegeben, so handelt es sich bei deutschen Zitaten stets um *eigene Übersetzungen*. Eine (von der angegebenen deutschen Ausgabe möglicherweise abweichende) *eigene Übersetzung* liegt außerdem überall dort vor, wo ich *zusätzlich* zum deutschen auch den fremdsprachigen Text anführe.

Rechtschreibfehler in deutschen Zitaten wurden stillschweigend korrigiert, und Zitate aus älteren deutschen Werken wurden an die neue deutsche Rechtschreibung angepasst.

Wichtige Feststellungen wie Axiome, Theoreme, Definitionen usw. werden in den Abschnitten der Kapitel 2–6 fortlaufend nummeriert. Beispielsweise ist Theorem 5.10.2 auf S. 120 die zweite Feststellung dieser Art in Abschnitt 5.10.
Außerdem werden einzelne Sätze, auf die oft verwiesen wird, kapitelweise nummeriert, wobei diese Nummern am rechten Seitenrand erscheinen. Beispielsweise findet man in Kapitel 5 auf S. 120 die beiden Sätze 5.13 und 5.14 als Bestandteile von Theorem 5.10.2.

Beweise bzw. Plausibilitätsbetrachtungen beginnen immer mit dem Wort „Beweis“ bzw. „Plausibilitätsbetrachtung“ und enden mit dem Zeichen □.

[1] Diese Zitate sind stets im Sinne der sog. Quasi-Zitation gemeint (vgl. Quine, *Mathematical Logic* § 6 S. 35f): Zitiert wird, was man erhält, wenn man alle Zeichen, die für andere Zeichen (oder Zeichenverbände) stehen, durch ihre Denotate ersetzt. Steht z. B. „A“ für „Augsburg“ und „B“ für „Bamberg“, so entspricht die Quasi-Zitation ≪A und B≫ nicht „A und B“, sondern „Augsburg und Bamberg“.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort iv
Vorbemerkungen v

1 Unendlichkeit im System der Wissenschaften 1

2 Das Unendliche im Überblick 8
2.1 Zur Definition des Unendlichen . . . 8
2.2 Arten des Unendlichen . . . 13
2.3 Charakteristische Beispiele für das Unendliche . . . 18

3 Theorie des Denkens 24

4 Theorie der Objekte oder Ontologie 28
4.1 Definition und Klassifikation des Seienden . . . 28
4.2 Impossibilien . . . 30
4.3 Pure Possibilien . . . 31
4.3.1 Possibilien . . . 31
4.3.2 Attribute eines Seienden . . . 32
4.3.3 Begriffe (oder Ideen) und Fiktionen . . . 35
4.4 Aktualitäten . . . 37
4.4.1 Arten des Wirkens . . . 37
4.4.2 Universen . . . 40
4.4.3 Sachverhalte und logisches Universum . . . 42
4.4.4 Wirkliche Attribute . . . 45
4.4.5 Substanzen . . . 46
4.4.6 Ausblick . . . 48
4.5 Transzendentale Gegebenheiten . . . 49
4.5.1 Transzendentalien . . . 49
4.5.2 Unterschiede und Identitäten . . . 50
4.5.3 Transzendentale Unendlichkeiten in jedem Seienden . . . 53
4.5.4 Individuen und Teile . . . 54
4.5.5 Logische Individuen und Vielheiten . . . 55
4.5.6 Unendliche Vielheiten von Seienden . . . 57

5 Grundlegung der Mathematik und mathematischer Zugang zur Unendlichkeit 59
5.1 Grundlagenstandpunkte . . . 61
5.2 Objekte, Individuen, Klassen, Mengen und Unmengen . . . 70
5.3 Extensionalitäts- und Komprehensionsaxiom . . . 80
5.4 Endgültige Festlegung des Objektbereichs . . . 87
5.5 Eine alternative Klassenlehre mit Begriffen als Klassen . . . 89
5.6 Die Paradoxien der Logik und Mengenlehre . . . 93
5.7 Elementar-allgemeine und erweiterte Mengentheorie . . . 100
5.8 Die logische Ursprache . . . 103
5.9 Erste Definitionen und Axiome . . . 115
5.10 Die konstruktiven Mengenaxiome . . . 120
5.11 Das Auswahlaxiom . . . 152
5.12 Äquivalenzrelationen und Einführung der Fregeschen Zahlen . . . 164
5.13 Ordnungstheorie . . . 173
5.14 Ordinalzahlen und tiefere Sätze der Wohlordnungstheorie . . . 190

5.15 Größenvergleich von Klassen . . . 200
5.16 Die Grundlegung der Arithmetik . . . 208
5.17 Mathematische Einführung der Unendlichkeit . . . 233
5.18 Abgeschlossenheit des Endlichen und Vergleich der Potenzen . . . 248
5.19 Das Antizirkularitätsaxiom (und Fundierungsaxiom) . . . 253
5.20 Unendliche Mengen höherer Stufen . . . 258
5.21 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und die euklidische Geometrie . . . 266
5.22 Unendlichkeitsstufen und das Kontinuumsproblem . . . 282
5.23 Höherdimensionale Räume . . . 286
5.24 Unendlich ferne Punkte und transfinite Räume . . . 289
5.25 Infinitesimalien und hyperreelle Zahlen . . . 292
5.26 Das Kontinuum als Unmenge und die surrealen Zahlen . . . 295
5.27 Zenons Paradoxien . . . 297
5.28 Die Ordinalzahlreihe . . . 300
5.29 Das kumulative Mengenuniversum . . . 305
5.30 Kardinalzahlen . . . 316
5.31 Unerreichbare Kardinalzahlen und das Universenaxiom . . . 327
5.32 Große Kardinalzahlen und das Reflexionsprinzip . . . 335
5.33 Das Wesen der Zahl . . . 340
5.34 Zusammenfassung . . . 347

6 Der logische Rahmen 352
6.1 Syntaktik der Logik . . . 355
6.2 Semantik der Logik . . . 361
6.3 Exkurs: Modallogik . . . 369
6.4 Pragmatik der Logik . . . 373

7 Anhang: Mathematische Beweise 386

8 Die Entwicklung des Unendlichkeitsgedankens 488
8.1 Die Griechen von den Vorsokratikern bis zur Zeitenwende . . . 488
8.1.1 Die Milesier: das Unendliche als grenzenlos ausgedehnter Urgrund . . . 489
8.1.2 Die Pythagoräer: das Unendliche als negatives Prinzip . . . 490
8.1.3 Die Eleaten: das unbewegte Seiende als Endliches oder Unendliches . . . 491
8.1.4 Heraklit: die ewig bewegte, endliche Welt . . . 493
8.1.5 Synthese: das mengenmäßig Unendliche und die unendliche Teilbarkeit . . . 494
8.1.6 Die Sophisten: Auflösung der Logik und mit ihr des Unendlichen . . . 497
8.1.7 Sokrates als Wiederhersteller von Logik und Ethik (Theologie) . . . 497
8.1.8 Platon: das in der Einheit zusammengefasste Unendliche . . . 498
8.1.9 Aristoteles: die unendliche göttliche Kraft über der ewig endlichen Welt . . . 500
8.1.10 Epikur, Lucretius, Stoa und Skeptizismus: diesseitig-endliche Heilswege . . . 502
8.2 Hinduismus . . . 505
8.2.1 Das Unendliche in der hinduistischen Theologie . . . 505
8.2.2 Das Unendliche in der hinduistischen Kosmologie . . . 509
8.2.3 Das Unendliche in der hinduistischen Psychologie . . . 510
8.3 Buddhismus . . . 511
8.3.1 Das endliche Wesen des unendlichen Kosmos . . . 511
8.3.2 Das Unendliche in der Buddhistischen Nirvana–„Theologie“ . . . 512
8.4 Chinesische Religion . . . 513
8.4.1 Konfuzianismus und sein demütig-traditionalistischer Agnostizismus . . . 513
8.4.2 Taoismus und sein systematischer Agnostizismus . . . 514
8.4.3 Nichtbeachtung des Unendlichen als Form der Annäherung an dasselbe . . . 515
8.5 Parsismus . . . 517
8.6 Vergleich der östlichen und westlichen Religionen hinsichtlich der Unendlichkeitsfrage . . . 518
8.7 Theologie des Alten und Neuen Testaments . . . 521
8.7.1 Allgemeines zur Unendlichkeit Gottes . . . 521
8.7.2 Gottes Ewigkeit . . . 521

8.7.3 Gottes Allgegenwart und Unermesslichkeit . . . 522
8.7.4 Gottes Allmacht, Allwissenheit und Allgüte . . . 524
8.7.5 Die Unendlichkeit des göttlichen Wesens . . . 526
8.7.6 Endlichkeit und Unendlichkeit der Schöpfung . . . 528
8.7.7 Endlichkeit und Unendlichkeit des Menschen . . . 530
8.8 Philosophie und Theologie des christlichen Altertums . . . 533
8.8.1 Die Bezeichnung Gottes als „unendlich“ . . . 533
8.8.2 Hilarius, Basilius, Gregor von Nazianz: Gott als raum-zeitlich unendlich . . . 538
8.8.3 Die trinitarische Unendlichkeitslehre des Marius Victorinus . . . 539
8.8.4 Gregor von Nyssa und seine „Umwertung“ des Unendlichen . . . 540
8.8.5 Augustinus: Gott ist „anders unendlich“ als der Raum . . . 541
8.8.6 Die alt– und ostkirchliche Mystik: Unendlichkeit als Unbegreiflichkeit . . . 542
8.9 Islamische und jüdische Scholastik . . . 546
8.9.1 Unendlichkeit im Koran . . . 546
8.9.2 Der Kalam: Verendlichung der Zeit . . . 546
8.9.3 Die Falsafa: anfangslose Welterschaffung . . . 548
8.9.4 Jüdische Scholastik . . . 550
8.10 Christliche Scholastik . . . 552
8.10.1 Frühscholastik: die Unendlichkeitsmystik des Scotus Eriugena . . . 552
8.10.2 Anselm von Canterbury und sein Gottesbegriff . . . 552
8.10.3 Ablehnung und Rehabilitierung der Unendlichkeit Gottes . . . 555
8.10.4 Thomas von Aquin: Systematisierung des Unendlichkeitsbegriffs . . . 560
8.10.5 Duns Scotus: Unendlichkeit als Charakteristikum Gottes . . . 565
8.10.6 Wilhelm v. Ockham: skeptizistische Öffnung des Unendlichkeitsbegriffs . . . 566
8.10.7 Die Unendlichkeits-Systematik und der Infinitismus der Spätscholastik . . . 569
8.10.8 Francisco Suárez: Synthese des scholastischen Wissens . . . 575
8.11 Die Umbruchszeit vom Ausgang der Scholastik bis Kant . . . 576
8.11.1 Cusanus, die Kopernikaner und Bruno: das unendliche Universum . . . 576
8.11.2 Angelus Silesius und die Theosophie: die Unendlichkeit des Menschen . . . 579
8.11.3 Francis Bacon, Hobbes und Hume: finitistische Tendenzen . . . 582
8.11.4 Descartes und Malebranche: Unendlichkeit im menschlichen Geist . . . 584
8.11.5 More, Spinoza, Newton: die räumliche Unendlichkeit Gottes . . . 586
8.11.6 Locke: die Idee des Unendlichen . . . 590
8.11.7 Leibniz: vorläufiger Höhepunkt des Infinitismus . . . 591
8.11.8 Lessing: das unendliche Streben in der Vernunftreligion der Aufklärung . . . 598
8.12 Idealismus . . . 600
8.12.1 Berkeley und Kant: finitistischer Idealismus . . . 600
8.12.2 Fichte, Novalis, Hegel, Schelling: idealistischer Infinitismus . . . 605
8.13 Atheismus des 19. Jahrhunderts . . . 614
8.13.1 Schopenhauer . . . 614
8.13.2 Der atheistische Materialismus des 19. Jahrhunderts . . . 615
8.13.3 Nietzsche . . . 616
8.14 Bolzano, Cantor und die Neuscholastik . . . 618
8.15 Die finitistisch geprägte Philosophie des 20. Jahrhunderts . . . 625
8.15.1 Positivismus und analytische Philosophie; Scholz und Gödel . . . 625
8.15.2 Phänomenologie; Brentano, Meinong, Husserl und seine Schüler . . . 630
8.15.3 Der Historismus von Dilthey und Spengler . . . 632
8.15.4 James’ Pragmatismus und der neuzeitliche theologische Finitismus . . . 634
8.15.5 Existenzialismus . . . 635
8.15.6 Kritischer und organistischer Realismus . . . 638
8.16 Die moderne Kosmologie, Relativitäts– und Quantentheorie . . . 641
8.16.1 Das Olberssche Paradoxon: Beweis für nur endlich viele Sterne? . . . 641
8.16.2 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik: Beweis für den Weltanfang? . . . 642
8.16.3 Das Gravitationsparadoxon: Beweis für die Endlichkeit der Materie? . . . 642
8.16.4 Die Möglichkeit einer endlichen und doch unbegrenzten Welt . . . 643
8.16.5 Die spezielle Relativitätstheorie und die Grenze für Geschwindigkeiten . . . 645

8.16.6 Die gekrümmte Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie . . . 651
8.16.7 Die Gestalt des Universums . . . 654
8.16.8 Zum Vergleich: die Hohlwelttheorie . . . 656
8.16.9 Die zeitliche Entwicklung des Kosmos . . . 658
8.16.10 Quantentheorie: die Endlichkeit im Kleinen . . . 667
8.17 Aussagen des kirchlichen Lehramtes . . . 677
8.18 Fazit . . . 683

9 Gott 687
9.1 Einteilung und kirchliche Bewertung der Gottesbeweise . . . 687
9.2 Teleologischer Gottesbeweis . . . 691
9.2.1 Darstellung . . . 691
9.2.2 Kritik . . . 694
9.3 Kosmologischer Gottesbeweis . . . 702
9.3.1 Die Urform des Beweises bei Platon und Aristoteles . . . 702
9.3.2 Der Kalam-Beweis und die Beweise von Craig und Meyer . . . 705
9.3.3 Die Kontingenzbeweise der Falsafa und des Maimonides . . . 708
9.3.4 Die fünf Wege des Thomas von Aquin . . . 710
9.3.5 Der ontologisch gefärbte kosmologische Beweis von Duns Scotus . . . 711
9.3.6 Francisco Suárez . . . 713
9.3.7 Descartes . . . 715
9.3.8 John Locke . . . 716
9.3.9 Samuel Clarke . . . 717
9.3.10 Leibniz . . . 718
9.3.11 Hegel . . . 719
9.3.12 Die Kritik von Hume und das Kausalproblem . . . 719
9.3.13 Isenkrahe und Swinburne: Gottesbeweise ohne strenges Kausalprinzip . . . 721
9.3.14 Versuche zur Lösung der Probleme, insbesondere des Kausalproblems . . . 722
9.4 Ontologischer Gottesbeweis . . . 725
9.4.1 Grundlegung des Beweisverfahrens bei Anselm von Canterbury . . . 725
9.4.2 Probleme des ontologischen Beweises . . . 727
9.4.3 Duns Scotus . . . 739
9.4.4 Descartes . . . 740
9.4.5 Malebranche und der Ontologismus . . . 741
9.4.6 Henry More . . . 743
9.4.7 Spinoza . . . 744
9.4.8 Leibniz . . . 744
9.4.9 Hegel . . . 746
9.4.10 Schelling . . . 747
9.4.11 Gödel . . . 748
9.4.12 Malcolm, Hartshorne und Plantinga . . . 756
9.4.13 Blondel und das reflexive ontologische Argument . . . 761
9.4.14 Seifert . . . 761
9.4.15 Systematische Darstellung des ontologischen Arguments . . . 763

10 Seele 775
10.1 Die Existenz einer substantiellen Seele . . . 775
10.2 Die Verbindung von Leib und Seele . . . 781
10.3 Die unendliche Fortdauer der Seele . . . 783
10.4 Ontologischer Beweis für die Unvernichtbarkeit des Ich . . . 788
10.5 Anfangslosigkeit der Seele? . . . 792

11 Kosmos 794
11.1 Die Kantschen Antinomien . . . 794
11.2 Endlichkeit oder Unendlichkeit der Welt? . . . 797
11.2.1 Der Abschluss einer unendlichen Reihe von Vorgängen („tasks“) . . . 798
11.2.2 Unendlich viele Substanzen in einem begrenzten Raum . . . 801

11.2.3 Unendlich viele Substanzen auf unbegrenztem Raum 803
11.2.4 Unendlich große Intensität, insbesondere unendliche Geschwindigkeit 808
11.2.5 Abschließende Betrachtung 810

12 Zusammenfassung und Ausblick **811**

Symbolverzeichnis 816
Abbildungsverzeichnis 819
Literaturverzeichnis 820
Index 867

1 Unendlichkeit im System der Wissenschaften

Einleitend soll die Stellung der Unendlichkeitsfrage im System der Wissenschaften erörtert werden. Unendlichkeit wird nur in solchen Wissenschaften thematisiert, die (wenigstens unter einem bestimmten Gesichtspunkt) ein allumfassendes Sachgebiet haben. Wissenschaften bzw. Disziplinen dieser Art heißen *Universalwissenschaften* bzw. *Universaldisziplinen*. Eine wissenschaftliche Disziplin ist entweder deshalb allumfassend, weil sie sehr abstrakte Eigenschaften und Sachverhalte untersucht, oder deshalb, weil sie auf vielen anderen Disziplinen aufbauend „letzte" Fragen von übergeordnetem Interesse stellt. Universaldisziplinen der ersten Art nenne ich *Fundamentaldisziplinen* und solche der letzten Art *Gipfeldisziplinen*.

Zu den Universalwissenschaften zählt man seit jeher *Philosophie*, *Mathematik*, *Physik* und *Theologie*,[1] in neuerer Zeit aber auch *Psychologie*[2] und *Geschichtswissenschaft*.[3] Manchmal wurden und werden auch noch weitere Wissenschaften als universal angesehen, so etwa *Logik* und *Linguistik*,[4] *Soziologie*,[5] *Kybernetik*, *Kognitionswissenschaft* und *Neurowissenschaft*,[6] *Biologie*,[7] *Anthropologie* und *Medizin*[8] sowie *Astronomie*.[9] Diese Wissenschaften können jedoch den zuerst genannten zugeordnet werden, namentlich der Mathematik, Physik und Psychologie.[10]

Philosophie

Die Philosophie betrachtet den *schlechthin* uneingeschränkten Bereich aller Dinge, und zwar hinsichtlich der allgemeinsten und fundamentalsten Bestimmungen (wie Sein, Wirken, Erkennen, Wert

---

[1] Bereits Aristoteles teilte in seiner *Metaphysik* Buch 4 Kap. 1, 1026a18–19, Ausgabe Seidl Band 1 S. 253 und Buch 11 Kap. 7, 1064b1–5, Ausgabe Seidl Band 2 S. 207 die theoretischen Wissenschaften in „Physik, Mathematik, Theologie" ein und bezeichnete diese Wissenschaften als „Philosophien".

[2] Vom Standpunkt des Idealismus aus sind *alle* Phänomene psychologischer Natur (siehe Abschnitt 8.12).

[3] Diese wurde vom sog. *Historismus* hervorgehoben (siehe Abschnitt 8.15.3).

[4] Logik und Linguistik haben in der *analytischen Philosophie* (siehe Abschnitt 8.15.1) die Priorität, und schon Leibniz sprach von einer logischen Universalwissenschaft (siehe Fußnote 909 auf S. 591).

[5] Dieser wurde erstmals im *älteren Positivismus* der Vorrang eingeräumt (siehe S. 625).

[6] Die Kybernetik trat um 1950 als eine interdisziplinäre, Natur– und Geisteswissenschaften überbrückende Wissenschaft auf, welche die Theorie digitaler Rechenmaschinen ebenso umfasste wie die des Nervensystems und sozioökonomischer Prozesse; Heidegger fürchtete, die Kybernetik werde auch die Philosophie ablösen (*Denken* S. 622f). Später wurden die Anliegen der Kybernetik von der sog. Kognitionswissenschaft übernommen, an deren Spitze die Neurowissenschaft (Gehirnforschung) steht (vgl. Roth, *Gehirn*).

[7] Diese spielte z. B. im *Monismus* Ernst Haeckels (siehe S. 616) die Hauptrolle.

[8] Die Anthropologie war in Schelers *Phänomenologie* zentral. Die Förderung der Medizin war für Leibniz nächst der Tugend das Wichtigste (vgl. *Nouveaux essais* Buch 4 Kap. 1 § 12, Schriften Band 3/2 S. 485).

[9] Die Astronomie nimmt z. B. nach Tycho Brahe, *De disciplinis*, Ausgabe Dreyer S. 174 Zl. 38f die Stelle des „Fürsten" unter den Wissenschaften ein.

[10] Die Logik und teilweise auch die Linguistik kann als Disziplin einer universell konzipierten *Mathematik* gelten, und soweit die Linguistik nicht zur Logik (und damit zur Mathematik) gehört, gehört sie zur *Psychologie*. Zu einer erweiterten Psychologie kann man auch die Soziologie rechnen, insofern diese nach Émile Durkheim das „Kollektivbewusstsein" analysiert (*Règles*, Vorwort zur 2. Auflage S. XVIIf und Kap. 5. II. S. 103, Ausgabe König S. 94f und 187f). Die übrigen hier genannten Wissenschaften kann man als Gipfeldisziplinen der *Physik*im Sinne einer allgemeinen Naturlehre verstehen, unter Einschluss von psychologischen und logisch-mathematischen Aspekten bei der Anthropologie, Kybernetik und Kognitionswissenschaft.

usw.), die sie mittels rational reflektierter Intuition untersucht.[11] Besonders hervorzuheben sind die philosophischen Disziplinen Ontologie, Theologie, Psychologie und Kosmologie, die klassischerweise unter dem Namen *Metaphysik* zusammengefasst wurden,[12] denn genau diese sind es, in denen Unendlichkeit innerhalb der Philosophie thematisiert wird. Die *Ontologie* ist die fundamentalste Disziplin: sie fragt nach dem Sein und nimmt die oberste Klassifizierung des Seienden vor. Die übrigen drei Disziplinen sind konkreter, haben aber dennoch einen Bezug auf die Gesamtheit aller Dinge:

- die *Theologie* fragt nach der höchsten Form und ersten Grundlage *allen* Seins,
- die *Psychologie* untersucht die menschliche Seele als den innersten Teil des Menschen, der sich im Erkennen und Streben auf schlechthin *alles* beziehen kann,
- die *Kosmologie* untersucht den Zusammenhang *aller* Seienden im Weltganzen.

Aber diese drei Disziplinen stehen nicht wie die Ontologie auf der „fundamentalen Seite“ des philosophischen Wissens, sondern müssen als die philosophischen Gipfeldisziplinen bezeichnet werden, denn das Verständnis des Weltganzen (Kosmologie), der menschlichen Seele (Psychologie) und Gottes (Theologie) sind die letzten und eigentlichen Fragen der Philosophie.[13]

Mathematik

Die antike und mittelalterliche Mathematik hatte die von ihr untersuchten Gegenstände „Größen“ genannt.[14] Demgegenüber bezeichnet die heutige Mathematik ihre Gegenstände allgemeiner als „Objekte“.[15] Hier deutet sich der Anspruch der Mathematik an, eigentlich „alles“ zum Gegenstand der Betrachtung machen zu können. Ihre Aufgabe sieht sie darin, notwendige Konsequenzen aus vorausgesetzten Sachverhalten (den sog. *Axiomen*) zu ermitteln. Diese gibt sich der Mathematiker entweder willkürlich vor, oder er schöpft sie aus evidenten Tatsachen, oder er lässt sie sich von anderen Fragestellern vorgeben. So erweist sich Mathematik als ein universell einsetzbares Hilfsmittel für andere Wissenschaften. Man könnte nun versucht sein, die Mathematik dadurch herabzustufen, dass man in ihr „nur“ ein Hilfsmittel sieht. Auf der anderen Seite könnte man sie über alle anderen Wissenschaften stellen, weil sie die zentralen Gesetzmäßigkeiten betrachtet, für welche die anderen

[11] Zu dieser Methode vgl. Hildebrand, *Philosophy* S. 196–207. Was damit gemeint ist, versteht man am besten durch Abgrenzung von den Methoden der Mathematik, Mystik und Physik. Während man in der mathematischen Betrachtung von der Wirklichkeit abstrahiert, ist für die Philosophie der geistige Kontakt mit der Wirklichkeit („Intuition“) wesentlich. Diese Intuition unterscheidet sich von physikalischer Beobachtung, weil sie nicht auf körperlichen Wechselwirkungen beruht und daher nicht durch Messinstrumente verfeinert werden kann. Sie unterscheidet sich aber auch von der mystischen Kontemplation, weil sie so weit als möglich „rational“ begründet und verarbeitet wird.

[12] Nach Christian Wolff bildet die Ontologie die „allgemeine Metaphysik“, während die drei letztgenannten Disziplinen die „spezielle Metaphysik“ ausmachen.

[13] Ähnlich Kant, *Kritik der reinen Vernunft* B 826, Ausgabe Timmermann S. 833: „Die Endabsicht, worauf die Spekulation der Vernunft ... zuletzt hinausläuft, betrifft drei Gegenstände: die Freiheit des Willens, die Unsterblichkeit der Seele und das Dasein Gottes“. Unter dem Eindruck der Kantschen Vernunftkritik ist allerdings die Philosophie faktisch immer mehr von diesen metaphysischen Fragestellungen abgerückt.

[14] Nach Boëthius, *Arithmetica* Buch 1 Kap. 1 (Ausgabe Oosthout/Schilling S. 10 Zl. 39–42) beschäftigt sich die Arithmetik mit der „Vielheit an sich“ (multitudo, quae per se est) und die Geometrie mit der „unbeweglichen Größe“ (inmobilis magnitudo). Nach Gredt, *Elementa* (Band 1 S. 194, deutsche Ausgabe S. 125f) ist der Gegenstand der Mathematik „das Ausgedehnte unter Absehung nicht bloß von der Einzelheit, sondern auch von den sinnfälligen Beschaffenheiten.“ Nach Hegel, *Phänomenologie* Vorrede, Ausgabe Bonsiepen/Heede S. 33, Ausgabe Wessels/Clairmont S. 33 ist „*Zweck* oder Begriff“ der Mathematik „die Größe“, und der Stoff, mit dem sie sich beschäftigt, „ist der *Raum* und das *Eins*.“ Engels definierte die Mathematik als „die Wissenschaft der Größen“ (Engels, *Dialektik der Natur* Nr. 18, MEGA-Ausgabe S. 14).

[15] Vgl. z. B. Potter, *Sets* S. 19: „Auf jedem Gebiet der Mathematik studieren wir Objekte.“

Wissenschaften „nur“ Fallbeispiele liefern.[16] Beide Sichtweisen sind einseitig, beleuchten aber aus verschiedenen Perspektiven den eigentümlichen Sonderstatus der Mathematik, den sie gegenüber den anderen Wissenschaften einnimmt. Die Mathematik stellt ihre Ergebnisse aufgrund von formalen Regeln durch *Beweise* sicher, welche garantieren, dass die neuen Aussagen wahr sind, falls die gegebenen wahr sind. Die Theorie, welche die entsprechenden Regeln aufstellt und analysiert, ist die *Logik*.[17] Diese kann als Disziplin der Mathematik verstanden werden, und zwar ist sie derjenige Teil der Mathematik, der ohne speziellere Voraussetzungen auskommt.[18] Zusammen mit der Logik gehört auch die *Mengenlehre* zu den mathematischen Fundamentaldisziplinen. In der Mengenlehre wird die *Elementbeziehung* betrachtet, mit deren Hilfe alle anderen mathematischen Beziehungen definiert werden können. So hat die Mengenlehre in der Mathematik den gleichen Stellenwert wie die Ontologie in der Philosophie. Da die Mengenlehre die Unendlichkeit explizit behandelt, ist sie zudem für unser Thema von größter Wichtigkeit.

Physik, Psychologie und Geschichtswissenschaft

Die *Physik* betrachtet die allgemeinsten Wechselwirkungen materieller Objekte. Da das Materielle nur einen eingeschränkten Bereich des Seienden bildet,[19] könnte man im Zweifel sein, ob hier eine Universalwissenschaft vorliegt. Jedenfalls ist es verfehlt, mit Frank Tipler als „Geltungsbereich der Physik“ die „Gesamtheit der Realität“ zu beanspruchen.[20] Andererseits bilden jedoch die von der Physik betrachteten Objekte tatsächlich den Gesamtbereich aller Dinge, die uns in einer bestimmten Auffassungsart, nämlich durch *äußere Beobachtung* zugänglich sind. Insofern ist die Physik sicher eine Universalwissenschaft, und sie ist auf jeden Fall für alle weiteren Naturwissenschaften fundamental.[21]

Die *Psychologie* (in ihrer klassischen, auf Brentano zurückgehenden Form)[22] betrachtet die uns durch *Innenerfahrung* zugänglichen Sachverhalte. Dieser Sachbereich ist in etwa komplementär zu dem Bereich, den die Physik untersucht. So steht die Psychologie in einem analogen Verhältnis zu den Geisteswissenschaften[23] wie die Physik zu den Naturwissenschaften.

Die *Geschichtswissenschaft* kann unter dem Aspekt der zeitlichen Entwicklung alles betrachten, was das menschliche Denken beschäftigt. So gibt es eine Geschichte der Völker ebenso wie eine Geschichte der Mathematik, der Theologie usw. Durch Einbeziehung der Geschichte stellt man auf je-

---

[16] Vgl. die Ansicht von Gauss, wonach die Mathematik die „Königin der Wissenschaften“ ist, die sich öfter herablässt, „den anderen Naturwissenschaften einen Dienst zu erweisen“ (Waltershausen, *Gauss* S. 79). Die mathematische Logik kann auch auf Geisteswissenschaften, Theologie und Religionen angewendet werden (vgl. Bocheński, *Religionslogik*).

[17] Genauer wird die Logik in Abschnitt 6 betrachtet.

[18] Vgl. Russell, *Mathematische Philosophie* S. 217: „Mathematik und Logik waren, historisch gesprochen, zwei ganz getrennte Arbeitsgebiete. ... Aber beide haben sich in der modernen Zeit entwickelt. Die Logik wurde mathematischer, die Mathematik logischer. Infolgedessen ist es heute ganz unmöglich, einen Trennungsstrich zwischen beiden zu ziehen. Tatsächlich sind sie eins.“

[19] Zur Klassifikation des Seienden vgl. Kapitel 4. Nicht-materielle Seiende wird auch der Materialist wenigstens als „Epiphänomene“ der Materie anerkennen müssen (vgl. Abschnitt 10.1).

[20] Tipler, *Physics of Immortality* S. 32; vgl. S. 26. Diese unter heutigen Physikern weit verbreitete Ansicht (vgl. Davies, *Time* S. 324) bezeichnet man klassischerweise als *Materialismus*; modernere Bezeichnungen hierfür (die nicht den schlechten Ruf des Materialismus haben) sind *Naturalismus*, *Szientismus* und *Physikalismus*. Tiplers Physikalismus geht so weit, dass er behauptet, selbst die Theologie müsse, wenn sie überleben will, „ein Teilbereich der Physik“ werden (ebd. S. 35). Zu Tipler siehe auch S. 666.

[21] Dies gilt besonders für die Chemie und Biologie. Die Mathematik dagegen ist eigentlich weder eine Natur– noch eine Geisteswissenschaft, sondern besitzt einen Sonderstatus.

[22] Vgl. Brentano, *Psychologie*.

[23] Zu diesen gehören z. B. Linguistik, Pädagogik, Soziologie, Literatur– und Kunstwissenschaft. Theologie und und Philosophie sind dagegen keine reinen Geisteswissenschaften, da sie sich nicht (nur) mit dem menschlichen Geist selbst und seinen Erzeugnissen beschäftigen. Ähnliches gilt m. E. auch für die Geschichtswissenschaft.

den Fall *jede* Wissenschaft auf eine breitere Grundlage. Allerdings ist die geschichtliche Entwicklung in Mathematik und Naturwissenschaften (für diese Wissenschaften selbst) nur von nebensächlichem Interesse – wichtiger ist hier der jeweils aktuelle Stand. Dagegen spielt sie in den Geisteswissenschaften und in der Theologie eine kaum zu unterschätzende Bedeutung, denn durch fortgesetzte Synthese des Gewesenen und des Neuen ergibt sich hier ein immer vollkommenerer Gehalt, wie besonders eindrucksvoll durch Hegel betont wurde. Das gilt in besonderer Weise auch für die christliche Theologie, die einerseits auf ein historisches Offenbarungsgeschehen zurückgreift und andererseits eine durch Zeiten und Kulturen hindurchgehende, ständig anwachsende Auslegungstradition und Rezeptionsgeschichte verarbeiten muss, die selbst als ein Aspekt der Offenbarung verstanden werden kann. So ist die Theologie auf einen engen Kontakt mit der Geschichtswissenschaft angewiesen.

Theologie

Hier soll nicht von der schon erwähnten philosophischen (oder „natürlichen") Theologie die Rede sein, die Aristoteles als die vornehmste der drei philosophischen Gipfeldisziplinen ansah,[24] sondern von der *Offenbarungs–* oder *Glaubenstheologie*. Diese unterscheidet sich von der natürlichen Theologie dadurch, dass sie die göttliche Offenbarung mit einbezieht, deren konkrete Gegebenheit sie nachzuweisen versucht und deren Sinn sie herauszuarbeiten hat. Die Theologie kann wie die Philosophie schlechthin alles thematisieren, und sie tut dies im Hinblick auf Gott als Grund und Ziel des Menschen und des Universums. So findet man in der Theologie ähnliche Disziplinen wie in der Philosophie: Der philosophischen Kosmologie entspricht die theologische *Schöpfungslehre*, der philosophischen Psychologie die theologische *Seelenlehre*, und die höchste Disziplin der Theologie ist schließlich die theologische *Gotteslehre*, welche die Theologie im eigentlichsten Sinn und zudem die hauptsächliche theologische Disziplin ist, in der Unendlichkeit thematisiert wird.

Die Glaubenstheologie früherer Jahrhunderte war überzeugt, die Gipfelwissenschaft schlechthin zu sein,[25] da sie sich im Besitz eines über rein menschliches Wissen hinausgehenden und es von oben integrieren könnenden metaphysischen Offenbarungswissens glaubte. Für uns Heutige hat eine solche Beschreibung den Beigeschmack von Arroganz.[26] Dennoch ist diese Charakterisierung nicht ganz falsch, auch wenn die heutige Theologie zu Recht betont, dass die Offenbarung in erster Linie auf das ewige Heil des Menschen hinzielt und deshalb nicht unabhängig von dieser Zielrichtung als spekulative Erkenntnisquelle angesehen werden kann.[27] Das zu verkündigende Heil hängt nämlich eng mit metaphysischen Fragen zusammen, so dass die Glaubenstheologie ein bleibendes Interesse an diesen Fragen haben muss.

---

[24] Vgl. Fußnote 1 auf S. 1.

[25] Vgl. Thomas von Aquin, *Summa Theologiae* pars 1 quaestio 1 articuli 1–6, Ausgabe Busa S. 184c–186a.

[26] Der Grund hierfür ist die nicht immer ruhmreiche Geschichte der Theologie, die sich in der Neuzeit wiederholt zu Unrecht gegen Erkenntnisse anderer Wissenschaften gestellt hat. Einen entgegengesetzten und doch wieder ähnlichen Fehler scheinen Theologen auch heute zu begehen, wenn sie ihre Wissenschaft als eine absolut autonome verstehen, welche die Ergebnisse der übrigen Wissenschaften weder kritisiert noch benutzt. Wenn man im Zuge dieser Entwicklung den Aussagen der Theologie nur noch eine symbolische Bedeutung gibt, die weder geschichtlich noch naturwissenschaftlich angreifbar ist, so ist das ein bequemer, aber letztlich unfruchtbarer Rückzug in eine intersubjektiv nicht mehr vermittelbare Gefühlswelt.

[27] Vgl. Denzinger, *Enchiridion* 4206 (*Zweites Vatikanisches Konzil*, Konstitution *Dei Verbum* Kap. 1 Nr. 6): „Durch die göttliche Offenbarung wollte Gott sich selbst und die ewigen Beschlüsse seines Willens über das Heil der Menschen kundtun". Allerdings gilt dieses Heil selbst als übernatürlich, und so erstreckt sich die Offenbarung doch auch auf Wirklichkeiten, die dem menschlichen Geist nicht ohne Offenbarung zugänglich sind (vgl. Denzinger, *Enchiridion* 4206: Gott offenbart seinen Willen, uns „Anteil zu geben an Gütern, die das Erkenntnisvermögen des menschlichen Geistes völlig übersteigen"; vgl. ebd. 2850–2857, 3005, 3015f, 3028, 3032, 3041; Ecclesia Catholica, *Katechismus* § 50, § Ecclesia Catholica, *Kompendium* § 4; siehe auch Fußnote 511 auf S. 774).

Zur Unendlichkeitsfrage und ihrer Systematik

Unendlichkeit wird vor allem in der mathematischen Mengenlehre und in der theologischen Gotteslehre behandelt; außerdem wird sie in der Philosophie thematisiert, und zwar einerseits in der Ontologie, die wir mit der Mengenlehre zu den Fundamentaldisziplinen rechnen können, und andererseits in den drei philosophischen Gipfeldisziplinen (Theologie, Psychologie und Kosmologie).[28] So konzentriert sich die Thematik der Unendlichkeit innerhalb des Systems der Wissenschaften einerseits im „Fundamentalteil“, andererseits im „Gipfelteil“ dieses Systems.

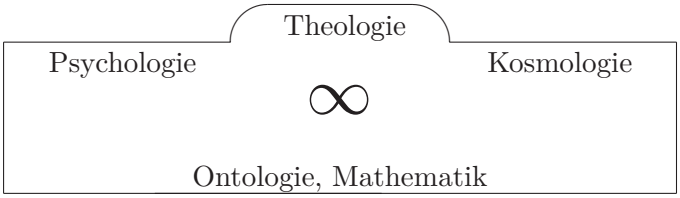


Abbildung 1.1: Unendlichkeit im Systemgebäude der Wissenschaft

Dass Unendlichkeitsfragen im „Gipfelteil“ auftauchen, welcher die letzten Fragen des Menschen behandelt, ist naheliegend. Diese Fragen lauten in etwa:

- Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt (Theologie)?
- Ist der Mensch bzw. seine Seele unendlich (Psychologie)?
- Kann die Welt selbst unendlich sein (Kosmologie)?

Warum aber tauchen Probleme des Unendlichen schon im Fundamentalteil auf? Eine auf die Ergebnisse dieser Arbeit vorgreifende Antwort wäre die, dass das Unendliche so real und wichtig ist, dass ohne dasselbe eine konsequent fundierte Wissenschaft überhaupt nicht denkbar ist. Es ergibt sich nun für unser Thema eine Zweiteilung:

1. Unendlichkeit im Fundamentalteil der Wissenschaft (Ontologie, Mathematik),
2. Unendlichkeit im Gipfelteil der Wissenschaft (Gotteslehre, Psychologie, Kosmologie).

Wenn der Titel dieser Arbeit die Unendlichkeit in den Schnittpunkt von Mathematik und Theologie verlegt, so ist mit „Unendlichkeit in der Mathematik“ eine Kurzformel für (1) gemeint und mit „Unendlichkeit in der Theologie“ eine solche für (2); es ist also mit Mathematik bzw. Theologie jeweils ein pars nobilior pro toto genannt.

Nach der Definition und Einteilung des Unendlichen in Kapitel 2 soll in den Kapiteln 3–7 das Unendlichkeitsproblem zunächst im Fundamentalteil der Wissenschaft betrachtet werden. Hierzu gehören Ontologie, Logik und Mengenlehre. Da idealerweise zuerst die Exposition der Methode und dann die eigentliche Theorie erfolgen sollte, müsste man die *Logik* an den Anfang stellen. Doch setzt eine anspruchsvolle Logik Grundkenntnisse über Objekte voraus. So wäre zuvor eine Erklärung der involvierten Objektklassen wünschenswert, und hierzu müsste man die *Ontologie* vor die Logik setzen. Objekte aber können sinnvollerweise nur in Bezug zum Denken klassifiziert werden, weshalb zuerst die Grundlagen der philosophischen *Psychologie* erläutert werden sollten. So ergäbe sich folgende Reihenfolge:

[28] Zu ergänzen wäre noch, dass Unendlichkeitsfragen auch in der Physik Erwähnung finden, was nicht verwunderlich ist, wenn man den offensichtlichen Zusammenhang dieser (inzwischen von der Philosophie emanzipierten) Wissenschaft zu der entsprechenden philosophischen Disziplin der Kosmologie betrachtet.

1. Theorie des Denkens (Anfangsgründe der philosophischen Psychologie),
2. Theorie der Objekte (Ontologie),
3. Logik,
4. Mengenlehre.

Man könnte an dieser Reihenfolge kritisieren, dass nun die eigentliche Methoden-Exposition (Logik) erst im dritten Schritt erfolgt. Aber man muss bedenken, dass die vorgeschalteten philosophischen Disziplinen keiner besonderen Methode bedürfen: Die grundlegende philosophische Theorie des Denkens und der Objekte kann und muss so präsentiert werden, dass die Darstellung intuitiv von selbst überzeugt.
Ein anderer Einwand wäre, dass eine strikte Einhaltung der Reihenfolge Logik − Mengenlehre unmöglich ist. Für eine anspruchsvollere Exposition der Logik benötigt man eine ausgebaute Theorie der natürlichen Zahlen,[29] und zum Beweis von Theoremen der höheren Logik braucht man eine weit über die Grundlagen hinaus entwickelte Mengenlehre.[30] Auf der anderen Seite wäre es auch kein Ausweg, die Mengenlehre einfach vor die Logik zu setzen, denn zumindest die Theoreme der höheren Mengenlehre sind ohne Logik nicht formulierbar, geschweige denn beweisbar. Als Ausweg bietet sich eine Art „hermeneutische Spirale“ an: Man beginne mit den Grundzügen der Mengenlehre einschließlich der Arithmetik, behandle dann die formale Logik und komme schließlich zur Mengenlehre zurück, indem man diese nun formal aus den Axiomen ableite. Die Grundlegung hätte dann folgende Struktur:

1. Theorie des Denkens (Anfangsgründe der philosophischen Psychologie),
2. Theorie der Objekte (Ontologie),
3. Inhaltliche Behandlung der Mengenlehre in Grundzügen,
4. Formale Logik,
5. Formale Behandlung der Mengenlehre aus den Axiomen.

So wäre ein zirkelfreier Aufbau der Grundlagen der Mathematik prinzipiell möglich. Bislang ist ein solcher Aufbau jedoch nirgendwo vollauf befriedigend durchgeführt worden.[31] Die vorliegende Arbeit schließt daher eine gewisse Lücke, indem hier die Schritte (1) bis (3) im Detail durchgeführt werden. Dagegen stelle ich die formale Logik in Kapitel 6 nur in ihren Grundzügen vor und verzichte ganz auf die formale Ableitung der Mengenlehre. Die wichtigsten für die Unendlichkeitsproblematik

[29] Konkret braucht man z. B. die Prinzipien der Rekursion und der vollständigen Induktion, und um diese Prinzipien formulieren und beweisen zu können, muss man anscheinend bereits Grundlagen der Mengenlehre voraussetzen.

[30] So benötigt z. B. ein exakter Beweis für die Vollständigkeit der Aussage– oder Prädikatenlogik anspruchsvolle Hilfsmittel aus der Mengenlehre, z. B. das Zornsche Lemma oder die Arithmetik der Ordinalzahlen.

[31] Eine Darstellung der *gesamten* neuzeitlichen Mathematik *einschließlich* ihrer Grundlagen ist überhaupt nur zweimal versucht worden. Erstmalig geschah dies in den drei Bänden der *Principia Mathematica* von Russell und Whitehead (1910–1913); aber dieses Werk hat aus logischer Sicht gravierende formale Mängel (siehe Gödel, *Russell's Mathematical Logic* S. 126, Werke Band 2 S. 120, deutsche Ausgabe S. VI) und entspricht seinem mathematischen Umfang nach nicht mehr dem heutigen Stand. Der zweite Versuch liegt in den monumentalen Werken der „Bourbaki“-Schule vor. Das unter dem Pseudonym „Nicolas Bourbaki“ erschienene Werk mit dem Titel „Eléments de Mathématique“ ist „in Wahrheit Produkt einer in der Geschichte der Mathematik einzigartigen Kollektivanstrengung“ einer „sich stets wieder verjüngenden Gruppe französischer Mathematiker“; es erschien „seit Ausbruch des Zweiten Weltkrieges in mehr als dreißig Bänden, sich, wie ihr Autorenteam, von Auflage zu Auflage ständig regenerierend, vielleicht bestimmt, so wenig wie die Mathematik jemals fertig zu werden“ (Schmidt, *Mengenlehre* S. 14). Aber Bourbaki verzichtete auf eine philosophische Grundlegung, und zudem ist es bezeichnend, dass gerade das einführende Buch dieser Monumentalreihe, die *Théorie des ensembles*, seit langem nicht mehr neu aufgelegt wird.

relevanten Definitionen und Sätze können nämlich bereits innerhalb der Aufarbeitung der ersten drei Schritte hinreichend entwickelt werden, und für die Schritte (4) und (5) kann ich auf die zeitgenössische logisch-mathematische Fachliteratur verweisen.[32]

Nach der mathematischen Grundlegung sollen die Unendlichkeitsfragen im Bereich der Gipfeldisziplinen betrachtet werden (Kapitel 9–11). Diesem Teil schicke ich das historische Kapitel 8 über die Entwicklung des Unendlichkeitsgedankens voraus, welche im Sinne der obigen Bemerkung über den Stellenwert der geschichtlichen Entwicklung (siehe S. 3–4) auch für die sachliche Thematik von Interesse ist. Bei der systematischen Ausführung der Gotteslehre (Kapitel 9) steht die Frage nach den Argumenten für Gottes Existenz im Vordergrund, die mit der Frage nach der konkreten Existenz eines absolut unendlichen Wesens identisch ist. Die anschließenden Erörterungen über die Unsterblichkeit der Seele (Kapitel 10) und die Möglichkeit eines unendlichen Kosmos (Kapitel 11) bilden den Abschluss dieser Untersuchungen.

[32] Zu (4) vgl. etwa Glubrecht et al., *Klassenlogik*; zu (5) Oberschelp, *Allgemeine Mengenlehre*.

2 Das Unendliche im Überblick

2.1 Zur Definition des Unendlichen

Nach seiner Wortbedeutung meint das deutsche Wort un-endlich ebenso wie das lateinische in-finitus und das griechische ἄ-πειρος das End– oder Grenzenlose. Von Grenzen kann man nur in Bezug auf ein bestimmtes Sachgebiet reden: dabei kann es sich z. B. um einen Ort, eine Zeit, eine Menge, eine Qualität oder eine Tätigkeit handeln. Nach Isenkrahe liegt „die Urheimat dieses Begriffs auf dem Gebiete des Ausgedehnten, insbesondere auf dem Gebiete des Räumlichen“,[1] während bei Anwendung des Begriffs auf andere Bereiche „Sinnübertragungen“ vorliegen.[2] Man sollte jedoch die Schlüsselrolle, die Isenkrahe dem *räumlichen* Grenzbegriff eingeräumt hat, besser dem *vorstellungsmäßigen* Grenzbegriff zuschreiben. Denn es gibt für jedes Begrenzte neben einer *spezifischen* Art, seine Begrenztheit zu beschreiben (das örtlich Begrenzte kann man *überqueren*, das zeitlich Begrenzte *überleben* usw.) auch eine *allgemeine* Art: Jedes Begrenzte lässt sich *überschauen*. So lässt sich Begrenztheit oder Endlichkeit im Anschluss an Aristoteles mit klarer Erkennbarkeit oder Überschaubarkeit gleichsetzen:[3] Mit diesem Ansatz lässt sich die Wortbedeutung des Unendlichen in zwei verschiedene Richtungen hin ausdeuten:

(1) Entweder man versteht unter Unendlichkeit *absolute* Unüberschaubarkeit: Dann wäre das Unendliche unbestimmt (indefinitum) und chaotisch und daher unvollkommen.

(2) Oder man versteht unter Unendlichkeit eine nur *für die uns bekannte Art der anschaulichen Vorstellung* geltende *relative* Unüberschaubarkeit einer an sich klar bestimmten Größe. Was derart unendlich ist, übersteigt prinzipiell unser anschauliches Vorstellungsvermögen und offenbart dadurch seine Vollkommenheit.

Wie sich im historischen Kapitel dieser Arbeit zeigen wird, hatte das Unendliche in der griechischen Philosophie die negative Bedeutung (1), wohingegen unter dem Einfluss des Neuplatonismus und des Christentums immer mehr die positive Bedeutung (2) an Bedeutung gewann, die heute bestimmend geworden ist. Ich setze daher im Folgenden diese zweite Wortbedeutung voraus.

Die Wortbedeutung gibt uns allerdings nur eine vage Vorstellung, sie ist keine exakte Definition des Unendlichen.[4] Eine solche benötigen wir nur für das *mengenmäßig Unendliche* oder die *unendliche Menge*:[5] Ist nämlich geklärt, was „unendlich viel“ bedeutet, so kann man die Unendlichkeit auf anderen Gebieten wie folgt erklären:

---

[1] Isenkrahe, *Das Unendliche* S. 14.

[2] Isenkrahe, *Das Unendliche* S. 23.

[3] Vgl. Aristoteles, *Physica* Buch 1 Kap. 4, 187b7–8, Ausgabe Zekl Band 1 S. 20f: „Das Unendliche ist, insofern es unendlich ist, unerkennbar“ («τὸ μὲν ἄπειρον ᾗ ἄπειρον ἄγνωστον»).

[4] Für räumliche Gebiete ist sogar ein feiner Unterschied zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit zu beachten: Zum Beispiel handelt es sich bei einer Kreislinie und einer Kugeloberfläche um ein unbegrenztes ein– bzw. zweidimensionales Gebilde, das aber gewöhnlich nicht als „unendlich“ gilt. Damit nämlich eine Linie oder Fläche unendlich ist, muss nach gewöhnlicher Auffassung nicht die Linie bzw. Fläche selbst, sondern ihre *Länge* bzw. ihr *Flächeninhalt*, d. h. die *Zahl* der Einheitsstrecken bzw. Einheitsflächen, die darauf Platz haben, grenzenlos sein. Analog kann man auch zwischen einem unbegrenzten und einem unendlichen Raum unterscheiden, worauf erstmals Riemann aufmerksam gemacht hat (siehe S. 644).

[5] Ich benutze das Wort „Menge“ hier einfach als Synonym für „Vielheit“.

- Eine unendliche Strecke ist eine Strecke, die sich aus *unendlich vielen* Einheitsstrecken (Metern) zusammensetzt.
- Eine unendliche Zeitdauer ist eine solche, die sich aus *unendlich vielen* Einheitsdauern (Sekunden) zusammensetzt.
- Auch andere physikalische Größen (Geschwindigkeiten, Helligkeiten usw.) sind unendlich, wenn sie sich aus *unendlich vielen* äquidistanten Einheits-Größen zusammensetzen.
- Die Unendlichkeit geistiger Größen (Wissen, Macht, Güte usw.) erklären wir schließlich entweder als *Maximum* oder, wo es sinnvoll erscheint (wie zum Teil bei Wissen und Macht) ebenfalls durch eine diesbezügliche *unendliche Menge* (siehe S. 14–15).

Wenn wir gemäß der obigen Analyse der Wortbedeutung definieren:

> Eine Menge soll unendlich heißen, wenn sie (in einer anschaulichen Vorstellung der uns bekannten Art) nicht vollkommen überschaubar ist,

so müssen wir präzisieren, was mit „überschaubar“ gemeint ist. Konkret und unmittelbar wahrnehmbar? Oder auch mehr oder weniger vermittelt und abstrakt wahrnehmbar? Hier gibt es jedenfalls verschiedene *Arten* oder *Stufen* der mangelnden Überschaubarkeit und folglich auch Stufen der Unendlichkeit. Solche Stufen werden in der Mengenlehre genau beschrieben,[6] wobei man den Mengen, die auf verschiedenen Unendlichkeitsstufen liegen, verschiedene „unendliche Kardinalzahlen“ oder „unendliche Mächtigkeiten“ zuordnet.[7] Dabei ist *jede* unendliche Vielheit so groß, *dass wir die dazugehörigen Dinge prinzipiell in der anschaulichen Vorstellung nicht mehr konkret und unmittelbar als voneinander verschiedene Einzeldinge zugleich wahrnehmen können.* Ein Beispiel ist die Gesamtheit der Punkte, die man durch endlos fortgesetzte Halbierung einer Strecke erhält, indem man als ersten Punkt den Mittelpunkt zwischen zwei Punkten A und Ω nimmt (dieser heiße 1), als zweiten Punkt den Mittelpunkt zwischen 1 und Ω (dieser heiße 2) usw.

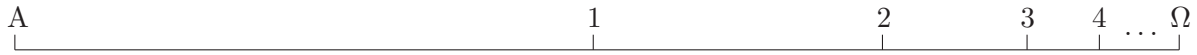


Abbildung 2.1: Fortgesetzte Halbierung einer Strecke

Die Gesamtheit dieser Punkte $1, 2, 3, 4 \ldots$ ist unendlich, da ihre anschauliche Übersichtlichkeit zumindest am rechten Ende (bei Ω) offensichtlich prinzipiell eingeschränkt ist. Aber diese Gesamtheit (die der „Menge der natürlichen Zahlen“ entspricht) besitzt nur eine Unendlichkeit der kleinsten Stufe, denn sie ist noch relativ übersichtlich, weil es sich um Punkte handelt, die alle zwischen dem Anfangs– und Endpunkt der Strecke eingeschlossen sind, und weil zudem jeder einzelne Punkt dieser Gesamtheit durch klar erkennbare Lücken von der Gesamtheit aller übrigen abgegrenzt ist. Man spricht hier von *abzählbarer Unendlichkeit.*[8]

Eine Unendlichkeit von qualitativ höherer Art besitzt offenbar die Gesamtheit *aller* Punkte einer Strecke, denn wir nehmen diese Punkte nicht direkt alle zugleich als klar voneinander abgegrenzte Einheiten wahr. Trotzdem steht uns auch diese Vielheit *vermittelt* durch die direkt wahrgenommene Strecke noch relativ klar und übersichtlich vor Augen. Man spricht von *der Unendlichkeitsstufe des Kontinuums.*[9]

---

[6] Siehe S. 244–247 und S. 264–265.

[7] Siehe Abschnitt 5.30, besonders Theorem 5.30.6 S. 318.

[8] Siehe Definition 5.20.4 S. 259. Siehe auch S. 231–232.

[9] Es handelt sich um eine Gesamtheit, welcher die sog. *Kontinuumsmächtigkeit* $\mathfrak{c}$, zukommt (siehe Definition 5.20.24 S. 264).

Auf eine *noch höhere* Stufe der Unendlichkeit würden wir stoßen, wenn wir eine Vielheit finden, die so groß ist, dass wir die zugehörigen Objekte auch in dieser „vermittelten“ Weise nicht mehr überschauen könnten. Eine solche Vielheit wäre *mächtiger als das Kontinuum.*.

Es wird sich zeigen, dass es sogar „unendlich viele“ Stufen der Unendlichkeit gibt,[10] wobei eine extrem hohe Stufe (unterhalb derer bereits unendlich viele andere Stufen liegen) dann erreicht ist, wenn die auf ihr liegenden Vielheiten (so genannte *Unmengen*) so groß sind, dass wir die zu ihnen gehörigen Dinge nicht mehr widerspruchsfrei zu einer Einheit zusammenfassen können.[11] Georg Cantor nannte solche Vielheiten *inkonsistent unendlich* oder *absolut unendlich*.[12] Ob es nur eine oder mehrere Stufen auf diesem „inkonsistenten“ Niveau gibt, werden wir offen lassen müssen.[13] Im Hinblick darauf, dass es mehrere sein könnten, sollte man zwischen „inkonsistent unendlich“ und „absolut unendlich“ unterscheiden: „inkonsistent unendlich“ sind Vielheiten, die wir nicht mehr ohne Widerspruch zusammendenken können, während „absolut unendlich“ eine schlechthin unübertreffbare Unendlichkeit meint.

Der bisher betrachtete Ansatz für eine Definition des Unendlichen hängt nun offenbar von relativ dunklen psychologischen Begriffen (Vorstellung, Anschaulichkeit usw.) ab. So stellt sich die Frage, ob es keinen exakteren Zugang gibt. Ein naheliegender Vorschlag wäre, die unendliche Menge einfach *mittels des Zahlenbegriffs* zu definieren:

> Eine Menge soll „endlich“ heißen, wenn sie eine bestimmte Zahl von Elementen hat, es also eine Zahl n aus der Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ gibt, so dass die Menge genau n Elemente hat. Andernfalls soll sie „unendlich“ heißen.

Diese Definition setzt jedoch voraus, dass geklärt ist, was „natürliche Zahlen“ sind und was es für eine Menge bedeutet, n Elemente zu haben. Beides lässt sich zufriedenstellend erklären, aber dazu ist eine nicht-triviale Vorarbeit nötig.[14] Nun könnte man, getäuscht durch den alltäglichen Umgang mit Zahlen, leicht glauben, dass hier überhaupt kein Problem vorliegt. Da nämlich nach naivem Verständnis Zahlen auf das *Zählen* zurückzuführen sind, pflegt man „endlich“ mit „zählbar“ gleichzusetzen. Man setzt dabei die folgende Definition voraus:

> Eine Menge soll „endlich“ heißen, wenn ihre Elemente gezählt werden können, d. h. wenn es einen Zählvorgang gibt, bei dem sämtliche zur Menge gehörigen Dinge erreicht werden. Andernfalls heiße die Menge „unendlich“ oder „unzählbar“.

Dies ist im Wesentlichen die Unendlichkeitsdefinition des Aristoteles, wonach das Unendliche das ist, „bei dem man unmöglich ein Ende erreichen kann“,[15] oder das, was sich „im Denken nicht durchschreiten“ lässt.[16] In diesem Sinn hieß es auch in der Scholastik: „infinitum transiri non potest“,[17] und diese Auffassung ist noch bei Kant zu finden: „Der wahre ... Begriff der Unendlichkeit ist: dass die sukzessive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quantum niemals vollendet sein kann.“[18] Problematisch ist hier jedoch, dass man in unendlicher Zeit sehr wohl unendlich viele

[10] Vgl. Korollar 5.20.22 S. 264.

[11] Vgl. Abschnitt 5.2.

[12] Siehe S. 73.

[13] Siehe S. 172.

[14] Siehe Abschnitt 5.16.

[15] Aristoteles, *Physica* Buch 1 Kap. 5, 204a3, Ausgabe Zekl Band 1 S. 120: «τὸ ἀδύνατον διελθεῖν».

[16] Aristoteles, *Analytica posteriora* Buch 1 Kap. 22, 83b6–7, S. 398f: «τὰ δ’ἄπειρα οὐκ ἔστι διελθεῖν νοοῦντα.»

[17] So heißt es z. B. bei Thomas von Aquin, *Summa Theologiae* pars 1 quaestio 14 articulus 12 ad 2, Ausgabe Busa S. 209a: „infinitum transiri non potest, neque a finito neque ab infinito“.

[18] Kant, *Kritik der reinen Vernunft* B460, Ausgabe Timmermann S. 534.

Dinge zählen kann.[19] Und nicht nur das: Auch in begrenzter Zeit kann man unendlich viele Dinge zählen, wenn die Zeit zwischen zwei Zählschritten immer kleiner wird. Um diese beiden Fälle auszuschließen, müsste man also sagen:

> Eine Menge von Dingen ist endlich, wenn diese durch einen Zählvorgang erfasst werden können, der in einer endlich großen Zeitspanne abläuft und bei dem die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Zählschritten stets gleich groß ist.

Der entscheidende Begriff ist hier die „endlich große“ Zeitspanne. Nun wollten wir jedoch die endliche Zeit gerade umgekehrt mittels des Begriffs der endlichen Menge definieren, als eine Zeitspanne, die endliche viele Zeiteinheiten umfasst. Wir kommen also nicht weiter, es sei denn, es gelänge, eine endliche Zeit zu beschreiben, *ohne* den Begriff „endlich“ zu verwenden. Eine Zeitspanne einfach dann als endlich anzusehen, *wenn sie Anfang und Ende hat*, ist keine Lösung, da es logisch nicht auszuschließen ist, dass eine Zeitspanne Anfang und Ende haben könnte, innerhalb derer dennoch unendlich viele Sekunden vergehen, ähnlich wie eine begrenzte Strecke dennoch unendlich viele Punkte besitzt. So ist unser Definitionsversuch mittels des Zählens vorläufig gescheitert.[20]

In der Mathematik des späten 19. Jahrhunderts hat man nun wirklich weiterführende Ansätze zur Definition des mengenmäßig Unendlichen gefunden: Es wurden eine Reihe von Definitionen aufgestellt, die zumindest auf den ersten Blick sowohl von psychologischen Begriffen (wie Vorstellung und Überschaubarkeit) als auch von den Begriffen der Zeit, des Zählens und der Zahl vollständig unabhängig sind.[21] Die wichtigste dieser Definitionen geht auf eine Tatsache zurück, auf die schon Duns Scotus, Albert von Sachsen und Galilei gestoßen waren,[22] die aber erst Bernhard Bolzano in seiner Schrift über *Paradoxien des Unendlichen* (1851) ausführlich analysiert hat: dass nämlich eine unendliche Menge A Teil einer anderen unendlichen Menge B sein kann, obgleich sich die in A und B zusammengefassten Dinge so gegenüberstellen lassen, dass jedem Ding aus A genau ein Ding aus B gegenübersteht und umgekehrt.[23] Indem sich die Bestandteile der Mengen A und B restlos zu Paaren zusammenstellen lassen, zeigt sich, dass die Mengen (in gewisser Hinsicht) gleich groß sind, *obwohl* A andererseits bloß ein Teil von B ist.[24] Laut Bolzano ist dies nur ein scheinbarer Widerspruch, dessen Anschein dadurch entsteht, dass derartiges für endliche Mengen unmöglich ist.[25] Er nannte die Art der Gleichheit, die hier trotz des Teilseins bestehen kann, *Ähnlichkeit*. Cantor führte dafür den Begriff der *Gleichmächtigkeit* ein; ich werde von *relationstheoretischer Gleichheit* sprechen. Nachdem nun diese von Bolzano analysierte „paradoxe“ Eigenschaft unendlicher Mengen 1878 von Georg Cantor als für das Unendliche *charakteristisch* erkannt worden war,[26] wurde sie 1887 von Richard Dedekind verwendet, um die Unendlichkeit formal zu *definieren*:

> „Ein System S heißt *unendlich*, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heißt S ein *endliches* System.“[27]

---

[19] Das hat auch Aristoteles gesehen, der die Unmöglichkeit, das Unendliche zu durchlaufen an einer Stelle einschränkt, indem er sagt, dass das Unendliche nur „in endlicher Zeit“ nicht durchlaufen werden kann: ἀδύνατον τὴν ἄπειρον [γραμμήν] διελθεῖν ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ. (*De caelo* Buch 1 Kap. 5, 272a29, Ausgabe Gigon S. 69).

[20] Erst nach der mathematisch exakten Einführung der natürlichen Zahlen werden wir sehen, dass und warum man durch Zählen mit natürlichen Zahlen in einem präzisen Sinn tatsächlich die Endlichkeit einer Menge feststellen kann (siehe Erklärung 5.17.8 S. 239 und Theorem 5.17.9 S. 239).

[21] Vgl. die Zusammenstellung solcher Unendlichkeitskriterien auf S. 247.

[22] Siehe Abschnitt 5.17.

[23] Vgl. Bolzano, *Paradoxien* § 20–22 S. 28–33.

[24] Dieses Phänomen wird ausführlich in Abschnitt 5.17 besprochen werden.

[25] Vgl. Bolzano, *Paradoxien* § 22 S. 32.

[26] Vgl. Cantor, *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Ausgabe Zermelo S. 120: „Ein Bestandteil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieses Verhältnis hört gänzlich auf bei den *unendlichen* ... Mannigfaltigkeiten.“

[27] Dedekind, *Zahlen* § 5 Nr. 64 S. 13. Vgl. im mathematischen Teil Definition 5.17.1 S. 233.

Die in dieser Definition verwendeten Begriffe scheinen nun sehr präzise und rein logischer Natur zu sein. Trotzdem sind anschauliche Erklärungen hierdurch nicht überflüssig geworden. Denn zum einen sollen formale Definitionen die inhaltliche Intuition präzisieren, die wir von Unendlichkeit haben; ob eine formale Definition dies tatsächlich leistet, können wir aber nur beurteilen, wenn wir diese intuitive Vorstellung auch ohne die formale Definition beschreiben können. Zum anderen zeigt sich, dass auch die DEDEKINDsche Definition, indem sie den Mengenbegriff (hier System genannt) verwendet, einen nicht-logischen Begriff gebraucht, dessen genaue Erklärung in einer realistischen (d. h. nicht bloß formalen) Mengenlehre, wie wir sehen werden, letztlich doch wieder auf psychologische Begriffe (Denken, Abstraktion usw.) zurückgreifen muss. Allerdings gewinnt die Mengenlehre um so mehr an Überzeugungskraft, je weniger an die Anschauung und an damit verbundene psychologische Erfahrungen appelliert werden muss. Im Detail werde ich eine Grundlegung der Mengenlehre nach diesen Grundsätzen in Kapitel 5 durchführen. Es wird sich dann zeigen, dass die DEDEKINDsche Definition in einem präzisen Sinn die *Nichtzählbarkeit* einer Menge beschreibt,[28] was wiederum offenbar eine spezifische Form von *Nichtüberschaubarkeit* impliziert. So ist die DEDEKINDsche Definition tatsächlich eine gelungene Explikation des mengenmäßigen Unendlichkeitsbegriffs.

[28] Siehe Theorem 5.17.24 S. 242 im Kontext von Abschnitt 5.17.

2.2 Arten des Unendlichen

Die bedeutendsten Unterscheidungen, die in der Philosophiegeschichte hinsichtlich des Unendlichen gemacht wurden, sind die folgenden vier: diejenige zwischen extensiv–quantitativer und intensiv–qualitativer Unendlichkeit, diejenige zwischen dem aktual und dem potentiell Unendlichen, diejenige zwischen dem unendlich Großen und dem unendlich Kleinen sowie schließlich diejenige zwischen dem relativ und dem absolut Unendlichen.

Bevor ich auf diese Arten des Unendlichen eingehe, möchte ich der Vollständigkeit halber noch auf zwei weitere, für uns weniger bedeutsame Unterscheidungen hinweisen. Zum einen ist zwischen dem *Unendlichen im eigentlichen* und dem *Unendlichen im uneigentlichen Sinn* zu unterscheiden. Letzteres ist bloß das *sehr groß erscheinende Endliche*, das in hyperbolischer Redeweise oft als „unendlich“, „zahllos“, „unermesslich“ usw. bezeichnet wird.[29] Zum anderen spielte in der Scholastik die Unterscheidung zwischen dem *privativ Unendlichen* und dem *negativ Unendlichen* eine große Rolle.[30] Das privativ Unendliche ist das Mangelhafte, dem eine Grenze fehlt, die es von Natur aus abschließen und vollenden würde.[31] Standardbeispiel ist die ungestaltete (durch keine Form begrenzte) Materie. Demgegenüber ist beim „negativ Unendlichen“ die Grenze bloß negiert, *ohne* dass dies ein Mangel wäre: Das „negativ Unendliche“ ist eine immaterielle (nicht durch die Materie limitierte) Form oder Wirklichkeit.[32] Diese Unterscheidung entspricht der oben S. 8 erwähnten Unterscheidung zwischen dem *als negativ bewerteten Unendlichen* und dem *als positiv bewerteten Unendlichen*, wobei das letztere hier allerdings terminologisch mit dem „negativ Unendlichen“ zusammenfällt.[33]

Extensiv-quantitative und intensiv-qualitative Unendlichkeit

Die eigentliche Unendlichkeit wird immer im Hinblick auf eine sog. *Größe* ausgesagt, wobei zwischen drei ursprünglichen Arten von Größe zu unterscheiden ist:

räumliche Ausdehnung,
zeitliche Ausdehnung und
abstrakt-mengenmäßige Ausdehnung.

Unter diesen drei Grundgrößen, auf denen alle in der Physik untersuchten Größen basieren,[34] ist die mengenmäßige Ausdehnung die fundamentalste, denn wir sprechen einem Raum oder einer Zeit genau dann Unendlichkeit zu, wenn die *Menge* der Einheitsräume oder Einheitsdauern, mit denen wir Raum bzw. Zeit ausmessen, unendlich ist. Außerdem kann die zeitliche und räumliche

[29] Zahlreiche instruktive Beispiele hierfür sind bei Antweiler, *Unendlich*, S. 24–29 zu finden. Vgl. auch *Apokalypse* 7,9 (die geretteten Menschen im Himmel bilden „eine große Schar, die niemand zählen kann“) und *Genesis* 15,5 (Unzählbarkeit der Sterne und der Nachkommenschaft Abrahams).

[30] Vgl. Gredt, *Elementa* Band 1 S. 286f, deutsche Ausgabe S. 227.

[31] Thomas von Aquin, *Summa Theologiae* pars 3 quaestio 10 articulus 3 ad 1, Ausgabe Busa S. 787b: „non habet formam quam natum est habere“.

[32] Thomas von Aquin, *Summa Theologiae* pars 3 quaestio 10 articulus 3 ad 1, Ausgabe Busa S. 787b: „forma vel actus non limitatus per materiam“.

[33] Der Scholastiker Heinrich von Gent hat freilich klar gesehen, dass das Unendliche nur dem Namen nach privativ oder negativ ist, der Sache nach aber etwas Positives: „infinitum etsi secundum impositionem et modum nominis privative aut negative dicitur, secundum rem tamen positive dicitur: quia illa negatio nobis dat intelligere verissimam affirmationem“ (Heinrich von Gent, *Summa Theologiae* articulus 44 quaestio 2, Ausgabe Badius Band 2 folio 14 verso). Siehe auch Fußnote 609 auf S. 554 sowie S. 558–559.

[34] So ist etwa die Geschwindigkeit definiert als das *Zahlen*verhältnis einer *räumlichen Größe* zu einer *zeitlichen Größe*. Aber nicht nur die offiziell als „abgeleitet“ geltenden Größen, sondern auch schon die sieben *Basisgrößen* der heutigen Physik (Länge, Zeit, Masse, Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge, und Lichtstärke), mit denen man alle anderen physikalischen Größen beschreiben kann, sind durch Wirkungen definiert, die man letztlich allein durch *Zählung* von *zeitlichen* Prozessen und *Einheitsstrecken* beschreiben kann.

Ausdehnung nur in einem Teilbereich des Seienden auftreten, während die mengenmäßige überall, auch im Bereich des rein geistigen oder des abstrakten Seins auftritt.[35]
Man spricht nun bei den drei Grundgrößen, wenn diese unendlich sind, von *extensiver* oder *quantitativer* Unendlichkeit. Das extensiv Unendliche ist daher einzuteilen in das räumliche, das zeitliche und das mengenmäßige (= die unendliche Menge):

Beispiel eines räumlich Unendlichen ist eine beidseitig unbegrenzte gerade Linie,
Beispiel eines zeitlich Unendlichen ist ein anfangs- und endloser Zeitraum,
Beispiel eines mengenmäßig Unendlichen ist die Gesamtheit aller möglichen Gedanken.

Dem extensiv Unendlichen steht das *intensiv* oder *qualitativ Unendliche* gegenüber.[36] Hierzu gehört jegliches Unendliche, was nicht räumlich, zeitlich oder mengenmäßig unendlich ist, z. B. unendlich große Helligkeit, Weisheit, Kraft, Güte usw. Beim intensiv Unendlichen bezieht sich das Unendlichkeitsprädikat *nicht direkt* auf eine Größe, sondern auf eine Qualität oder Tätigkeit. Doch ist auch hier ein Größenbezug festzustellen. Sehr deutlich ist dies zunächst bei den physikalischen Qualitäten erkennbar: Eine solche ist unendlich, wenn die *Anzahl* der übertroffenen physikalischen Einheiten der betreffenden Qualität unendlich ist. Z. B. ist ein *unendlich heller Gegenstand* ein solcher, dessen Helligkeit eine unendliche Menge von äquidistanten Helligkeitsstufen übertrifft, und *unendlich große Kraft* könnte man als die Fähigkeit definieren, zugleich eine unendliche Menge von gleich schweren endlichen Gewichten zu heben.

Fraglich ist, ob ein analoger Größenbezug auch bei Unendlichkeiten *geistiger Natur* vorliegt. So ist etwa „unendliches Wissen“ zwar sicher *auch*, aber *nicht allein* durch den Umfang des Gewussten (etwa die Anzahl der gewussten Sachverhalte) beschreibbar, denn es kann noch so etwas wie „unendliche Tiefe“ (etwa Klarheit und Deutlichkeit) des Verständnisses jedes einzelnen Sachverhaltes hinzukommen. Noch viel weniger als beim Wissen schiene es angemessen, „unendliche Liebe“ oder „unendliches Glück“ allein auf eine unendliche Anzahl (etwa die Anzahl der geliebten Gegenstände bzw. die Anzahl der befriedigten Wünsche) zurückzuführen. Doch gleichwohl scheint auch hier die Unendlichkeit letztlich auf eine Größe zurückführbar zu sein. Man kann nämlich geistige Güter wie Glück, Güte und Wissen *steigern* und *vermindern* und insofern *größenmäßig* vergleichen.[37] Nur ist die Natur dieser Größe im geistigen Bereich *anderer Art* als im physikalisch-materiellen. Der wesentliche Unterschied ist der, dass bei den physikalischen Qualitäten die Größe durch eine „Messung“ im Sinne einer *Addition oder Aneinanderreihung von Exemplaren einer Einheitsgröße* festgestellt werden kann, während es bei den Intensitäten geistiger Güter gar keine Einheiten gibt, die man aneinander fügen könnte: sonst müsste man diese auch portionsweise wieder wegnehmen und das geistige Gut dadurch zerteilen können. Wie aber Henry Deku im Anschluss an spätantike Philosophen zu Recht betont hat, scheinen geistige Güter „durch Teilung anstatt weniger mehr zu werden“: Der Professor wird nicht ärmer an Wissen, wenn er doziert, und Güte nimmt nicht ab, sondern zu,

[35] Vgl. Abschnitt 5.33.

[36] Nach Ziegenaus, *Marius Victorinus* S. 231 sind die intensive und extensive Unendlichkeit die beiden Oberbegriffe, unter die man die in der griechischen Philosophie sowie bei den Kirchenvätern bis einschließlich Marius Victorinus (siehe Abschnitt 8.8.3) entwickelten Unendlichkeitskonzeptionen zunächst subsumieren kann, wobei allerdings nur der extensiven Unendlichkeit die Bezeichnung „unendlich“ beigelegt wurde. Die Tradition der intensiven Unendlichkeitsvorstellung, in der das Unendliche als „geistiges Kraft-Zentrum“ gesehen wird (ebd. S. 233), führt Ziegenaus bis auf Parmenides zurück. Die Einteilung in das intensiv und extensiv Unendliche findet man auch bei Pohle, *Unendlich* S. 239. Pohle setzt das extensiv Unendliche explizit gleich mit der „Unendlichkeit der Größe“, die er von der „Unendlichkeit des Geistes“ als einer „intensiven, inneren“ Unendlichkeit abgrenzt.

[37] Vgl. Scheeben, *Dogmatik* Band 1 § 74 S. 531: „Unendlich ist der Gegensatz zu *endlich*. Das Ende (finis) ist an sich nur denkbar an einer *Größe*, zunächst der *mathematischen*, ... dann aber auch der *realen* oder *metaphysischen* Größe, d. h. ... *der inneren Vollkommenheit* der Dinge; denn auch diese Vollkommenheit gilt als Größe, inwiefern sie nach der Menge und dem Gewichte, dem Grade und Umfang ihres Inhaltes *bemessen* werden kann.“

wenn man versucht, sie anderen zuzuwenden.[38] So setzt sich die unendliche Größe hier nicht aus einer unendlichen Anzahl von Einheits-Intensitäten zusammen. Wenn daher nicht wenigstens teilweise ein Mengenbegriff mit der geistigen Intensität verbunden ist (wie beim Wissen die Menge des Gewussten, bei der Macht die Größe des Einflussbereichs usw.), kann die unendliche Intensität nur als Maximum aufgefasst werden. So ist unendliche Gerechtigkeit eine Gerechtigkeit *ohne Abstriche*, unendliche Liebe eine Liebe *ohne jeden* Vorbehalt, unendliche Güte die *totale* Übereinstimmung mit der Idee des Guten usw.
Wir können also zusammenfassend sagen, dass abgesehen von Fällen, in denen wir das Unendliche als Maximum definieren müssen, letztlich immer das mengenmäßig Unendliche, also die *unendliche Menge*, die *Grundlage für jegliches Verständnis des Unendlichen* bildet. Diese entscheidende Rolle des Quantitativen hat auch Aristoteles gesehen, wenn er sagt: „Die Begriffserklärung von ‚unendlich' benutzt den Begriff von Quantität, nicht von Substanz oder Qualität".[39]

Potentielle und aktuale Unendlichkeit

Etwas, dessen Größe stets vermehrt werden kann, das aber dennoch immer endlich bleibt, heißt *potentiell unendlich*, während das *aktual Unendliche* die Unendlichkeit tatsächlich erreicht hat.[40] Es ergibt sich also insgesamt eine Dreiteilung: etwas kann *aktual* unendlich, oder nur *potentiell* unendlich, oder aber *noch nicht einmal potentiell* unendlich sein. Man betrachte zu diesen Unterscheidungen folgendes Beispiel:

1. Angenommen, ein heute geborener Mensch hätte ein Mittel, das Altern seiner Zellen zu stoppen, so hätte er ein *potentiell unendliches* Lebensalter, d. h. die Zahl seiner Lebensjahre wäre unendlich vermehrbar, bliebe aber zu jedem Zeitpunkt endlich.

2. Dagegen wäre das Lebensalter eines Wesens, das schon immer gelebt hat, *aktual unendlich*, und es wäre auch schon immer aktual unendlich gewesen.

3. Schließlich ist das Lebensalter eines heute geborenen Wesens, das notwendigerweise einmal sterben muss, *weder aktual noch potentiell unendlich.*

Aristoteles führt in seiner *Physik* aus, dass sowohl die Annahme der Existenz von etwas Unendlichem wie auch die Annahme, es gebe schlechthin nichts Unendliches, auf unüberwindliche Schwierigkeiten stoße, und so sei „ein Schlichter nötig", dessen Spruch so aussehen müsse: „in bestimmtem Sinne gibt es das wohl, in einem bestimmten anderen aber nicht".[41] Die Lösung bestehe darin, dass

[38] Vgl. Deku, *Infinitum* S. 272. Mathematisch gesprochen besteht zwischen den möglichen Intensitäten eines steigerbaren geistigen Gutes eine Ordnungsrelation wie zwischen den Punkten einer von einem Punkt 0 ausgehenden und sich ins Unendliche erstreckenden Halbgeraden, und diesbezüglich kann man sich diese Intensitäten durchaus als Punkte auf dieser „geistigen Halbgeraden" vorstellen. Nur ist im Gegensatz zu einer echten Halbgeraden zwischen ihren „Teilstrecken" keine additive Kongruenzrelation definierbar.

[39] Aristoteles, *Physica* Buch 1 Kap. 2, 185b2–3, Ausgabe Zekl Band 1, S. 6f: «ὁ γὰρ τοῦ ἀπείρου λόγος τῷ ποσῷ προσχρῆται, ἀλλ᾽ οὐκ οὐσίᾳ οὐδὲ τῷ ποιῷ».

[40] Die Begriffe des *potentiell* (ἐνεργείᾳ, der Möglichkeit nach) und *aktual* (δυνάμει, wirklich) Unendlichen gehen auf Aristoteles zurück (vgl. Aristoteles, *Physica* Buch 3 Kap. 6, 206a16-18, Ausgabe Zekl Band 1, S. 134f). Aristoteles selbst weist darauf hin, dass „potentiell" hier nicht die gewöhnliche Bedeutung hat: Gemeint ist *nicht* die Möglichkeit oder Fähigkeit, tatsächlich unendlich zu werden. Bei den Scholastikern hieß das potentiell Unendliche auch *synkategorematisch* unendlich oder unendlich *in fieri* oder *sensu diviso*, während das aktual Unendliche als *kategorematisch* unendlich oder unendlich *in facto esse* oder *in sensu composito* hieß (vgl. Maier, *Vorläufer Galileis* S. 157 mit Fußnote 2). Die Bezeichnungen „kategorematisch" und „synkategorematisch" gehen auf den Logiker Petrus Hispanus (Papst Johannes XXI., 1226–1277) zurück (vgl. Duhem, *Les deux infinis* S. 21f). Hegel nannte das potentiell Unendliche das *schlechte* Unendliche und das aktual Unendliche das *wahrhaft* Unendliche (vgl. Hegel, *Enzyklopädie (1830)* § 94f, Ausgabe Bonsiepen/Lucas S. 130f, Ausgabe Nicolin/Pöggeler S. 112f).

[41] Aristoteles, *Physica* Buch 3 Kap. 6, 206a13-14, Ausgabe Zekl Band 1, S. 135.

es kein aktual Unendliches, sondern nur ein potentiell Unendliches gibt.[42] Gegen Aristoteles lässt sich einwenden, dass das potentiell Unendliche *das aktual Unendliche voraussetzt*, denn da das potentiell Unendliche das unendlich Vermehrbare ist, hat es eine aktual unendliche Eigenschaft: seine Vermehrbarkeit.[43] Die These, dass es nur potentiell Unendliches gibt, kann also jedenfalls nicht im absoluten Sinn festgehalten werden. Gäbe es nämlich das aktual Unendliche in keiner Weise, so auch keine unendliche Vermehrbarkeit, und folglich keine potentielle Unendlichkeit.[44]

Das unendlich Kleine und das unendlich Große

Nach Aristoteles erhält man das Unendliche *durch Addition* oder *durch Teilung*.[45] Dementsprechend nennt man eine Größe *unendlich groß*, wenn sie durch eine unendlich oft wiederholte Addition gleicher endlicher Größen hervorgeht, und *unendlich klein*, wenn sie durch eine Teilung einer endlichen Größe in gleichartige Teile hervorgeht, die dann wieder in gleichartige Teile geteilt werden usw., wobei dieser Prozess unendlich oft wiederholt wird.[46] Sofern der betrachtete Prozess der Addition oder Teilung nur potentiell unendlich ist, ist auch die betreffende Größe nur *potentiell* unendlich groß bzw. unendlich klein, während eine Größe, die man *nach Abschluss von unendlich vielen Schritten* eines solchen Prozesses erhalten würde, *aktual* unendlich groß bzw. klein heißt.

Zum Beispiel wäre, falls die Zeit keinen Anfang hatte, die bis heute vergangene Zeit eine aktual unendliche Größe, weil dann der Prozess des Aufaddierens unendlich vieler Zeiteinheiten schon zum Abschluss gekommen wäre. Interessanter sind die aktual unendlich kleinen Größen, die man auch *Infinitesimalien* nennt. Als Beispiel für aktual unendlich kleine Strecken könnte man Punkte ansehen, da sich eine endliche Strecke in unendlich viele Punkte einteilen lässt. Jedoch schreibt man gewöhnlich den Punkten „gar keine“ Größe zu, also auch keine unendlich kleine.[47] Unter *aktual unendlich kleinen* Strecken versteht man statt dessen *unendlich kleine Teile von Strecken, die selbst wieder teilbar sind*. Auf diese geheimnisvollen Größen werden wir in Abschnitt 5.25 zurückkommen.

In einem ganz anderen Sinn pflegt man von „unendlich klein“ und „unendlich groß“ bei vermehrbaren Eigenschaften zu reden, *die ein konträres Gegenteil haben*. Hier bedeutet die Vermehrung eine Verminderung des Gegenteils und umgekehrt. Wenn z. B. die Helligkeit zunimmt, nimmt die Dunkelheit ab und umgekehrt. Liegt eine solche Eigenschaft in unendlicher Größe vor, spricht man ihrem Gegenteil unendliche Kleinheit zu. Sowohl unendliche Größe als auch unendliche Kleinheit entstehen dann also „durch Addition“: nur entsteht das unendlich Kleine durch Vermehrung der gegenteiligen Eigenschaft. Ein Beispiel sind die beiden „unendlich weit links“ bzw. „unendlich weit rechts“ gelegenen Punkte $+\infty$ („plus unendlich“) und $-\infty$ („minus unendlich“) auf der Zahlengeraden (siehe Definition 2.3.4 S. 21), die man „unendlich groß“ bzw. „unendlich klein“ nennt.[48]

---

[42] Aristoteles, *Physica* Buch 3 Kap. 6, 206a18, Ausgabe Zekl Band 1, S. 134: «λείπεται οὖν δυνάμει εἶναι το ἄπειρον.» Auch die Zahlenreihe ist für Aristoteles bloß potentiell unendlich (vgl. Aristoteles, *Physica* Buch 3 Kap. 7, 207b11-12, Ausgabe Zekl Band 1, S. 142: δυνάμει μὲν ἔστιν, ἐνεργείᾳ δ᾽ οὔ.)

[43] Hierauf hat unter anderem Constantin Gutberlet hingewiesen (Gutberlet, *Das Unendliche*, S. 22f).

[44] Versteht man allerdings unter einer „aktual“ unendlichen Vielheit nicht bloß eine unendliche Vielheit von *zugleich daseienden*, sondern eine solche von *gleichzeitig zusammenwirkenden* Dingen, so hat die Annahme, dass eine solche Vielheit existieren kann, mit ernstzunehmenden Schwierigkeiten zu kämpfen (siehe Abschnitt 11.2).

[45] Aristoteles, *Physica* Buch 3 Kap. 4, 204a6–7, Ausgabe Zekl Band 1, S. 120f.

[46] Man beachte, dass diese Erklärung nur für räumliche oder zeitliche Größen sowie davon abgeleitete physikalische Größen sinnvoll ist, denn geistige Intensitäten können nicht in dieser Weise addiert oder geteilt werden.

[47] Wir werden jedoch in Abschnitt 5.25 (auf S. 292) sehen, dass die auf Euklid zurückgehende Auffassung eines Punktes als ausdehnungslos nicht die einzige mögliche darstellt.

[48] Meist benutzt man $+\infty$ bzw. $-\infty$ nur als Symbole für den potentiell unendlichen Prozess, bei dem man über jeden Punkt hinaus immer noch weiter „nach links“ bzw. „nach rechts“ auf der Zahlengeraden fortschreitet. Man kann aber $+\infty$ und $-\infty$ auch als aktual unendlich weit vom Nullpunkt entfernte Punkte auffassen: Vgl. einerseits den kontextbezogenen Gebrauch der Symbole $+\infty$ und $-\infty$ in der Ordnungstheorie (Definition 5.13.17 auf S. 178) und andererseits die Deutung von $+\infty$ und $-\infty$ als uneigentliche surreale Zahlen in Abschnitt 5.26.

Das relativ Unendliche und das absolut Unendliche

Nach einem viel zitierten Satz Thomas von Aquins kann etwas, was in einer bestimmten Beziehung unendlich ist, in anderer Beziehung endlich sein.[49] Ist dies der Fall, spricht man in der scholastischen Tradition von einem *relativ Unendlichen* (infinitum secundum quid), dem die *absolute Unendlichkeit* Gottes gegenübersteht (infinitum simpliciter).[50] Hierzu betrachte man folgende Beispiele:

1. Eine begrenzte Linie ist hinsichtlich ihrer räumlichen Erstreckung endlich, aber hinsichtlich der Menge ihrer Punkte unendlich.

2. Eine Linie mit nur einem Randpunkt erstreckt sich in der einen Richtung ins Unendliche, in der anderen ist ihre räumliche Erstreckung endlich.

3. Eine Linie ohne Randpunkt erstreckt sich zwar in beiden Richtungen ins Unendliche, nimmt aber nicht den ganzen Raum ein und ist daher als Teil des Raumes endlich.

4. Der allseitig unbegrenzte Raum ist in jeder Richtung unendlich, aber er kann in vielen anderen Hinsichten endlich sein, z. B. hinsichtlich seiner Dimensionszahl.

Versteht man nun unter dem „absolut Unendlichen“ ein solches, das in schlechthin *jeder* Beziehung unendlich ist, so erhält man allerdings einen widersprüchlichen Begriff, der für die Theologie nicht brauchbar zu sein scheint. Dass ein solches Unendliches zugleich unendlich groß und unendlich klein, unendlich hell und unendlich dunkel usw. genannt werden müsste, kann zwar aus mystischer Sicht noch als dem Gottesbegriff durchaus angemessen erscheinen,[51] aber dass ein solches Unendliches auch *mengenmäßig* in jeder Beziehung unendlich wäre, ist für einen *Theisten*, für den ein Unterschied zwischen Gott und dem Universum besteht, nicht mehr akzeptabel. Denn nur die Gesamtheit aller Objekte schlechthin kann mengenmäßig in jeder Beziehung unendlich genannt werden.

So sollte man beides, sowohl das relativ Unendliche wie auch das absolut Unendliche, von vornherein auf einen bestimmten Bereich beziehen: z. B. auf den Bereich der Menge, der räumlichen Erstreckung, der Kraft usw. Auch wenn wir von der Unendlichkeit Gottes reden, gibt es hier einen ganz bestimmten Bereich, nämlich den der „Seinsmächtigkeit“.[52] Unter dem *absolut Unendlichen* ist dann in jedem Bereich das prinzipiell nicht überschreitbare Maximum zu verstehen, unter einem *relativ Unendlichen* dagegen etwas, das (im Sinne der in Abschnitt 2.1 entwickelten Vorstellung) unendlich ist, *ohne* maximal zu sein.

---

[49] Thomas von Aquin, *Summa Theologiae* pars 3 quaestio 10 articulus 3 ad 2, Ausgabe Busa S. 787b: „Nihil prohibet aliquid esse infinitum uno modo quod est alio modo finitum“.

[50] Vgl. Gredt, *Elementa* Band 1 S. 287, deutsche Ausgabe S. 227f. Thomas nennt diese beiden Weisen der Unendlichkeit das Unendliche „secundum aliquid determinatum“ und das Unendliche „simpliciter quoad omnia“ (Thomas von Aquin, *Summa Theologiae* pars 3 quaestio 10 articulus 3 ad 3, Ausgabe Busa S. 787c).

[51] Vgl. Cusanus, *Docta ignorantia* Buch 1 Kap. 4 Nr. 12, Ausgabe Senger S. 18: „das absolut Größte“ ist „derart frei von irgendeiner Art des Gegensatzes, dass im Größten das Kleinste koinzidiert … So macht es keinen Unterschied, ob man sagt: ‚Gott … ist Licht‘, oder ob man sagt: ‚Gott ist in so höchstem Maße Licht, dass er im geringsten Maße Licht ist‘ … Doch dieser Sachverhalt übersteigt all unser Denken, das auf dem Wege des Verstandes das Widersprechende nicht in seinem Ursprung zu verbinden vermag.“

[52] Zur Seinsmächtigkeit und ihren Stufen siehe Abschnitt 4.1; konkret äußert sie sich in Macht, Wissen und Güte. Auch Thomas von Aquin hat Gottes absolute Unendlichkeit auf einen bestimmten Bereich eingeschränkt (siehe S. 561–562): Im absoluten Sinn unendlich („infinitum simpliciter“) ist Gott bei ihm im Bereich des Wesens (secundum essentiam). Damit dürfte der Bereich der Seinsmächtigkeit gemeint sein.

2.3 Charakteristische Beispiele für das Unendliche

Die folgende Liste enthält die geläufigsten Beispiele für das Unendliche und ermöglicht zugleich einen Einblick in die wichtigsten Kategorien, in denen das Unendliche vorkommt:

1. ein (allseits oder teilweise) unbegrenzter Raum,

   eine (allseits oder teilweise) unbegrenzte Ebene,

   eine (auf einer oder auf beiden Seiten) unbegrenzte Linie,

2. ein Zeitraum, der anfangslos oder endlos oder beides zugleich ist,

3. die Gesamtheit der Punkte auf einem beliebigen Linien–, Flächen– oder Raumstück,

4. die Gesamtheit der Zeitpunkte in einem beliebigen Zeitraum,

5. die Gesamtheit der Teil-Linien einer Linie, die man durch endlos fortgesetzte Teilung (z. B. Halbierung) erhält, erst recht die Gesamtheit aller Linien überhaupt, die Teil einer größeren Linie oder eines Flächenstücks oder Raumstücks sind,

   die Gesamtheit aller Flächen, die Teil einer Gesamtfläche oder eines Raumstücks sind,

   und die Gesamtheit aller Raumstücke, die Teil eines anderen Raumstücks sind,

6. die Gesamtheit der Zeitintervalle, die man durch endlos fortgesetzte Teilung (z. B. Halbierung) eines Zeitintervalls erhalten kann,

   erst recht die Gesamtheit aller Zeitintervalle, die Teil eines größeren Zeitintervalls sind,

7. die Gesamtheit der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3 \ldots$,

   erst recht die Gesamtheiten noch umfassenderer Zahlenbereiche,

8. die Gesamtheit aller Gedanken,

9. die Gesamtheit aller Seienden und die Gesamtheit aller Attribute eines Seienden,

10. das allvollkommene Sein: Gott.

Eine genauere Erläuterung der Beispiele 1-7 setzt ein genaueres Verständnis von Raum, Zeit und Zahl voraus, während man zum tieferen Verständnis der Beispiele 8-10 die Begriffe von Denken und Sein analysieren muss, was den Entwurf einer Erkenntnistheorie und Ontologie erforderlich macht. **Raum**, **Zeit**, **Zahl**, **Denken** und **Sein** sind jedenfalls die Bereiche, in denen uns Unendliches entgegentritt. Hier soll es vorerst genügen, das **achte Beispiel** zu erläutern. Auf dieses Beispiel stützte sich Richard Dedekind in seinem „Beweis“ für die Existenz einer unendlichen Gesamtheit:

> „Meine Gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s', dass s Gegenstand meines Denkens ist, selbst ein Element von S.“[53]

Dedekind beobachtet also, dass man von einem beliebigen Gedanken s stets zu dem Gedanken s' fortschreiten kann, dessen Inhalt der Gedanke s selbst ist, dann weiter zu dem Gedanken s'', dessen Inhalt s' ist usw. So erhält man eine endlose Folge von Gedanken $s, s', s'', s''' \ldots$. Wichtig ist, dass hier von *möglichen* Gedanken die Rede ist: Gedanken, die man denken *kann* (gleichgültig, ob das jemand auch wirklich tut). Solche *mögliche* Gedanken sind nicht nichts, auch wenn sie nicht den

[53] Dedekind, *Zahlen* S. 14.

Seins-Status der *wirklichen* Dinge haben.[54] Sie bilden also eine Gesamtheit daseiender Dinge, und zwar, wie DEDEKINDS „Beweis“ zeigt, eine unendliche.

Unter dem „unbegrenzten Raum“ im **ersten Beispiel** können wir nicht ohne weiteres den *physikalischen Raum* verstehen, von dem heutige Physiker es für möglich halten, dass er in sich gekrümmt ist und dann ein bloß endliches Volumen hätte.[55] Vielmehr verstehe ich darunter einen *vorgestellten Raum*. Wie jeder bestätigen kann, der sich einen Körper vorstellt, ist mit einer solchen Vorstellung notwendigerweise die Vorstellung eines allseitig unbegrenzten dreidimensionalen Raumes verbunden, in dem dieser Körper sich befindet.[56] Einen solchen Raum nenne ich im Anschluss an KANT einen *Anschauungsraum*.[57] KANT spricht in der Einzahl von „dem“ Anschauungsraum, doch ist es nicht notwendig, bei der Vorstellung mehrerer Körper diese in denselben vorgestellten Raum zu versetzen, denn man kann jeden vorgestellten Körper aus dem Raum eines anderen Körpers, mit dem dieser keinen Teil gemeinsam hat, „hinausdenken“ und beide Körper in einem je eigenen Raum für sich betrachten.[58] Für jeden menschlichen Beobachter ist jedoch *ein* Anschauungsraum ausgezeichnet: derjenige, von dem er selbst in seiner Vorstellung umgeben ist und in dem er alle „wirklich“ ihm begegnenden Körper lokalisiert denkt. Diesen Raum könnte man den *subjektiven Anschauungsraum* des Beobachters nennen. Nach einer konsequent durchgeführten idealistischen Philosophie müsste dieser Raum für jeden Beobachter ein anderer sein, aber man steht dann vor dem Rätsel, wie eine Begegnung zwischen verschiedenen Beobachtern möglich ist, bei der jeder im Anschauungsraum des anderen auftauchen muss. Sofern die Beobachter wirklich im gegenseitigen Austausch stehen, scheint es daher natürlicher zu sein, diese in ein und demselben *intersubjektiven Anschauungsraum* lokalisiert zu denken, welcher zu dem Körpersystem gehört, das aus *allen* Beobachtern besteht, die sich begegnen können. Beobachtergruppen, die nicht miteinander in Austausch stehen, könnten sich dagegen in verschiedenen intersubjektiven Anschauungsräumen befinden. Wie das Verhältnis der Anschauungsräume zum (wirklichen) physikalischen Raum ist, ob es überhaupt einen wirklichen Raum und wirkliche Körper gibt, kann hier offen bleiben:[59] Denn wenn wir unsere Behauptung auf Anschauungsräume beziehen, sind wir auf jeden Fall auf der sicheren Seite.

Ebenso soll unter der *Zeit* im **zweiten Beispiel** nicht ohne weiteres die *physikalische Zeit* verstanden werden, von der etwa der Physiker Stephen W. HAWKING annimmt, dass sie analog zum Raum begrenzt und in sich geschlossen ist.[60] Es sind vielmehr *vorgestellte Zeiträume* gemeint, welche den Bewegungen eines Körpers in einem Anschauungsraum zugrunde liegen. Wir können diese

---

54 Vgl. Abschnitt 4.3.

55 Vgl. hierzu Abschnitt 8.16.

56 Man könnte einwenden, dass man sich nur einen begrenzten Teil des dreidimensionalen Raumes *konkret* vorstellen kann. Das ist richtig, aber man kann diesen Teil in der Vorstellung stets vergrößern, wobei eine Gerade bei einer solchen Vergrößerung immer gerade bleibt. Dies zeigt, dass der Raum, welcher der Vorstellung zugrunde liegt, tatsächlich der klassischen „euklidischen Geometrie“ entspricht, also nicht gekrümmt ist. Wenn daher der *physikalische* Raum ein gekrümmter Raum ist, wie er durch die allgemeinere „Riemannsche Geometrie“ beschrieben wird, müsste man sagen, dass unsere anschauliche Vorstellung nicht diesen Riemannschen Raum selbst, sondern nur dessen so genannte „Tangentialräume“ erfasst: euklidische Räume, die den Riemannschen Raum jeweils in der Nähe eines Punktes approximieren. Unsere Anschauung kann in diesem Sinne „tangential“ genannt werden.

57 Vgl. KANT, *Kritik der reinen Vernunft* B 38, Ausgabe Timmermann S. 98: „Der Raum ist eine notwendige Vorstellung, a priori, die allen äußeren Anschauungen zum Grunde liegt“.

58 Vgl. hierzu die Bemerkung EINSTEINS, man könne nicht von dem „Raum“ schlechthin, sondern nur von dem „zu einem Körper A gehörigen Raum“ reden (*Grundzüge der Relativitätstheorie* S. 7).

59 KANT leugnete die Existenz eines realen Raums, gab aber die Existenz realer Körper als „Dinge an sich“ zu, während BERKELEY beides verneinte (siehe Abschnitte 8.12.1 und 11.1). Diese Positionen sind allerdings fragwürdig (siehe S. 601).

60 Siehe S. 665.

Zeiträume in Analogie zu den Anschauungsräumen *Anschauungszeiten* nennen.[61] Dass sich diese nach beiden Seiten hin als unbegrenzt denken lassen, ist anschaulich klar.

Auch das **dritte Beispiel** bedarf der Erläuterung. Wenn man mit Euklid den Punkt definiert als etwas, „was keine Teile hat“,[62] bleibt unklar, was gemeint ist,[63] und es besteht die Gefahr, sich den Punkt als etwas nicht Existierendes vorzustellen.[64] Die moderne Mathematik versucht gar nicht erst, eine Definition für die Ausdrücke Punkt, Linie und Fläche anzugeben, sondern sieht darin undefinierte Grundbegriffe mit vorgegebenen Eigenschaften.[65] Um zu entscheiden, ob unsere Beispiele für unendliche Mengen einer kritischen Betrachtung standhalten, müssen aber brauchbare Erklärungen der verwendeten Begriffe vorgelegt werden. Ich definiere den Punkt daher wie folgt.

2.3.1 Erklärung Ein *(fester) Punkt* in einem Anschauungsraum ist ein Ort in diesem Raum, den eine *Ecke* eines vorgestellten beweglichen Körpers (z. B. eine Pfeilspitze) einnehmen kann. Die Ecke selbst ist als Teil des beweglichen Körpers vom festen Punkt zu unterscheiden und heißt ein *beweglicher Punkt*.

Da eine Ecke ein wohldefinierter Teil des Körpers ist, muss sie auch einen wohldefinierten Platz im Anschauungsraum einnehmen, und dieser Ort – also der von der Ecke abgedeckte Platz – ist nach obiger Erklärung ein Punkt. Ähnlich definiere ich Linien und Flächen:

2.3.2 Erklärung Eine *(feste) Linie* in einem Anschauungsraum ist ein fester Ort in diesem Raum, den eine *Kante* eines vorgestellten beweglichen Körpers einnehmen kann. Die Kante selbst heißt *bewegliche Linie*. Eine (feste oder bewegliche) Linie heißt *geschlossen*, wenn man auf ihr in eine Richtung fortschreitend stets wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Eine nicht gebogene Linie heißt *Gerade*, wenn sie nach beiden Seiten hin unbegrenzt ist, *Halbgerade* oder *Strahl*, wenn sie nach einer Seite hin unbegrenzt und nach der anderen begrenzt ist, und *Strecke*, wenn sie auf beiden Seiten begrenzt ist.

Von der Anschauung her ist nun klar, dass sich nicht nur eine unbegrenzte Linie, sondern auch bereits eine begrenzte Linie (z. B. eine Strecke) aus unendlich vielen Punkten zusammensetzt. Denn zwischen zwei Pfeilspitzen kann man in der Mitte immer noch eine weitere Pfeilspitze platzieren.

2.3.3 Erklärung Eine *(feste) Fläche* im Anschauungsraum ist dort ein fester Ort, den eine bewegliche Fläche einnehmen kann. Hierbei ist eine *bewegliche Fläche* die gesamte Grenze („Oberfläche“) eines vorgestellten beweglichen Körpers oder ein von einer geschlossenen Linie begrenztes Teilstück einer solchen Körperoberfläche.
Eine nicht gewölbte Fläche heißt *Ebene*, wenn sie nach allen Seiten unbegrenzt ist.

Es dürfte nun unmittelbar durch die Anschauung klar sein, dass sich jedes Flächen–, Linien– und Raumstück aus unendlich vielen Punkten zusammensetzt.

---

[61] In Fortführung der Analogie können wir besondere Anschauungszeiten als *subjektiv* bzw. *intersubjektiv* bezeichnen.

[62] Euklid, *Elemente* Buch 1 Def. 1, Ausgabe Heiberg/Stamatis Band 1 S. 1, Ausgabe Thaer S. 1.

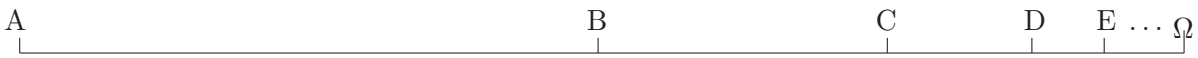
[63] Auch von der Seele und von Gott wird ja behauptet, dass sie nicht aus Teilen bestehen. Dasselbe gilt für unteilbare Akte und für Zeitpunkte.

[64] Dieser Gefahr erlagen diejenigen Philosophen, welche sich die Linie nicht aus Punkten, sondern aus endlich vielen kleinsten Teilen zusammengesetzt dachten, die gerade so groß sind, dass man sie noch unterscheiden kann: z. B. Berkeley, *Knowledge* § 124, Ausgabe Ayers S. 116, Ausgabe Klemmt S. 97 (vgl. ebd § 132, Ausgabe Ayers S. 119, Ausgabe Klemmt S. 102) und Hume, *Understanding* section 12 part 2, Ausgabe Selby-Bigge S. 156, Ausgabe Kulenkampff S. 183; siehe Fußnote 839 auf S. 584.

[65] Vgl. hierzu Abschnitt 5.21.

Was das **vierte Beispiel** betrifft, so müssen wir den Begriff des *Zeitpunktes* klären. Wenn wir einen physikalischen Zeitraum ausmessen, benutzen wir dazu eine gleichmäßige Bewegung eines Körpers im physikalischen Raum. Analog ist ein vorgestellter Zeitraum durch die Bewegung eines vorgestellten Körpers im Anschauungsraum auszumessen. So kann man etwa die gleichmäßige Bewegung einer Pfeilspitze auf einer Geraden betrachten. Die Zeit, zu welcher die Pfeilspitze einen Punkt auf der Geraden einnimmt, bezeichnen wir dann als einen Zeitpunkt innerhalb des betrachteten Zeitraums. So besteht eine Entsprechung der Zeitpunkte eines anfangs– und endlosen Zeitraums mit den Punkten einer Geraden, und ebenso eine Entsprechung der Zeitpunkte eines begrenzten Zeitraums mit den Punkten einer Strecke. Da die Gesamtheit der Punkte auf einer Geraden bzw. Strecken unendlich ist, gilt dies auch für die Gesamtheit der entsprechenden Zeitpunkte.

Im **fünften Beispiel** wird festgestellt, dass eine begrenzte Linie sich nicht nur aus unendlich vielen Punkten, sondern auch aus unendlich vielen Teil-Linien zusammensetzt. Um dies zu sehen, halbiere man eine Linie $A\Omega$ und nenne den Mittelpunkt B, dann halbiere man $B\Omega$ und nenne den Mittelpunkt C usw. Dieses Verfahren kann ohne Ende fortgesetzt werden.



Offenbar handelt es sich bei den unendlich vielen Linien AB, BC, CD, DE usw. um Teil-Linien, die sich zusammen mit dem Punkt Ω zur Gesamtlinie $A\Omega$ zusammensetzen.

Das **sechste Beispiel** ist das Zeit-Analogon zum fünften Beispiel und dürfte daher durch dieses schon hinreichend erklärt sein.

Das **siebte Beispiel** stellt uns die Aufgabe, genauer zu erklären, was Zahlen sind. Dieses Problem beschäftigt Philosophen und (philosophisch interessierte) Mathematiker bis heute.[66] Die moderne Mathematik sieht die Zahlen (ebenso wie Punkte in der Geometrie) als wesensmäßig nicht spezifizierte Objekte an, die bestimmte Axiome erfüllen. So gesehen wäre aber die Gesamtheit der Zahlen als Beispiel für die tatsächliche Existenz einer unendlichen Gesamtheit unbrauchbar. Um das Beispiel zu rechtfertigen, benötigen wir also eine reale Interpretation des Zahlenbegriffs. Eine bekannte und sehr einfache Interpretation der Zahlen ist ihre Deutung als Punkte auf der Zahlengeraden, durch welche ein unmittelbarer Bezug der Zahlen zur Geometrie hergestellt wird. Diese Interpretation hat aber auch Nachteile. Zum einen stellt sich sofort die – nicht kanonisch zu beantwortende – Frage, *welche* Gerade man als „die“ Zahlengerade ansehen will. Zum anderen ist es gerade eine Errungenschaft der modernen Mathematik, dass Zahlen *unabhängig* von der Geometrie und der geometrischen Anschauung eingeführt werden können und daher auch universeller einsetzbar sind. Eine den Ansprüchen der modernen Mathematik genügende Interpretation der Zahlen werde ich daher in Kap. 5 erörtern. Hier werde ich dagegen trotz der besagten Nachteile die (nach wie vor wichtige) geometrische Interpretation verwenden. Die folgenden Erörterungen über das Unendliche im Bereich der Zahl haben demnach unmittelbar geometrische Bedeutung, sind also letztlich als eine Fortführung und Präzisierung der Diskussion über das Unendliche im Raum zu verstehen.

2.3.4 Erklärung Eine *Zahlengerade* ist eine Gerade in einem Anschauungsraum, auf der zwei Punkte als *Nullpunkt* 0 bzw. *Einspunkt* 1 festgelegt sind, und die vollständig in gleichlange Strecken eingeteilt ist, derart dass 0 und 1 die Grenzpunkte einer dieser Strecken sind. Die Grenzpunk-

[66] Vgl. den Überblick über verschiedene Auffassungen bei Frege, *Grundlagen der Arithmetik* § 18–28, Ausgabe Thiel S. 32–43. Siehe auch Abschnitt 5.33.

te dieser Strecken heißen *Ganzzahlpunkte* oder *ganze Zahlen* der Zahlengeraden. Wir wählen eine Zahlengerade fest aus und nennen sie die *Standard-Zahlengerade*.

Die Zahlensymbole $1, 2, 3, \ldots$ sollen nun die Ganzzahlpunkte bezeichnen, die man von 0 aus in Richtung von 1 nacheinander erreicht. Diese ganzen Zahlen heißen *positiv*, die übrigen werden mit $-1, -2, -3$ usw. bezeichnet und heißen *negativ*. Als *natürliche Zahlen* bezeichnen wir die positiven ganzen Zahlen einschließlich der Zahl Null,[67] also die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$.

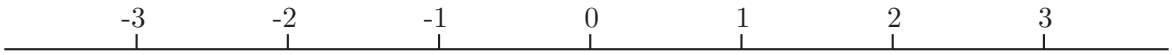


Abbildung 2.2: Zahlengerade

2.3.5 Erklärung Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet man die Klasse[68] der ganzen Zahlen $(\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, mit $\mathbb{N}$ diejenige der natürlichen Zahlen $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ und mit $\mathbb{N}^*$ diejenige der von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, \ldots)$.[69]

Da die Klasse der natürlichen Zahlen eine nicht endende Folge $0, 1, 2, \ldots$ bildet, heißt sie mit Recht unendlich. Aus demselben Grund ist die Gesamtheit der negativen Zahlen $-1, -2, -3 \ldots$ unendlich. Die Klasse $\mathbb{Z}$ umfasst demnach über die unendlich vielen natürlichen Zahlen hinaus noch unendlich viele weitere Zahlen und ist somit erst recht unendlich.[70] Die ganzen Zahlen bilden einen Teil einer noch umfassenderen Klasse, die man $\mathbb{Q}$ nennt:

2.3.6 Erklärung Die Klasse $\mathbb{Q}$ umfasst für jede von 0 verschiedene natürliche Zahl n und jede ganze Zahl m die so genannte Bruchzahl $\frac{m}{n}$ mit Zähler m und Nenner n.
Um diese *Bruchzahlen* (auch: *rationale* Zahlen, Quotienten) auf der Zahlengeraden zu lokalisieren, müssen wir also für jede natürliche Zahl n die unendlich vielen „n-tel Zahlen“

$$\ldots, \frac{-3}{n}, \frac{-2}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$$

als Punkte definieren. Hierzu denke man sich eine neue Zahlengerade, die „n-tel-Zahlengerade“, auf welcher die Strecke von 0 bis n so groß ist wie auf der Standard-Zahlengerade die Strecke von 0 bis 1, und lege sie derart auf die Standard-Zahlengerade, dass die Nullpunkte beider Zahlengeraden zusammenfallen und die 1 der Standard-Zahlengerade mit der Zahl n der n-tel-Zahlengerade koinzidiert. Im folgenden Bild ist dies für die 2-tel-Zahlengerade angedeutet:

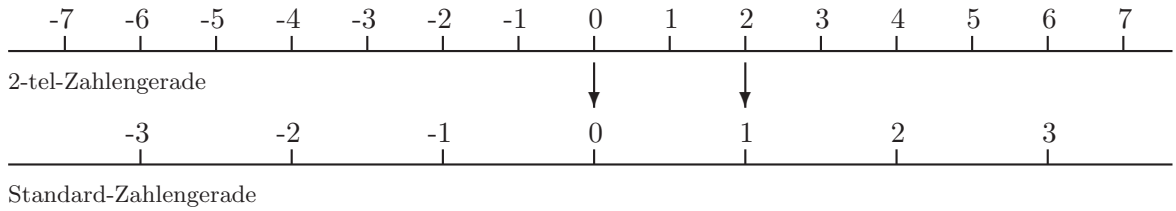
---

67 Die Mathematiker weichen in der Definition der natürlichen Zahlen voneinander dadurch ab, dass einige die Zahl 0 ausschließen, während andere sie einschließen. Die meisten Mengentheoretiker betrachten 0 als natürliche Zahl; diesen schließe ich mich an.

68 Die genauere Erklärung des Klassen-Begriffs erfolgt später (siehe 5.2.9 S. 76). Hier genügt es, sich unter einer Klasse einfach eine „Gesamtheit“ (in der alltäglichen Bedeutung dieses Begriffs) vorzustellen.

69 Mathematiker, welche die Null nicht als natürliche Zahl ansehen, bezeichnen mit $\mathbb{N}$ dagegen die Klasse der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ (ohne 0). Für die Klasse der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ (mit 0) verwenden diese das Symbol $\mathbb{N}_0$.

70 Hier springt die Problematik einer naiven Definition des Unendlichen als „das Grenzenlose“ ins Auge. Wenn das Unendliche das Grenzenlose ist, scheint die Klasse $\mathbb{N}$, weil sie durch weitere Zahlen ergänzt werden kann, nicht unendlich zu sein. Im diesem Sinn kann es nur eine einzige unendliche Gesamtheit geben: *die Gesamtheit von allem schlechthin*. Wäre es ein Ausweg, zu sagen, das Unendliche sei lediglich das „auf einem bestimmten Gebiet“ Grenzenlose? Dann könnte man die Klasse $\mathbb{N}$ als unendlich anerkennen, insofern sie „auf dem Gebiet“ der sich von 0 aus in Richtung von 1 erstreckenden Zahlenpunkte grenzenlos ist. Aber diese Auffassung vom Unendlichen hat mit einem neuen Einwand zu kämpfen. Es scheint nun *jede beliebige* Gesamtheit, z. B. auch die aus den Zahlen $1, 2, 3$ bestehende, unendlich zu sein: auf dem Gebiet der Zahlen von 1 bis 3 ist eben die aus $1, 2$ und 3 bestehende Gesamtheit grenzenlos, indem sie alles auf *diesem* Gebiet Bestehende uneingeschränkt umfasst. Wenn man also überhaupt mit dem Begriff der „Grenzenlosigkeit auf einem Gebiet“ arbeiten will, darf man nicht jedes beliebige Gebiet zulassen, sondern man sollte sich auf das Gebiet unserer konkret-anschaulichen Vorstellung beziehen. Während die Gesamtheit $1, 2, 3$ vollständig überschaubar ist, trifft dies auf die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen in einem prinzipiellen Sinn nicht mehr zu. – Dennoch ist diese Erklärung des Unendlichen vage, so dass für genauere Untersuchungen eine exakte Unendlichkeitsdefinition unumgänglich ist, wie sie schon in Abschnitt 2.1 vorläufig vorgestellt wurde und endgültig in Abschnitt 5.17 erörtert werden wird.



Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ sei nun derjenige Punkt der Standard-Zahlengeraden, auf welchen in dieser Position die Zahl m der n-tel-Zahlengerade zu liegen kommt.

Man sieht nun sofort, dass (für jedes n) zwischen 0 und 1 die Bruchzahlen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ liegen.[71] Insgesamt liegen also zwischen 0 und 1 die unendlich vielen Zahlen

$\frac{1}{2}$,
$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$,
$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$, usw.[72]

Ferner ist klar, dass die 1-tel-Zahlengerade ein genaues Abbild der Standard-Zahlengerade ist, weshalb *alle ganzen Zahlen spezielle rationale Zahlen sind*: Die ganze Zahl m entspricht der Bruchzahl $\frac{m}{1}$. Die Klasse $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stellt also eine Erweiterung der ganzen Zahlen dar. Es ist anschaulich klar, dass sich *selbst auf jeder noch so kleinen Strecke der Zahlengerade unendlich viele rationalen Zahlen befinden*. Daher scheint es auf den ersten Blick unglaublich zu sein, dass es außer den rationalen Zahlen auf der Zahlengerade noch weitere Punkte geben könnte, also solche, die von keiner Bruchzahl $\frac{m}{n}$ mit ganzzahligem m und natürlichzahligem n erfasst werden. Die ersten dieser sog. *irrationalen Zahlen* wurden von griechischen Mathematikern zur Zeit des PYTHAGORAS (um 500 v. Chr.) entdeckt.[73] Berühmte Beispiele sind die Zahlen $\sqrt{2}$ (die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat), die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π. So kann man die Punkte der Zahlengerade in rationale Zahlen und irrationale Zahlen einteilen. Zusammen heißen sie die *reellen Zahlen*:

2.3.7 Erklärung Mit $\mathbb{R}$ wird die Klasse *aller* Punkte der Standard-Zahlengeraden bezeichnet. Diese Punkte heißen *reelle Zahlen*, und zwar die rechts von 0 liegenden *positive* und die links von 0 liegenden *negative* reelle Zahlen. Eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist, heißt *irrational*.

Wie wir sehen werden, gibt es unendlich viele irrationale Zahlen:[74] Ähnlich wie beim Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ „unendlich viele“ negative ganze Zahlen hinzukommen, und beim Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ „unendlich viele“ Bruchzahlen, so muss man also auch $\mathbb{Q}$ wieder um „unendlich viele“ irrationale Zahlen ergänzen, um $\mathbb{R}$ zu erhalten. Dabei gibt es sogar „wesentlich mehr“ irrationale als rationale Zahlen.[75] Dies kann natürlich erst dann präzisiert und verifiziert werden, nachdem wir exakte Kriterien für den Größenvergleich unendlicher Klassen zur Hand haben werden.[76]

Die **Beispiele 8–9** für Unendlichkeiten, die Gedanken, Dinge und Attribute betreffen, führen uns wieder von der Mathematik weg und stellen uns die Aufgabe, zu klären, was wir unter „Denken“ und „Sein“ verstehen. Das geschieht in den nächsten beiden Kapiteln 3 und 4.

---

[71] $n-1$ bezeichnet die ganze Zahl, die der Zahl n unmittelbar links benachbart ist.

[72] Hier kommen manche Bruchzahlen mehrfach vor, z. B. ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Trotzdem sind es unendlich viele, da die Bruchzahlen derselben Zeile stets voneinander verschieden sind und die Zeilen immer länger werden.

[73] Siehe S. 59.

[74] Siehe Theorem 5.21.26 S. 276.

[75] Siehe Theorem 5.21.26 S. 276.

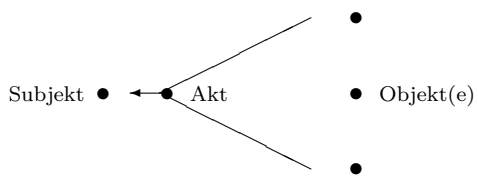
[76] Siehe Abschnitt 5.15.

3 Theorie des Denkens

Subjekt, Objekt und Akt des Erkennens

Beim *Erkennen* ist Folgendes auseinanderzuhalten:

1. das *Subjekt* des Erkennens (der Erkennende)
2. das *Objekt* oder die *Objekte* des Erkennens (das Erkannte)
3. der *Akt* des Erkennens (die Tätigkeit des Erkennens selbst)



Das *Subjekt* oder der Erkennende ist nicht das ganze *Lebewesen* mit seinem eventuell vielgliedrigen Körper, sondern der *Ausgangspunkt* des Erkenntnisaktes (und damit zusammenhängender anderer Akte). Gemeint ist das erkennende *Zentrum* des Lebewesens, das wir auch seine *Seele* oder sein *Ich* nennen können.[1]

Thematisches und unthematisches Erkennen

Wenn ich etwas erkenne, nehme ich nebenbei immer noch etwas anderes wahr: den Akt des Erkennens und damit verbunden auch mich selbst (d. h. ich habe mehr oder weniger stark das *Bewusstsein*, zu erkennen und zu sein). Dieses das Erkennen des eigentlichen Objekts begleitende Erkennen heißt *unthematisches* Erkennen, im Gegensatz zu dem Erfassen des eigentlich erkannten Objekts, welches *thematisches* Erkennen heißt.[2] Außer dem Ich und seinem Erkenntnisakt können beim Erkennen auch andere Objekte auf unthematische Weise miterkannt werden. Wenn man im alltäglichen Leben mit „etwas“ beschäftigt ist, so ist sowohl dieses Etwas als auch das darauf bezogene Tun meist nur unthematisch gegeben und wird erst durch einen eigenen Akt des Aufmerkens zum thematischen Objekt. Man kann also das Gesamtobjekt immer in zwei Teile aufteilen: das thematisch erkannte, eigentliche *Hauptobjekt* und das unthematisch miterkannte *Nebenobjekt*.

---

[1] Vgl. auch Abschnitt 10.1. Nach der Lehre des Thomas von Aquin umfasst das Ich des Menschen neben der Seele auch seine Körpermaterie wesensmäßig. Auf diese mit den diffizilen Fragen der Individuationstheorie zusammenhängende Schlussfolgerung sei hier nicht weiter eingegangen. Ihre Berechtigung vorausgesetzt, könnte man dennoch die Seele als den für das Selbstbewusstsein ausschlaggebenden, höheren Teil des Ich ansehen und im Sinne einer nominatio partis nobilior pro toto als Ich bezeichnen.

[2] Die Unterscheidung zwischen unthematisch und thematisch Erkanntem taucht schon bei Husserl auf (vgl. Husserl, *Ideen* § 31 S. 51) und wurde von Heidegger übernommen, der unter der „Thematisierung“ eine Objektivierung versteht („Thematisierung objektiviert“) in dem Sinn, dass sich thematisierte Seiende „dem puren Entdecken ‚entgegenwerfen‘“. (Heidegger, *Sein und Zeit* § 69 S. 363). Auch Dietrich von Hildebrand griff diesen Begriff auf und sprach von verschiedenen Stufen der „Thematizität“ (Hildebrand, *Philosophy* S. 50–51).

Sinnliches und geistiges Erkennen oder Denken

Akte des Sehens, Hörens, Riechens, Schmeckens und Tastens sind deutlich voneinander verschiedene Arten des Erkennens. Sie unterscheiden sich dadurch, dass sie jeweils nur auf Objekte bestimmter Art zielen können (nämlich das Sichtbare, das Hörbare usw.) und noch „handgreiflicher“ dadurch, dass sie durch verschiedene Organe vermittelt werden. Sie haben aber die gemeinsame Eigenschaft, dass man mittels dieser Akte nicht *reflektieren*, d. h. das Erkennen als solches thematisch erkennen kann. Diese Unfähigkeit zur Reflexion ist, wie wir im Anschluss an Locke sagen können, charakteristisch für das so genannte *sinnliche Erkennen*.[3]

Im Gegensatz zu den sinnlichen Erkenntnisakten steht eine andere Art des Erkennens, das *geistige Erkennen* (auch *Verstehen* oder *Denken* genannt).[4] Mit einem Akt geistigen Erkennens kann man das Erkennen als solches (insbesondere das eigene Erkennen und damit auch das eigene Selbst) thematisch erkennen, und daher auch wenigstens abstrakt *Erkenntnisakte jeder Art betrachten*. Aus diesem Grund kann sich ein Akt geistigen Erkennens schließlich auch auf alle Objekte richten, auf die sich andere Erkenntnisakte richten können, so dass *alles Erkennbare im Prinzip auch geistig erkennbar* (denkbar) ist, also das Denken unter allen Formen des Erkennens den größten Gegenstandsbereich hat.

Weil ein Subjekt, das geistig erkennen kann, sich selbst thematisch erkennen kann, sagt man, dass es ein *Selbstbewusstsein* oder *Ich-Bewusstsein* hat. Dagegen kann ein Subjekt, das nur sinnlich erkennen kann, sich nur unthematisch erkennen. Es hat ein *Bewusstsein*, das kein Selbstbewusstsein oder persönliches Ich-Bewusstsein im eigentlichen Sinn ist.[5]

Reflexion und fortgesetztes Erkennen des Erkennens.

Aus dem Vorhergehenden ergab sich: Ein geistig erkennendes Subjekt kann reflektieren, d. h. seinen Erkenntnisakt thematisch auf den eigenen Erkenntnisprozess richten: Ist E mein Erkenntnisakt, kann ich im reflektierenden Erkennen E selbst thematisch erkennen, wobei ich mich dazu allerdings eines *anderen* Erkenntnisaktes E' bedienen muss, dessen ich mir nur unthematisch bewusst bin, und der daher von E verschieden ist. Doch auch dem Erkenntnisakt E' kann ich mich wieder thematisch zuwenden, was durch einen dritten Erkenntnisakt E'' geschehen muss, der von E und E' verschieden ist usw. Für die sich so ergebende endlose Kette von Erkenntnisakten

$$E, E', E'', E''', \ldots$$

gilt, *dass der Inhalt jedes folgenden Erkenntnisaktes in dem jeweils vorhergehenden Erkenntnisakt besteht, während kein Erkenntnisakt einen der folgenden beinhaltet.* Nun kann ich aber diese bereits „unendliche“ Kette der fortgesetzten Reflexionen noch weiter verlängern, was man eine „Verlängerung ins Transfinite“ nennt.[6] Denn ich kann offenbar durch einen neue Erkenntnisakt E_ω die ganze vorgenannte endlose Kette von Erkenntnisakten thematisch anschauen. Und *diesen* Erkenntnisakt E_ω erkenne ich thematisch abermals durch einen *neuen* Erkenntnisakt E'_ω, so dass sich ein neuer endloser „Kettenabschnitt“ von Erkenntnisakten

$$E_\omega, E'_\omega, E''_\omega, \ldots$$

[3] Für Locke sind „sensation“ und „reflexion“ die beiden wesentlichen Erkenntnisarten (siehe Abschnitt 8.11.6).

[4] Im engeren Sinn ist Verstehen und Denken zu unterscheiden: Verstehen ist ein einfacher Akt geistigen Erkennens, Denken ist ein auf einem Akt des Verstehens aufbauender Akt, nämlich das Erfassen eines „weiterführenden“ Zusammenhangs, der ein Fortschreiten von einem Akt des Verstehens zum nächsten ermöglicht.

[5] Man könnte von einem unterpersönlichen *Es-Bewusstsein* sprechen.

[6] Dies hat auch der Philosoph und Logiker Gotthard Günther (1900–1984) gesehen, der jedoch im Gegensatz zur hier vorgestellten Konzeption nach der unendlichen Kette von Reflexionen nur noch eine einzige, letzte Reflexionsstufe der „totalen Selbstreflexion“ ansetzt (Günther, *Metaphysik* S. 19–43).

auftut, an den ich, sobald ich ihn als solchen erkenne, sogleich einen neuen endlosen Kettenabschnitt anhängen kann usw. Diese Überlegungen bekräftigen den Unendlichkeitsbeweis DEDEKINDs (siehe S. 18–19) und bauen ihn aus: Die Struktur des menschlichen Erkennens impliziert nicht nur eine einzige unendliche Kette, sondern unendlich viele solcher Ketten, und macht es *prinzipiell unmöglich*, die Gesamtheit *aller* möglichen Erkenntnisakte in einem einzigen Erkenntnisakt zu überschauen. Denn immer, wenn wir meinen, diese Gesamtheit mit einem Erkenntnisakt X in den Blick zu nehmen, fehlt in diesem Überblick X selbst, so dass die Gesamtheit nicht vollständig war. Es folgt also, dass die in unserem **achten Beispiel** genannte *Gesamtheit aller möglichen Erkenntnisakte* bzw. *aller möglichen Gedanken* nicht nur unendlich ist, sondern auf einer unvorstellbar hohen Stufe der Unendlichkeit liegt, indem sie nämlich völlig unüberschaubar und eigentlich unerkennbar zu sein scheint. Andererseits sprechen wir gerade eben über diese Gesamtheit und haben sie dann also doch irgendwie im Blick. Wir können aber auf diese Gesamtheit offenbar nur auf eine analoge Weise, nämlich unthematisch, nicht aber im eigentlichen Sinn (thematisch) hinschauen.

Die wesentliche Voraussetzung für diese Überlegungen ist, dass man einen Erkenntnisakt A immer nur durch einen *anderen* Erkenntnisakt B thematisch betrachten kann, nicht durch A selbst. Dies liegt an der Struktur menschlichen Erkennens, die SCHELLING in seinem *System des tanszendentalen Idealismus* analysiert hat: „das Ich kann nicht zugleich anschauen und sich anschauen als anschauend“.[7]

Übermenschliche Formen des Denkens

Wenn es einen widerspruchsfreien Erkenntnisakt Ω gibt, zu dessen thematischem Objekt *alles Erkennbare* gehört, so müsste auch Ω selbst zum thematischen Objekt von Ω hinzugehören und deshalb *rein thematisch* sein. Ein solcher Erkenntnisakt (wie man ihn, falls er widerspruchsfrei möglich ist, einem allwissenden Gott zuschreiben muss), wäre also nicht nur in Bezug auf den Umfang, sondern schon von seiner Struktur her völlig andersartig als die Erkenntnisakte, die wir selbst vollziehen. Bei einem solchen übermenschlichen, rein thematischen Akt des Erkennens wäre daher die Argumentation des vorhergehenden Abschnitts, wonach stets mindestens ein Objekt außerhalb des thematischen Gesichtskreises stehen muss (nämlich der Akt selbst) nicht mehr stichhaltig, und es scheint, dass ein mit rein thematischem Denken ausgestattetes Wesen auch jegliches Unendliche vollkommen klar und deutlich erkennen könnte. Dies ist zu beachten, wenn man die Worterklärung des erkenntnismäßig nicht Begrenzbaren präzisieren will: Man muss sich dabei explizit auf Formen „unseres Denkens“ beziehen.

Denkformen

Wenn zum Inhalt eines Erkenntnisaktes A ein anderer Erkenntnisakt B gehört, so gehört der Inhalt von B auch zum Inhalt von A, d. h. A beinhaltet dann *vermittelt durch* B auch all das, was B beinhaltet. Ich nenne nun Inhalte, die A *nur* auf vermittelte Weise beinhaltet, *indirekte* Inhalte von A. Dagegen sollen Inhalte, die A entweder *ganz ohne* oder jedenfalls *nicht nur* durch Vermittlung anderer Akte beinhaltet, *direkte* Inhalte von A heißen.[8]

Für spätere Zwecke (Einführung eines realen Modells der Mengenlehre) benötigen wir nun eine Gesamtheit von momentanen (d. h. in einem Augenblick vollzogenen, nicht aus sukzessiven Akten zusammengesetzten) Erkenntnisakten mit der Eigenschaft, dass keine zwei verschiedenen Erkennt-

[7] SCHELLING, *Idealismus* S. 106, Ausgabe Brandt/Müller S. 72.

[8] Man beachte, dass ein direkter Inhalt von A unter Umständen *zugleich* durch einen anderen Akt B vermittelt sein kann: A sei z. B. ein Vorstellungsakt, durch den man sich einen Baum vorstellt und *daneben* einen Menschen, der den Baum anschaut, also einen Erkenntnisakt B ausübt, dessen Inhalt derselbe Baum ist. Dann kommt der Inhalt „Baum“ in dem Erkenntnisakt A sowohl direkt als auch durch B vermittelt vor.

nisakte genau denselben direkten Inhalt haben. Hierzu müssen spezielle Erkenntnisakte ausgewählt werden. Im Allgemeinen können nämlich verschiedene Erkenntnisakte denselben thematischen Inhalt auch direkt beinhalten. Das kann zunächst daran liegen, dass der *unthematische Hintergrund* beider Akte verschieden ist, oder daran, dass ein verschiedener *Subjektbezug* vorliegt (indem beide Akte von verschiedenen Subjekten oder vom selben Subjekt zu verschiedenen Zeiten vollzogen werden), oder daran, dass beide Akte durch verschiedene *Vermögen* des Subjekts ausgeübt werden (indem der eine z. B. ein sinnlicher Akt des Sehens, der andere ein geistiger Akt des Nachdenkens über das Gesehene ist). Doch können wir versuchen, bei der Betrachtung eines konkreten Erkenntnisaktes von seinem Verwurzeltsein in einem unthematischen Hintergrund, in einem Subjekt und einem bestimmten Vermögen abzusehen (zu abstrahieren), und erhalten, wenn uns diese Abstraktion gelingt,[9] einen subjektlosen, zeitlosen und vermögensunabhängigen rein thematischen Erkenntnisakt. Genauer gesagt erhalten wir so die abstrakte „Form“ eines möglichen konkreten Erkenntnisaktes, die auch dann besteht, wenn der Akt von keinem konkreten Vermögen eines Subjekts ausgeübt wird. Solche „entwurzelten“ abstrakten Erkenntnisakte sind nicht zu verwechseln mit den im vorhergehenden Abschnitt spekulativ betrachteten übermenschlichen Erkenntnisakten, die schon auf der konkreten Ebene rein thematisch sind.

Betrachten wir nun zwei Erkenntnisakte mit demselben direkten Inhalt, die dem eben beschriebenen Abstraktionsniveau angehören, so können diese immer noch verschieden sein durch ihr Geprägtsein von nicht-inhaltlichen Merkmalen. Denn zum einen kann der Erkenntnisakt untrennbar mit Einstellungen (Absichten, Stimmungen) verwoben sein: dann werden die zum Inhalt gehörigen Objekte in bestimmter Weise angezielt (gewollt, erhofft, bestaunt, bezweifelt, gefürchtet, beurteilt, ausgesagt, befragt usw.). Ob wir überhaupt einen „neutralen“ Erkenntnisakt *ohne* solche Einstellungen ausüben können, ist zweifelhaft. Wahrscheinlich hat Heidegger recht: „Verstehen ist immer gestimmtes“.[10] Aber es kann möglicherweise gelingen, einen abstrakten Erkenntnisakt von solchen Gestimmtheiten zu reinigen, indem wir diese (durch weitere Abstraktion) einfach ausblenden. Zum anderen können sich die Erkenntnisakte gleichen direkten Inhalts auch durch die Art und Weise der Präsentation des Inhalts unterscheiden: Die Objekte können nämlich nicht nur anschaulich präsentiert werden, bisweilen steht uns vielmehr nur ein natürliches Symbol der Objekte anschaulich vor Augen, mittels dessen eine vermittelte Kenntnisnahme der Objekte stattfindet (imaginative Vermittlung).[11] Oder es ist anschaulich nur das Schriftbild eines Wortes oder auch einer komplizierten Beschreibung gegeben, wodurch wir eine vage Vorstellung der beschriebenen Objekts erlangen (signitive Vermittlung).[12] Gelingt es schließlich, auch von allen diesen nicht-inhaltlichen Merkmalen zu abstrahieren, so erhalten wir ein noch tieferes Abstraktionsniveau als zuvor, und auf diesem Niveau dürfte es gar keine zwei verschiedenen Erkenntnisakte mehr geben, die denselben direkten Inhalt haben. Für diese Erkenntnisakte schlage den Namen *Denkformen* vor:

Denkformen sind also Erkenntnisakte, die durch Abstraktion aus einem momentanen Denkakt (der uns bekannten Art) hervorgehen können, wobei von Subjekt, Zeit, Vermögen, Hintergrund, Einstellungen und Präsentationsweisen abstrahiert wird, so dass keine zwei Denkformen genau denselben direkten Inhalt haben.

---

[9] Dies muss nicht immer der Fall sein, denn es kann ja Inhalte geben, die so tief in einem Subjekt verwurzelt sind, dass sie sich daraus nicht lösen lassen.

[10] Heidegger, *Sein und Zeit* S. 142.

[11] So vermittelt uns zum Beispiel eine direkt angeschaute farbige Oberfläche indirekt die Kenntnis von der Vielheit aller auf ihr befindlichen Punkte.

[12] Auf diese Weise betrachtet man die meisten Objekte der abstrakten Mathematik. Zur signitiv und imaginativ vermittelten Wahrnehmung vgl. Husserl, *Ideen* § 43 S. 79.

4 Theorie der Objekte oder Ontologie

Da es nichts Allgemeineres gibt als das Seiende, kann das Seiende nicht durch Rückgriff auf etwas Allgemeineres definiert, sondern nur durch Zuordnung zu einem genauso Allgemeinen (nämlich zum Denken) und durch Einteilung erläutert werden. Die geschieht im folgenden Abschnitt. Im zweiten Abschnitt werden die „transzendentalen Gegebenheiten“ welche das Seiende als solches (und darum alle Seiende) betreffen, untersucht.

4.1 Definition und Klassifikation des Seienden

Ein *Seiendes* (synonym: *Objekt, Gegenstand, Gegebenheit, Sache, Daseiendes, Vorhandenes*) ist etwas *Denkbares*, das heißt ein dem denkenden Betrachter gegenüberstehen Könnendes.[1] Dagegen wird man vielleicht einwenden, es sei nicht einzusehen, weshalb es nicht auch „undenkbare“ Seiende geben könnte. Wäre der Ausschluss solcher Objekte nicht eine maßlose Überschätzung des (oder gar unseres) Denkens? Dieser Einwand verliert seine Plausibilität, wenn man sich klar macht, dass man nicht nur das Begreifbare und Widerspruchsfreie, sondern auch das Widersprüchliche denken kann. Hierzu gehört z. B. auch das „Nichts“ und selbst das „Undenkbare“, und somit wirklich alles. Widersprüchliche Objekte wie etwa das „runde Viereck“ sind anscheinend immer dann unserem Denken gegeben, wenn wir ein Urteil bilden wie: „Dieses x ist ein widersprüchliches Objekt“. Denn wenn dieser Satz etwas Wahres aussagt, sollte auch etwas gegeben sein, über das etwas ausgesagt wird: eben das widersprüchliche Objekt.[2] Ein wichtiges Beispiel für ein widersprüchliches Objekt ist auch das Nichts; in einer wirklich umfassenden Seinskonzeption ist es unumgänglich, auch das Nichts zum „Seienden“ zu rechnen. Denn auch das „Nichts“ erlangt ja offenbar, insofern wir darüber nachdenken, ein – wenn auch widersprüchliches – „Dasein“ in unserem Denken. Und selbst „unerkennbare Objekte jenseits alles Denkbaren“ (definiert als Gegenstände, die vollkommen unerkennbar sind), erscheinen im Widerspruch zu ihrer Definition im Denken, andernfalls würden wir gar nicht über sie diskutieren können. Schon in der Frage: „Gibt es Gegenstände, die niemand denken kann?“ lenken

[1] Dieses „Prinzip universaler Intelligibilität“ hat bereits Thomas von Aquin ausgesprochen: „quidquid enim esse potest, intelligi potest“ (*Summa Theologiae* Buch 2 cap. 98 nr. 9, Ausgabe Busa S. 59c). Die „Denkbarkeit“ ist auch nach dem Logiker Gotthard Günther für die klassische Logik das erste metaphysische Akzidens des Seins (vgl. Günther, *Metaphysik* S. 8).

[2] Diese Argumentation wurde am pointiertesten von Alexius Meinong (siehe S. 631) in seiner *Gegenstandstheorie* (1904) vorgelegt. Ihr stellte Bertrand Russell in seinem Artikel *On Denoting* (1905) die These entgegen, Sätze wie „Das runde Quadrat ist rund“ seien nicht sowohl wahr und falsch, sondern eindeutig falsch, denn sie seien zu verstehen als „Es gibt eine und nur eine Entität x, die rund und quadratisch ist, und diese Entität ist rund“ (Russell, *Denoting*, Ausgabe Marsh S. 54, Ausgabe Wiehl S. 286). Ausdrücke wie „das runde Quadrat“ bezeichnen nach dieser Interpretation gar nichts, und die damit gebildeten Sätze haben nur *kontextbezogen* einen Sinn. Lange Zeit war man überwiegend der Meinung, dass Meinong durch Russell endgültig widerlegt worden sei. Seit etwa 1960 ist jedoch die Diskussion darüber, wer von beiden, Russell oder Meinong, die tiefere Einsicht besessen hat, wieder in vollem Gang; besonders von Roderick Chisholm (1916–1999) wurde Meinong verteidigt (vgl. z. B. Chisholm, *Beyond Being* und Chisholm, *Meinong*). Eine „Meinong-Semantik“ scheint neben Russells Deutung ebenso annehmbar und zudem natürlicher zu sein (vgl. hierzu Josef Wehrles Einleitung zu Meinong, *Gegenstandstheorie* S. VIII–XXI). Denn die Existenzprämisse, die Russell Sätzen wie „das runde Quadrat ist rund“ vorschaltet, scheint insofern willkürlich zu sein, als damit nicht genau das wiedergegeben wird, was der schlichte Satz, so wie er gewöhnlich formuliert wird, ausdrücken will. Zur realistischen Deutung der Impossibilien siehe auch Abschnitt 4.2 und die Überlegungen zur Bedeutung bestimmter Impossibilien auf S. 97.

wir ja bereits unsere Gedanken auf diese Gegenstände hin, „geben“ sie unseren Denken vor und zwingen sie so, zu Denk-Objekten zu werden, die gerade dadurch, dass sie gedacht werden, ihren widersprüchlichen Charakter offenbaren. Da das Denken somit die erstaunliche Eigenschaft hat, sich sogar das Undenkbare zum Objekt zu machen, kann es wirklich nichts Umfassenderes geben als das Denkbare in jenem weitesten Sinn, der auch das Undenkbare mit einschließt. So besteht also eine vollkommene Kongruenz zwischen Denken und Sein, welche die Gleichsetzung des Seienden mit dem Denkbaren rechtfertigt.

Die grundlegenden Klassen des Seienden sind nun meines Erachtens folgende:

1. **Aktualitäten** (wirkliche Objekte)
   a) Substanzen
      i. rein geistige Personen
      ii. materiell-geistige Personen
      iii. unpersönliche Bewusstseinswesen
      iv. unbewusste Lebewesen
      v. unbelebte Substanzen
   b) wahre Sachverhalte
   c) Attribute wirklicher Objekte
   d) Universen und ihre Punkte
2. **pure Possibilien** (rein mögliche, widerspruchsfreie Objekte)
   a) Fiktionen
   b) Begriffe
3. **Impossibilien** (unmögliche, widersprüchliche Objekte)

Wie wir sehen werden, sind in diesem Schema die Klassen nach ihrer „Seinsmacht“ oder „Realität“ geordnet, wobei die Seinsmacht von unten nach oben hin zunimmt. Somit handelt es sich bei diesen Klassen zugleich um *Seins-Stufen*.[3] Im Folgenden werden diese Stufen von unten nach oben, also beginnend mit der Stufe der Impossibilien, im Einzelnen erläutert.

[3] Da die Klassen Seiende enthalten, die von ihrem Wesen her verschieden sind, aber dennoch gemeinsam haben, dass ihnen eine mehr oder weniger starke Seinsmacht innewohnt, kann man das hier vorgestellte ontologische System einen *Wesens-Pluralismus* bei gleichzeitigem *Seins-Monismus* nennen. Letztere Bezeichnung ist umso mehr gerechtfertigt, als das Sein (d. h. die Seinsmacht) allen Seienden im gleichen Sinne zuzukommen scheint, wenn auch in verschiedenem Maße (bei Gott beispielsweise, wie wir auf S. 763–764 sehen werden, im absolut unendlichem Maß), so dass man im Sinne von Duns Scotus sagen kann, der Seinsbegriff sei *univok* (siehe S. 162 mit Fußnote 415). Unser System unterscheidet sich also sowohl vom radikalen ontologischen Dualismus bzw. Pluralismus (der zwei bzw. mehr verschiedene Klassen von Seienden anerkennt, aber ihre Gemeinsamkeit im Sein nicht beachtet) als auch vom radikalen ontologischen Monismus (der keine objektiv bestehenden Wesensunterschiede zwischen den Seienden zulässt). Der hier zurückgewiesene *radikale ontologische* Dualismus sollte im Übrigen weder mit dem ebenfalls abzulehnenden *theologischen* Dualismus (siehe S. 677) noch mit dem durchaus plausiblen Dualismus *in der Philosophie des Geistes* (siehe Fußnoten 19 auf S. 778 und 27 auf S. 780) verwechselt werden.

4.2 Impossibilien

Die Impossibilien sind die auf S. 28–29 schon erwähnten widersprüchlichen Objekte, darunter das runde Viereck, das Nichts und das Undenkbare. Sie entstehen dadurch, dass nicht zusammenpassende, sich ausschließende Bestimmungen gewaltsam „zusammengedacht“ werden, was am klassischen Beispiel des runden Vierecks besonders deutlich wird.

Da diese Gegenstände nicht „von selbst“ zusammenstehen können, muss ihnen die Existenz (denk-unabhängiges Zusammenstehenkönnen) und erst recht die Wirklichkeit (denk-unabhängiges Wirken) abgesprochen werden. Man bezeichnet sie daher mit Recht als *unwirklich*, *nicht-existent*, und – das ist die stärkste Charakterisierung – *unmöglich*. Mit der scholastischen Philosophie spreche ich daher von *Impossibilien* (unmöglichen Objekten).

Wie ist das Verhältnis der Impossibilien zur Realität? *Realität* kann man mit Selbständigkeit und Unabhängigkeit umschreiben, *Realität im engeren Sinne* ist Selbständigkeit und Unabhängigkeit *gegenüber dem Denken* und steht der *Idealität* gegenüber, welche als Denk-Abhängigkeit bestimmt ist. Da etwas mehr oder weniger stark selbständig sein kann, sind diese Begriffe steigerungsfähig: Realität hat verschiedene Grade, wobei Grade zunehmender Realität Graden abnehmender Idealität entsprechen. Um zu betonen, dass *Realität* eine mit steigerungsfähiger Intensität versehene Größe ist, spreche ich auch von *Seinsmächtigkeit*.

Offenbar stehen Impossibilien auf der untersten Stufe der Seinsmächtigkeit oder Realität. Ich behaupte aber, dass ihre Seinsmächtigkeit nicht gleich Null ist, also ein minimales Maß von Denk-Unabhängigkeit auch hier gegeben ist. Denn Impossibilien sind nicht in jeder Beziehung reine Produkte des Denkens. Der Anteil des Denkens bei der Setzung der Impossibilien besteht darin, widersprüchliche Bestimmungen zusammenzusetzen, aber das „Ausgangsmaterial“ hierzu (z. B. „rund“ und „Viereck“ als Elemente des runden Vierecks, oder „nicht“ und „Sein“ als Elemente des Nichts = des nicht Seienden), sind dem Denken vorgegebene Elemente, werden also von ihm nicht produziert, sondern entdeckt. Ein widersprüchliches Seiendes ist also zwar *in seiner Konstitution* vollkommen vom Denken abhängig – d. h. die Zusammensetzung als solche kann nur im Denken vorkommen –, aber ungeachtet dessen ist es wie jedes Seiende *fundamentaliter*, d. h. in den Bestandteilen seiner Zusammensetzung, denk-unabhängig.

4.3 Pure Possibilien

4.3.1 Possibilien

Alle Objekte, die nicht widersprüchlich sind, heißen *widerspruchsfreie* oder *mögliche Objekte* oder *Possibilien*. Die Possibilien stehen auf einer höheren Stufe der Realität als die Impossibilien, weil sie nicht nur *fundamentaliter* (in den Bestandteilen der Zusammensetzung), sondern auch *konstitutionsmäßig* (bezüglich der ganzen Zusammensetzung) denk-unabhängig sind. Denn insofern unser Denken die „Kraft“, welche die Bestimmungen des rein möglichen Objekts zusammenhält (nämlich die Widerspruchslosigkeit) in keiner Weise *produziert* oder *erfindet*, sondern *entdeckt*, können wir auch sagen, dass wir die möglichen Objekte „im Reich der Möglichkeiten als dort feststehende Gegebenheiten als Ganzes vorfinden oder entdecken“. Die Denkunabhängigkeit der möglichen Objekte geht so weit, dass sie zweifellos im erwähnten Reich der Möglichkeit *weiterhin sein würden, wenn niemand an sie denken würde*: Denn konstitutiv für sie als Möglichkeiten ist bloß, widerspruchsfrei *gedacht werden zu können* (nicht, tatsächlich *gedacht zu werden*). Bedenkt man dies, so muss man allen Possibilien *Existenz* zuschreiben, insofern dieses Wort ein „Dasein außerhalb des tatsächlichen Denkens“ bezeichnet.

An dieser Stelle gilt es, dem skeptischen Haupteinwand gegen jede realistische Philosophie zu begegnen: Wenn das Seiende das Denkbare ist, ist es dann überhaupt möglich, dass ein Seiendes in nicht-widersprüchlicher Weise außerhalb des Denkens – unabhängig von ihm – auftritt? Als Antwort kann man darauf verweisen, dass wir unser Ich und dessen Denken selbst denkend betrachten und von anderem unterscheiden können, also offensichtlich aus uns selbst und unserem Denken gewissermaßen „heraustreten können“. *Wie* das möglich ist, bleibt zwar rätselhaft, aber die Tatsache, *dass* es möglich ist, scheint gerade eines der charakteristischen Merkmale zu sein, wodurch sich denkende Wesen von nicht-denkenden, aber dennoch erkennenden Wesen unterscheiden. Es ist also zwar nicht auf widerspruchsfreie Weise möglich, etwas zu denken, was kein Gegenstand des Denkens ist, wohl aber können wir unter Umständen einen *im* Denken vorgefundenen Gegenstand erkennen *als* von außen kommend, *als* mehr oder weniger denk-unabhängig. Und wie wir gesehen haben, ist sogar alles Seiende mehr oder weniger vom Denken unabhängig in dem Sinne, dass es nicht vollständig vom Denken produziert ist.

Die Possibilien kann man grundlegend einteilen in solche, die *wirklich* sind, d. h. *wirken*, und solche, die nicht wirken und daher als *unwirklich* bezeichnet werden können. Erstere heißen *Aktualitäten* oder Wirklichkeiten, letztere *pure Possibilien* oder reine Möglichkeiten. Einige charakteristische Beispiele für Aktualitäten sind in der Vergangenheit, Gegenwart oder Zukunft handelnde Personen und ebenso dort auftretende Körper, außerdem deren Eigenschaften und wirklich bestehende Sachverhalte. Beispiele für pure Possibilien wären einerseits Begriffe wie die Farbe „rot an sich“ und andererseits Fiktionen wie z. B. erdachte Personen und Körper, erdachte Eigenschaften und „kontingent falsche Sachverhalte“: Sachverhalte, die in Wirklichkeit zwar nicht bestehen, aber hätten bestehen können.

Um den Unterschied zwischen Aktualitäten und puren Possibilien besser zu verstehen, müsste man versuchen zu erklären, was Wirken bedeutet. *Wirken* (synonym: Tätigkeit, Aktivität) ist aber wie das Sein selbst eine *Grundgegebenheit*, ein *Urphänomen*, das man nicht vollständig auf anderes zurückführen kann. Derartige Phänomene können grundsätzlich nur erklärt werden durch Anleitungen, in welcher Richtung man zu suchen hat, um die Gegebenheit selbst wahrzunehmen; eine solche Anleitung kann etwa in der Angabe von Synonymen, Beispielen und Gegenbeispielen bestehen. In diesem Sinne kann man erklären, dass das Wirken (synonym: tätig sein, aktiv sein) darin besteht, dass das Objekt in einen höheren (kräftigen, entfalteten, bedeutsamen, Gültigkeit und Anerkennung fordernden) Seinsmodus eintritt oder in einem solchen Seinsmodus verharrt. Das Gegenteil besteht in der „kraftlosen“ Existenz, die wir unwirklichen Seienden zuschreiben. Wirken kann auch dadurch beschrieben werden, dass der Wirkende das Sein nicht nur „hat“, sondern in irgendeiner

Form auch „gibt“ (z. B. indem es das Sein sich selbst oder anderen Objekten zu erkennen oder zu spüren gibt). Beispiele für das Wirken von *Körpern* wären Äußerungen der eigenen Macht im Beeinflussen anderer Körper, indem diese z. B. beschleunigt, erwärmt, zerteilt werden usw. Beispiele für das Wirken von *Personen* wären ihr Denken und Wollen. *Eigenschaften* von Personen und Körpern wirken, indem sie andere Eigenschaften hervorrufen oder den Eigenschaftsträger erkenntlich machen (Farben machen die gefärbten Gegenstände gegenüber sinnlich erkennenden Subjekten kenntlich, Taten offenbaren den Charakter der wirkenden Person usw.), *Sachverhalte* wirken schließlich, indem sie andere Sachverhalte ermöglichen oder hervorrufen.

Nicht nur die Aktualitäten, sondern alle Objekte überhaupt haben einen wesentlichen Bezug zur Wirklichkeit (zum Wirken), aber der Unterschied ist, dass die Aktualitäten *selbst* wirken können, während die übrigen Objekte mit der Wirklichkeit nur dadurch in Berührung kommen können, dass sie als Objekte des Erkennens auftreten, so dass sie *passiv durch das Wirken* anderer Objekte (nämlich durch deren Erkennen) in einen entfalteten Seinsmodus gebracht werden, denn durch dieses Erkennen werden sie gewissermaßen „hervorgerufen“ und zur Geltung gebracht.[4] Für jedes Objekt gibt es also ein grundlegendes „Dasein“ und einen höheren Modus der Seinsentfaltung, wobei die einen Objekte (nämlich die Impossibilien und puren Possibilien) nur dadurch in ihren höheren Seinsmodus gelangen, dass sie von *anderen* erkannt werden, während die Aktualitäten *sich von sich aus entfalten* können, was man „Wirken“ nennt. Wirken ist daher dasselbe wie *aktive* Seinsentfaltung oder Selbstentfaltung.

Kehren wir nun zu den *puren* Possibilien zurück. Diese werden, wie wir sahen, durch Denkakte „hervorgerufen“. Dies geschieht nun entweder analytisch (d. h. indem Attribute eines schon vorhandenen Objekts isoliert betrachtet werden) oder synthetisch (d. h. indem ein Objekt durch Zusammenstellung anderer Objekte konstruiert wird). Im ersten Fall spreche ich von einem *Begriff* (oder einer *Idee*), im zweiten von einer *Fiktion*, so dass sich pure Possibilien in Begriffe und Fiktionen einteilen lassen. Zur genaueren Erklärung der Begriffe und Fiktionen sind nun allerdings einige Vorüberlegungen notwendig, die im nächsten Abschnitt erfolgen.

4.3.2 Attribute eines Seienden

Ein *konkretes Attribut* (synonym: konkretes Prädikat) eines Objekts X kann man definieren als ein Objekt A, für welches der Satz ≪(dieses bestimmte) X ist (dieses bestimmte) A≫ einen wahren Sachverhalt beschreibt.[5] Man betrachte folgende Beispiele:

(0) Sokrates ist Sokrates,
(1) Sokrates ist (dieser) Mensch,
(2) Sokrates ist (dieses) Lebewesen,
(3) Sokrates ist (dieses) vernunftbegabt(e Seiende),
(4) Sokrates ist (dieses) am Tag T nachdenkend(e Seiende),
(5) Sokrates ist (dieses) während seiner Dialoge umhergehend(e Seiende),
(6) Sokrates ist (dieses) von Platon verschieden(e Seiende),
(7) Sokrates ist (dieses) am Tag T klüger als Platon (Seiende),
(8) Sokrates ist (dieses) von Platon erkannt(e Seiende).

[4] Dieses Hervorgerufenwerden ist nicht nur für Impossibilien, sondern auch für pure Possibilien gewissermaßen der einzige Weg, auf dem ihr Sein zur vollen Entfaltung kommt. Denn angenommen, es gäbe eine Farbe, die weder in der Wirklichkeit vorkommt noch jemals in der Phantasie imaginiert wird, so wäre sie zwar trotzdem aufgrund ihrer bloßen Imaginierbarkeit außerhalb des Denkens existent, existierte aber gewissermaßen nur als ein Schatten ihrer selbst. Ein ebenso schattenhaftes Dasein würden mögliche Taten führen, die weder wirklich vollbracht, noch jemals in Erwägung gezogen werden.

[5] Diese Sätze sind streng zu unterscheiden von Sätzen der Form: ≪(dieses bestimmte) X ist (ein unbestimmtes) B≫ und ≪(ein unbestimmtes) X ist (ein unbestimmtes) B≫. Siehe hierzu Abschnitt 4.3.3.

Die mit den hier vorkommenden Prädikaten „Sokrates“, „Mensch“, „Lebewesen“ usw. gemeinten Objekte (sein Sokratessein, Menschsein, Lebewesensein usw.) sind konkrete Attribute von Sokrates; diese sind von den eventuell gleich lautenden konkreten Attributen eines anderen Objekts zu unterscheiden. Das durch „ist“ bezeichnete Verhältnis eines Objekts zu einem seiner Attribute bedeutet nur selten die unterschiedslose Identität, die der Mathematiker mit dem Zeichen = ausdrückt (hier nur in Beispiel (0)). Meist handelt es sich um eine Beziehung ganz eigener Art, die meines Erachtens zu den Urphänomenen zählt, die nur vage beschrieben und durch Beispiele und Gegenbeispiele verdeutlicht werden können. So bedeutet «dieses X ist dieses A», dass A an der *seinsmäßigen* Konstitution des Objekts X beteiligt ist, die nichts mit der räumlichen oder zeitlichen Zusammensetzung des Objekts zu tun hat: Das Menschsein ist weder ein räumlicher noch ein zeitlicher Ausschnitt des Sokrates (wie es sein Kopf oder seine Kindheit wäre), sondern ein seinsmäßiger: ein Ausschnitt von all dem, was Sokrates eben „ist“. Ich teile nun die Attribute in vier verschiedene Arten ein:[6]

1. Einige Attribute kommen dem Objekt notwendigerweise zu, *unabhängig von seiner Entfaltung im Wirken*, und charakterisieren daher das unentfaltete Sein des Objekts. Diese nenne ich *essentielle Attribute* oder *Wesensattribute*. So gehören das Sokratessein, Menschsein, Lebewesensein und Vernünftigsein zu den essentiellen Attributen des Sokrates (Beispiele (0) bis (3)). Die Gesamtheit der essentiellen Attribute heißt das *physische Wesen* des Objekts.[7]

2. Andere Attribute charakterisieren das, was das Objekt „über das eigene Selbst hinaus“ ist, und zwar durch seine Entfaltung im eigenen Wirken. Sie heißen *akzidentielle Attribute*. Indem Sokrates zu einer bestimmten Zeit nachdachte oder umherging (Beispiele (4) und (5)), trat er in einen höheren Seinsmodus, der auch hätte fehlen können. Daher beschreiben diese Attribute Ergänzungen, die den vollständig bestimmten Sokrates weiter ausgestalten und entfalten. Besonders deutlich ist das bei den *Wirkakten*: den akzidentiellen Attributen, die direkt den Vollzug einer Handlung aussagen (wie „nachdenken“ oder „herumlaufen“), aber auch bei den *Wirkvermögen*, welche erworbene Fähigkeiten zu diesen Akten benennen (wie „rational“ oder „geschickt“) und bei den *ausgestaltenden Akzidentien* (wie „weiß“ oder „krummnasig“).

Hier ist vorab auf ein Problem der Gotteslehre hinzuweisen. Die rationale Theologie beschreibt Gott als ein Wesen, das immer im Modus voll entfalteter Wirklichkeit existiert und somit keine akzidentiellen Attribute hat. Anderseits schreiben die Religionen Gott eine *freies Wirken* zu, so dass er hätte anders wirken können, als er tatsächlich wirkt. Müsste dann aber sein Wirken nicht doch durch akzidentielle Attribute charakterisiert sein? Nur dann, wenn man die oft gehegte Vorstellung hat, dass akzidentiellen Attribute grundsätzlich den *veränderlichen* Teil eines Objekts ausmachen, während die essentiellen das *Gleichbleibende* am Objekt charakterisieren. Demgegenüber geht nach der hier vorgestellten Konzeption nicht *jede* Veränderlichkeit, sondern nur die *Veränderlichkeit hinsichtlich der Intensität der Seinsentfaltung* auf akzidentielle Attribute zurück. Gott aber ist so zu denken, dass er notwendigerweise, was immer er tut, im Status der größten möglichen

[6] Siehe auch Abschnitt 4.4.4.

[7] Unter dem (oder einem) *metaphysischen Wesen* von X versteht man dagegen einen *möglichst kleinen* Teil des physischen Wesens: eine Gesamtheit M essentieller Attribute, mit der man das Objekt *definieren* kann, und zwar so, dass aus dem Vorhandensein der in M zusammengestellten Wesensattribute das Vorhandensein aller übrigen notwendig folgt und *auf möglichst leichte Weise* einsichtig gemacht werden kann. Das metaphysische Wesen ist also kurz gesagt so etwas wie ein „ausgezeichnetes Charakteristikum“ des Objekts. Beim Menschen bestünde das metaphysische Wesen aus den beiden Attributen des Vernünftigseins und des Sinnenwesenseins, wenn die klassische Definition „der Mensch ist ein vernünftiges Sinnenwesen“ zutrifft (vgl. hierzu Abschnitt 4.4.5). Im Gegensatz zur scholastischen Tradition muss man wohl sagen, dass ein und dasselbe Objekt mehrere metaphysische Wesen haben kann, da es oft mehrere „gleich gute“ Definitionen derselben Sache gibt (Beispiel: das Dreieck ist eine „zusammenhängende ebene Figur mit drei Seiten“ und auch eine solche „mit drei Ecken“). Vom physischen und vom metaphysischen Wesen ist noch das später zu behandelnde *transzendentale Wesen* zu unterscheiden (siehe S. 50).

Seinsentfaltung und intensivsten Wirklichkeit ist – was er tut, tut er stets mit ganzer Kraft – und daher *fällt bei ihm die Unterscheidung zwischen essentiellen und akzidentiellen Attributen weg, ohne dass dadurch auch seine Freiheit im Sinne alternativer Wirkmöglichkeiten wegfallen müsste.*

Zum Unterschied zwischen akzidentiellen und essentiellen Attributen ist noch Folgendes zu bemerken. Zunächst scheint dieser Unterschied kein absoluter zu sein: Er hängt davon ab, welches Objekt wir als den „Träger" betrachten wollen. Nimmt man z. B. als Attributenträger X Sokrates, so ist dessen Menschheit essentiell, während sein Schlafendsein ein akzidentielles Attribut ist. Denkt man sich aber als Träger eine neues Objekt X^+, das *die Zusammensetzung aus Sokrates und seinem Schlafen* sein soll („schlafender Sokrates"), so wäre das Schlafendsein ein essentielles Attribut von X^+. Geht man andererseits zur Betrachtung des *Menschseins* X^- des Sokrates über und betrachtet dieses als Träger von Attributen, so ist das Sokratessein (= Sokrates selbst) ein akzidentielles Attribut von X^-, weil es den Charakter einer verwirklichenden Entfaltung von X^- hat. Nun ist aber offenbar die Betrachtung von X^+ (Sokrates plus Zustand des Schlafens) oder von X^- (Menschheit des Sokrates allein) irgendwie willkürlich und unnatürlich: X^- hat den Charakter eines unvollständigen Seienden, während X^+ als ein willkürlich erweitertes, übervollständiges Seiendes erscheint, und X allein ist ein natürlich gegebenes, *vollständiges Seiendes*. Genauer können wir ein *vollständiges* Seiendes definieren als ein solches, das

(1) weder ein Sachverhalt ist,
(2) noch eine willkürliche Zusammenstellung anderer Objekte (wie „schlafender Sokrates"),
(3) noch ein willkürlicher Ausschnitt eines anderen Objekts (wie „Sokrates' Menschheit").

Vollständige Objekte sind also wegen (1) keine Sachverhalte über Objekte, sondern Objekte, die Sachverhalten zugrunde liegen, und wegen (2) und (3) sind es natürliche Ausgangspunkte für Synthesen und Analysen, aber nicht deren Produkte. Ferner sind vollständige Objekte widerspruchsfrei (keine willkürliche Zusammenstellung). Dennoch müssen sie als solche noch nicht in der Wirklichkeit auftreten, können also pure Possibilien sein. Durch den Bezug auf vollständige Objekte können wir nun im absoluten Sinn von akzidentiellen und essentiellen Attributen reden: Die essentiellen Attribute vollständiger Seiender sind *essentielle Attribute im absoluten Sinn* (die man auch *Essenzen* nennt), und die akzidentiellen Attribute vollständiger Seiender *akzidentielle Attribute im absoluten Sinn* (die man auch *Akzidentien* nennt).

3. Neben akzidentiellen Attributen gibt es noch eine weitere Art von Attributen, die ebenfalls beschreiben, was das Objekt „über das eigene Selbst hinaus" ist, aber nicht durch eigenes Wirken, sondern vermittelt durch das Erkanntsein. Diese nenne ich *jenseitige Attribute*: z. B. ist das „durch Platon Erkanntsein" (Beispiel (8)) ein jenseitiges Attribut des Sokrates. An das „Erkanntsein" selbst können sich noch weitere jenseitige Attribute anschließen, z. B. das „Geliebtsein", das „Diskutiertwerden" usw. Die jenseitigen Attribute eines Objekts X gehören nicht so sehr zu X selbst, sondern eher zu den Subjekten, die X erkennen.

4. Schließlich scheint es noch eine vierte Art von Attributen zu geben: *relative Attribute* oder *Relationen*, welche Beziehungen des Objekts zu sich selbst oder zu anderen Objekten sind (Beispiele (6) und (7)). Diese beschreiben weder das Wesen noch seine individuelle Entfaltung, sondern kennzeichnen eher den Beitrag, den das Objekt für das Wesen und die Entfaltung des Universums aller Dinge leistet. Insbesondere wäre es darum nicht angemessen, Relationen als besondere Art akzidentieller Attribute zu betrachten. Zwar gibt es Relationen, die sich aus dem Wirken ergeben (wie Sokrates' Klügersein als Platon), aber auch solche, die eher auf der essentiellen Seite des Objekts stehen, da sie ihm „notwendigerweise" zukommen, wie etwa Sokrates' Verschiedensein von Platon oder sein Nichtverschiedensein von sich selbst. So ist es am besten, Relationen als eine eigene Klasse von Attributen zu betrachten.

4.3.3 Begriffe (oder Ideen) und Fiktionen

Wenn man ein Objekt X möglichst „rein“ betrachten will, muss man versuchen,

1. X aus seiner eventuell existierenden raum-zeitlichen Region herauszulösen, und
2. aus X alle konkreten Attribute zu entfernen, für die das möglich ist,

so dass man wenn möglich nur noch die essentiellen Attribute von X betrachtet. Dieser Vorgang der „Abtrennung“ eines Objekts X aus seinem natürlichen Kontext ist das, was man eine *Abstraktion* oder *Ideation* nennt. Zum Beispiel kann man von einem konkreten Erkenntnisakt ausgehen, der ein Objekt x beinhaltet. Es ist dann das „x Beinhalten“ ein Attribut dieses Aktes. Löst man dieses Attribut von allem Beiwerk ab, erhält man als Ergebnis eine „Denkform“ (auf S. 26–27 habe ich beschrieben, was bei dieser Abstraktion im Einzelnen ausgeschaltet werden muss). Das Ergebnis einer solchen Abstraktion ist nun aber nicht, dass man wirklich nur noch X betrachtet, denn X *ist* in seine konkreten Attribute eingebettet, das abgetrennte oder „abstrahierte“ Objekt aber ist genau dies *nicht*, also unterscheiden sie sich. Man bekommt daher durch Abstraktion ein neues Objekt X^*, das in engem Zusammenhang mit dem alten Objekt X steht, und das man „X an sich“ oder „den Begriff von X“ oder „die Idee von x“ nennt.

Durch Abstraktion erhebt sich also das Denken zur Schau einer neuen Klasse von Objekten, den *Begriffen* oder *Ideen* (synonym: *abstrakten Attributen* oder *abstrakten Prädikaten*). Diese stehen auf einer ganz anderen Ebene als die zuvor betrachteten, aus denen man sie abstrahiert: Es fehlt ihnen jegliche räumliche und zeitliche Dimension, sie sind vom Wirken abgeschnitten, d. h. unwirklich (und daher, falls sie widerspruchsfrei sind, pure Possibilien), aber sie repräsentieren gewisse Inhalte in Reinform. Begriffe oder Ideen zerfallen in zahlreiche interessante Unterklassen (neben abstrakten Essenzen von Substanzen wie „das Menschheit an sich“ gehören auch Zahlen, Mengen und ideale geometrische Formen dazu, ferner ideale ethische Werte wie „das Gute an sich“, ideale ästhetische Qualitäten usw.)[8] Wie man durch Abstraktion einen Begriff erhält, so kann man durch den umgekehrten Vorgang, die *Konkretion*, von einem Begriff wieder zu einem konkreten Objekt übergehen, z. B. von der „Menschheit an sich“ zur konkreten Menschheit des Sokrates. Hier gibt es aber oft mehrere Möglichkeiten: Man kann von der Menschheit an sich auch zur konkreten Menschheit des Platon übergehen. All diejenigen Attribute, in welche ein Begriff durch Konkretion übergehen kann, heißen seine *Instanzen* oder die „unter den Begriff fallenden“ Objekte. Die Gesamtheit aller Instanzen eines Begriffs heißt sein *Umfang*. Wie die Namen *konkreter Attribute* A als Prädikate in Sätzen der Form «dieses bestimmte X ist dieses bestimmte A» auftauchen, stehen Namen von *Begriffen* B als Prädikate in Sätzen der Form «dieses bestimmte X ist ein unbestimmtes B».[9] Diese Sätze drücken aus, dass *eine Instanz des Begriffs B ein konkretes Attribut von X ist*. Namen für Begriffe stehen außerdem in Sätzen der Form «ein unbestimmtes B_1 ist ein unbestimmtes B_2» sowohl an Stelle des Subjekts wie auch des Prädikats.[10] Solche Sätze drücken aus, dass *alle Instanzen von B_1 auch solche von B_2 sind*.

Alle von den Begriffen verschiedenen puren Possibilien nenne ich *Fiktionen*. Diese werden im Denken nicht wie die Begriffe analytisch (nämlich durch Abstraktion), sondern synthetisch (durch Zusammenstellung) hervorgerufen. Zu den Fiktionen gehören

- falsche Sachverhalte, die hätten wahr sein können (z. B. dass Napoleon die Schlacht von Waterloo gewann) und deren konkrete Attribute,

[8] Man beachte, dass die zu Ideen führenden Abstraktionen nicht alle von sinnlich wahrnehmbaren Substanzen ausgehen. Sie können auch von nur geistig erfassbaren Wirklichkeiten ausgehen, indem sie z. B. Aspekte des Wesens Gottes sind. Letzteres scheint etwa bei der Idee des „Guten an sich“ der Fall zu sein.

[9] Beispiele: «Sokrates ist ein Mensch» oder «Sokrates ist ein Lebewesen».

[10] Beispiel: «ein Mensch ist ein Lebewesen».

- konkrete Attribute, die ein wirkliches vollständiges Objekt hätte haben können, aber nicht wirklich hat, und
- nicht-wirkliche vollständige Objekte (z. B. Romanfiguren) und ihre konkreten Attribute.

Alle puren Possibilien sind unwirklich, können aber (in einem gewissem, nun zu klärenden Sinn) eine „Verwirklichung“ erfahren. Mit Blick auf dieses ihr Verhältnis zur Wirklichkeit kann man für die puren Possibilien verschiedene Grade der Selbständigkeit feststellen, wobei nach zunehmender Selbständigkeit geordnet zuerst die Begriffe, dann die Fiktionen kommen.

Die *Begriffe* sind so unwirklich, dass sie *als für sich bestehende Einheiten* gar nicht verwirklicht sein können, sie können nur dadurch verwirklicht sein, dass sie inhaltlich mit *anderen* wirklichen Objekten übereinstimmen, nämlich mit ihren Instanzen. Die „Verwirklichungsfähigkeit“ von Begriffen ist also eine so schwache, dass sie hierfür auf *andere* Objekte angewiesen sind, „in“ denen sie sich (durch inhaltsgleiche Repräsentanten) verwirklichen können.

Die *Fiktionen* können dagegen *für sich* verwirklicht werden. – Dies ist allerdings *nicht* so zu verstehen, dass es für eine Fiktion möglich wäre, durch eine Art „wirkliche Bewegung“ den Seins-Status des rein möglichen Objekts zu „verlassen“ und in jenen des wirklichen Objekts „überzuwechseln“. Solches ist bei keinem rein möglichen Objekt möglich, denn per Definition sind Objekte, die „irgendwann“ in der Wirklichkeit auftauchen, *wirkliche* und nicht rein mögliche Objekte. Die Fähigkeit einer Fiktion, verwirklicht zu werden, bedeutet vielmehr, dass sie *hätte wirklich sein können* (obwohl das tatsächlich nicht der Fall ist).

4.4 Aktualitäten

Das Charakteristikum von *wirklichen Objekten* oder *Aktualitäten* gegenüber den puren Possibilien ist, dass sie nicht bloß denk-unabhängig „da sind“ (= existieren), sondern denk-unabhängig „wirken“. Sie haben daher eine nunmehr vollkommene Denk-Unabhängigkeit und stehen insofern auf der Stufe eigentlicher Realität. Trotzdem kann ihre Selbständigkeit noch verschiedene Grade von Vollkommenheit haben, da ein Seiendes, das nicht vom Denken abhängt, immer noch mehr oder weniger von *anderen* Seienden abhängen kann.

4.4.1 Arten des Wirkens

Der Grundbegriff des *Wirkens* wurde schon oben S. 31–32 kurz beschrieben: Wirken ist Seinsentfaltung. Es gibt nun zwei grundlegend verschiedene Arten des Wirkens, nämlich (1) äußeres Wirken oder Wirken nach außen und (2) inneres Wirken oder Wirken nach innen. Beim *äußeren Wirken* setzt sich das Seiende dadurch in Geltung, dass es auf ein anders Seiendes einwirkt. Es „beeinflusst“ dann das andere Seiende, indem es entweder dessen Bestimmungen verändert (z. B. es bewegt, zerteilt, erwärmt, heilt, belehrt), oder diesen Bestimmungen festen Bestand verleiht (es beispielsweise an einem bestimmten Ort festhält). Auch beim *Wirken nach außen* geschieht aber eine „Seinsentfaltung“ beim Wirkenden selbst, und nicht bloß eine „Auswirkung“ auf andere Seiende.

Beim *innerem Wirken* wirken Objekte *direkt auf sich selbst* und haben daher einen stärkeren Selbstbezug als die *nur* mit äußerem Wirken ausgestatteten Objekte. Sie sind darum vollkommener (realer) als diese. Grundlegende Beispiele für inneres Wirken sind einerseits Selbstbegründung, andererseits Fortpflanzung, Erkennen und weitere Lebenstätigkeiten.

Selbstbegründung kann total oder partiell sein. *Totale Selbstbegründung* (Aseität) besteht, wo ein Seiendes sein ganzes Sein sich selbst „gibt“; Aseität kommt, wie wir sehen werden, nur Gott zu.[11] *Partielle Selbstbegründung* liegt vor, wo ein Seiendes sich nur teilweise das eigene Sein „gibt“. Beispiele hierfür sind die wahren Sachverhalte, deren Wahrheit von selbst einleuchtet:[12] Diese geben sich gewissermaßen ihr Wahrsein (nicht aber ihr Sein schlechthin) selbst. Eine andere Form von partieller Selbstbegründung haben sich selbst erhaltende Objekte (z. B. unzerstörbare Elementarteilchen[13] oder die menschliche Seele[14]): Diese bleiben von Natur aus im Sein, d. h. ihr Fortbestehen (nicht jedoch ihr Sein schlechthin) gründet in ihnen selbst. Selbstbegründung hat beständig ein bestimmtes Maß und lässt dann keine *weiter aufbauende, erweiternde* Seinsentfaltung mehr zu. Darin liegt eine Unvollkommenheit, es sei denn, das Selbstbegründete ist gar nicht mehr erweiterbar, weil es die höchste denkbare Vollkommenheit bereits hat, also Gott ist: Dann verhindert die Selbstbegründung keine Entfaltung, sondern bewahrt alle Vollkommenheit. Wenn aber nicht die auf göttlicher Seins-Stufe stehende absolute Selbstbegründung (Aseität) gemeint ist, ist Selbstbegründung weniger vollkommen als Fortpflanzung und Erkenntnis.

Fortpflanzung ist die für organische Lebewesen charakteristische Selbstreproduktion. Das Lebewesen gibt sich selbst das Sein, allerdings nicht individuell, sondern nur der Art nach, indem es ein neues Lebewesen seiner Art hervorbringt. Die Fortpflanzung ist nun, insofern sie eine im Prinzip

---

[11] Siehe S. 769.

[12] Siehe Abschnitt 4.4.3.

[13] Gemeint sind hier Elementarteilchen im klassischen Sinn, die als unteilbare Korpuskeln bestimmter Größe gedacht sind. Nach dem heutigen Standardmodell der Quantenmechanik müsste man sich allerdings ein Elementarteilchen eher als eine „Wahrscheinlichkeitswolke“ vorstellen, deren Größe und Dichte variabel ist (siehe Abschnitt 8.16.10 S. 669–672). Immerhin haben die Elementarteilchen auch in diesem Modell naturgesetzlich stets gleich bleibende Erhaltungsgrößen (wie Ladung und Ruhemasse), die den Teilchen daher „von sich aus“ zukommen. – Die Selbstbegründung der Elementarteilchen ist in jedem Fall relativ, weil sie bloß in einem Naturgesetz gründet, das keine logische Notwendigkeit beanspruchen kann.

[14] Siehe Abschnitt 10.3.

grenzenlos fortsetzbare Erweiterung ermöglicht, vollkommener als die partielle Selbstbegründung. Aber sie ist nur eine äußerliche Erweiterung: Ein sich fortpflanzendes Objekt erweitert sich ja nur *artmäßig*, nicht *individuell*.[15]

Erkennen besteht darin, dass ein Subjekt sich selbst (wenigstens unthematisch) gegenübersteht, es „gibt sich" sein eigenes Sein „vor". Auch das Erkennen *anderer* Seiender ist inneres Wirken, denn dadurch erweitert der Erkennende den eigenen Horizont und damit auch seine Selbsterkenntnis: Vollkommene Selbsterkenntnis ist nur möglich, wenn das Selbst im Kontext und in Absetzung von möglichst vielen anderen Seienden erkannt wird. Das Erkennen ist wie Selbstbegründung eine ganz im Individuum bleibende Wirkung, die aber zugleich wie die Fortpflanzung im Prinzip grenzenlos steigerbar ist. Insofern ist sie im Vergleich mit der (partiellen) Selbstbegründung und auch mit der Fortpflanzung schlechthin vollkommener.

Als *Lebenstätigkeiten* kann man nun diejenigen inneren Wirkweisen ansehen, die entweder dem allvollkommenen Sein Gottes zukommen, oder die beschränktes Sein in einem nicht-statischen, zu immer größerer Vollkommenheit hin offenen Sinn entfalten: denn Leben ist Vollkommenheit oder Vollkommenheits-Streben.[16] Die hauptsächlichen Lebenstätigkeiten sind demnach Fortpflanzung und Erkenntnis. Im weiteren Sinn gehören zu den Lebenstätigkeiten auch andere, welche im Zusammenhang mit Fortpflanzung und Erkenntnis stehen, indem sie diese Akte vorbereiten, begleiten und vervollkommnen. Die mit der Fortpflanzung zusammenhängenden Lebenstätigkeiten kann man unter dem Stichwort „Selbstorganisation" zusammenfassen. Dazu gehören z. B. die eigenständige Ausbildung einer Struktur, die Assimilation (Verwandlung von Fremdstoffen in die eigene Substanz) und die Selbstreparatur bei Teil-Destruktion.[17]

Mit dem Erkennen hängen Akte wie *Wollen, Fürchten, Hoffen, Lieben* und *Hassen* zusammen, die man als Akte des *inneren Strebens* zusammenfassen kann. Es handelt sich um Formen der inneren Aneignung des Erkannten und der Reaktion auf das Erkannte, so dass das innere Streben stets das Erkennen voraussetzt. Umgekehrt scheint aber auch das Erkennen ohne inneres Streben nicht möglich zu sein. Denn ein Erkennen ohne inneres Streben wäre ein uninteressiertes Wahrnehmen, das sich der Erkennende nicht wirklich aneignet, denn er wäre gar nicht „bei der Sache", sondern vollkommen abwesend. Aber dann würde er wohl in Wahrheit auch gar nichts erkennen. Die mit dem Erkennen verbundenen Akte des inneren Strebens zeigen nun sehr klar, dass es sich beim konkreten Erkennen um innere *Aktivität* handelt, um echtes inneres *Wirken*.

Das Erkennen können wir aufgrund des oben S. 24 besprochenen Unterschieds zwischen sinnlichem und geistigem Erkennen nochmals grundlegend unterteilten. Dem sinnlichen und geistigen Erkennen entsprechen auch besondere Arten des Strebens, die man als *sinnliches Streben* und *geistiges Streben* bezeichnet. Da nämlich mit dem sinnlichen Erkennen keine volle Erkenntnis des eigenen Selbst verbunden ist, kann auch das Streben des nur sinnlich Erkennenden nicht ganz von innen her kommen, muss also teils einen fremdbestimmten Charakter haben. Demgegenüber kann bei einem rein geistigen Erkennen, das mit vollem Bewusstsein des Ich verbunden ist, auch das entsprechende Streben von diesem Ich ausgehen.

Die höchsten uns bekannten Formen inneren Wirkens sind das *geistige Erkennen* und das *geistige Streben*. Diese Wirkweisen nennt man *personal* und die sie vollziehenden Wesen heißen *Personen*.

---

[15] In dieser Hinsicht wäre also eine Fortpflanzung, bei der das Individuum untergeht (was aber vom Begriff der Fortpflanzung her *nicht* erforderlich ist!) unvollkommener als die partielle Selbstbegründung eines seinen eigenen Fortbestand sichernden Individuums.

[16] Nach Whitehead, *Process* part 2 chapter 3 section 7 S. 156, Ausgabe Griffin/Sherburne S. 102, Ausgabe Holl S. 200 ist „die erste Bedeutung von ‚Leben' das Hervorbringen einer begrifflichen Neuheit – Neuheit des Strebens [origination of conceptual novelty – novelty of appetition]."

[17] Diese Tätigkeiten gipfeln in der Fortpflanzung, welche die Selbstorganisation über das Ende der individuellen Existenz hinaus fortsetzt. Die Fortpflanzung ist als gleichsam *vollständiges* Sich-hervorbringen die höchste Art von Selbstorganisation.

Beim geistigen Streben gibt es nochmals einen wichtigen Unterschied. Manche Akte des geistigen Strebens beziehen sich auf das *Tun* (Wahl der zu ergreifenden Mittel, um etwas zu erreichen), andere aber auf das *Sein* der Person selbst (Wahl, was ich sein oder werden will, d. h. Wahl des Ziels); diese letztere Form ist das *moralische Streben* oder die *freie Selbstbestimmung*. Durch diese allerhöchste Art des uns bekannten Strebens kann die Person sich unmittelbar als Ganzes vervollkommnen, aber auch umgekehrt ihre Vollkommenheit ablegen.

Der Begriff der freien Selbstbestimmung steht in engem Zusammenhang mit dem Begriffspaar des *Guten* und *Schlechten*. Man kann von „gut" und „schlecht" in einem relativen und in einem absoluten Sinn sprechen. Im relativen Sinn bedeutet gut dasselbe wie „zweckentsprechend" oder „zusagend", und was in diesem Sinne gut oder schlecht ist, hängt natürlich ganz vom Zweck bzw. Geschmack ab. Es gibt aber auch eine absolute Bedeutung von „gut" und „schlecht": So würde niemand eine gerechte und wahrhaftige Person im Hinblick auf diese Eigenschaften als schlecht bezeichnen. Der Begriff des (im absoluten Sinne) Guten scheint sich jedoch einer genauen Aufklärung noch weit mehr zu entziehen als vergleichbare Grundbegriffe wie Sein, Wirken und Wahrheit.[18] Will man ihn „auf eine einzige Formel bringen", so dürften Sokrates und Platon das Richtige getroffen haben, dass es ein dem Sein immanentes Ideal, eine objektive „Idee des Guten" gibt, so dass man sagen kann, ein Seiendes sei in dem Maße gut bzw. schlecht, als es dieser Idee ähnlich bzw. unähnlich ist. Alle möglichen Seienden kann man nun in diese „Skala" von Gut und Schlecht einordnen, im eigentlichsten Sinn aber nur Personen. Eine Person wird gut oder schlecht genannt, je nachdem, ob sie im sog. *moralisch guten Streben* durch freie Selbstbestimmung die Idee des Guten in sich verwirklicht oder im *moralisch bösen Streben* diese Entfaltung negiert, wobei sie dann anscheinend vollkommenheitsmäßig sogar unter ihren unentfalteten Grundzustand absinken kann.[19]

Durch Kombination der genannten Wirk-Arten können wir nun die im eigentlichen Sinn wirkenden Objekte einteilen. Zusätzlich gibt es noch Objekte, die nur im uneigentlichen Sinn wirken und daher Aktualitäten *neben* (und vollkommenheitsmäßig *unter*) den eigentlich aktiven Objekten sind. Unter Einbeziehung dieser Objekte erhalten wir folgende Einteilung der wirklichen Objekte:

- Auf der untersten Stufe der Aktualität stehen Objekte, deren uneigentliches Wirken nur darin besteht, das Zusammenwirken mehrerer artgleicher Aktualitäten vorzubereiten, indem sie ein wirkliches (d.h. ein das Wirken ermöglichendes, spezifizierendes oder beeinflussendes) Auseinander dieser Aktualitäten herstellen. Diese Objekte nenne ich *Universen*.
- Auf der mittleren Stufe stehen die *Attribute* eines eigentlich wirkenden Objekts. Diese hängen alle irgendwie mit dessen Wirken zusammen, indem sie beispielsweise seine Wirkmöglichkeiten vorzeichnen oder das Objekt und sein Wirken ausgestalten.
- Auf der höchsten Stufe stehen die *eigentlich wirkenden Objekte*, die das Wirken nicht vorbereiten oder ausgestalten, sondern es selbst vollziehen. Hierzu gehören einerseits die *wahren Sachverhalte*, andererseits die *Substanzen*.

Ich betrachte nun die wirklichen Objekte im Einzelnen.

---

[18] Den irreduziblen Grundcharakter des Guten betont auch Seifert, indem er im Anschluss an George Edward Moore und William David Ross erklärt, das Gute könne „keineswegs auf etwas anderes zurückgeführt werden oder durch etwas anderes als durch sich selbst erklärt werden" und es könne „nicht ohne die unmittelbare Erfahrung seines Inhalts verstanden werden" (Seifert, *Sein* S. 108). Jedenfalls hat das Gutsein mindestens drei Aspekte: es ist erstens das anderen selbstlos Nützende oder das sich Gebende („bonum est diffusivum sui"), zweitens das objektiv (vernunftgemäß) Anstrebenswerte („bonum est, quod omnes appetunt") und drittens das (von Nutzen und Streben unabhängig) Anerkennens–, Bewunderns– und Liebenswerte, nämlich das Heilige, Erhabene und Schöne. Gutsein in absoluter Bedeutung ist insgesamt in etwa die gemeinsame Wurzel dieser Umschreibungen.

[19] Einerseits ist zwar das moralisch böse Streben genau wie das moralisch gute ein inneres Wirken der höchsten Art, so dass es insofern den Wirkenden selbständiger und damit vollkommener macht; aber andererseits ist dieses Wirken gerade der Vollkommenheit entgegengerichtet, so dass es im Endeffekt die Vollkommenheit nicht erhöht, sondern verringert. Wenn ein Mensch durch derartiges Streben unter seinen „Grundzustand" absinkt, spricht man von „unmenschlichem" Verhalten.

4.4.2 Universen

Ein *Universum* umfasst eine maximale Gesamtheit von Objekten, welche *Punkte* des Universums heißen und die

1. in spezifischer Weise „auseinander“ existieren (z. B. neben– oder nacheinander),
2. dadurch wirksam sein können, dass sie anderen Objekten ein Auseinander verleihen,
3. abgesehen von der Inhaltlichkeit und Wirksamkeit, die sich aus Punkt (1) und (2) ergibt, keine weitere Inhaltlichkeit und Wirksamkeit haben.

Mit der „Maximalität“ dieser Gesamtheit ist gemeint, dass es außer den Punkten keine weiteren Objekte mehr gibt, die in derselben spezifischen Weise „außerhalb“ der anderen existieren. Als *Orte* oder *Stellen* des Universums bezeichne ich sowohl einzelne seiner Punkte wie auch aus mehreren Punkten bestehende Vielheiten.[20] An einem Ort eines Universums kann ein Objekt dadurch *gegenwärtig* (befindlich, lokalisiert) sein, dass es mit den Punkten des Ortes koinzidiert, d. h. „zusammenfällt“.[21] Besteht nun der Ort aus einer Vielheit von Punkten, wird das Objekt durch die Koinzidenz mit diesem Ort offenbar seinerseits in eine Vielheit von Teilen aufgeteilt; diese Teile heißen dann *Punkte des Objekts*, und es koinzidiert jeder Punkt des Objekts mit genau einem Punkt des Ortes und umgekehrt jeder Punkt des Ortes mit genau einem Punkt des Objekts. Ein mit einem Ort koinzidierendes Objekt heißt an dem betreffenden Ort *durch Einordnung* gegenwärtig (befindlich, lokalisiert). Außer durch Einordnung kann ein Objekt an einem Ort des Universums auch *durch Wirken* gegenwärtig (befindlich, lokalisiert) sein, indem es nämlich auf ein an diesem Ort durch Einordnung gegenwärtiges Objekt wirkt oder von ihm Einwirkungen empfängt.

Ein Universum heißt ein *zeitliches Universum*, wenn das Auseinander seiner Punkte (die dann *Zeitpunkte* heißen) durch ein *Nacheinander* begründet ist. Was ist ein Nacheinander? Man kann zunächst antworten: ein *eindimensionales Auseinander mit einer ausgezeichneten Richtung*. Doch wären auch eindimensionale Universen mit ausgezeichneter Richtung denkbar, die *kein* Nacheinander implizieren: z. B. ein Strahl mit einem Anfangs– aber keinem Endpunkt. Eine zweite Antwort wäre: Das Nacheinander ist *Veränderung*. Zumindest kann das eine ohne das andere nicht sein. Dass nämlich Veränderung ohne Nacheinander nicht sein kann, ist klar, denn Veränderung setzt ja mindestens zwei verschiedene Phasen voraus: einen Zustand „vor“ und einen „nach“ der Veränderung. Aber auch umgekehrt kann ein Nacheinander nicht ohne Veränderung sein, was allerdings etwas schwieriger einzusehen ist. Vergeht die Zeit nicht auch dann, wenn gar nichts passiert? Bei wirklich *absoluter* Veränderungslosigkeit würde ich dies verneinen. Man versuche sich einmal vorzustellen, dass alle Veränderung aufgehoben wäre. Wie könnte dann noch ein Zeitvergehen erfahrbar sein? Nicht nur würden alle Uhren stillstehen und alle körperlichen Prozesse aussetzen, es wäre auch unmöglich, in Gedanken zu zählen, was ja eine Veränderung der Gedanken wäre. Oder würde sich das Fortschreiten der Zeit dadurch bemerkbar machen, dass es „langweilig“ werden würde, immer dasselbe zu denken? Auch das nicht, denn ob das veränderungslose Dasein lang – oder kurzweilig

[20] Ein besonderer Ort des Universums wäre also auch die Vielheit *aller* seiner Punkte. Diese Vielheit ist aber nicht mit dem Universum selbst identisch, denn das Universum setzt (über die bloße Existenz der Punkte hinaus) noch eine Ordnung zwischen den Punkten voraus: eine spezifische Weise des Auseinander. Umgekehrt ist aber eine Ordnung des Auseinander ohne tatsächlich auseinander stehende Punkte gar nicht denkbar. Somit sind das „Universum“ und die „Vielheit seiner Punkte“ zwar verschieden, aber beide Begriffe sind untrennbar, sie sind „ineinander inbegriffen“.

[21] Die *Koinzidenz* eines Ortspunktes mit dem Punkt eines dort befindlichen Objekts bedeutet nicht eine vollkommene Identifizierung, sondern ein Ineinandersein, welches auch aus der Berührung zweier Körperpunkte resultiert. Wenn etwa P_1 Eckpunkt eines Körpers und P_2 Eckpunkt eines anderen Körpers ist, und beide Ecken sich berühren, so stehen dabei P_1 und P_2 keineswegs nebeneinander (denn nebeneinander stehende Punkte im Raum sind ja immer durch einen positiven Abstand getrennt), sind aber auch nicht identisch (denn sie sind nach wie vor Teile verschiedener Körper), also bleibt nur übrig, dass sie *ineinander* stehen (vgl. Brentano, *Ens rationis*, Ausgabe Kraus S. 261: „die *Möglichkeit koinzidierender Punkte*, die trotz der Koinzidenz ihre Differenz und volle relative Selbständigkeit haben … wurde und wird vielfach verkannt“).

wäre, hinge ja ganz davon ab, welchen Gemütszustand man gerade hatte, bevor alles zum Stillstand kam, denn dieser Zustand ist es, der „verewigt“ würde. So wäre anscheinend ein Zeitvergehen ohne Veränderung *schlechthin nicht mehr erkennbar*, und was grundsätzlich nicht erkennbar ist, kann auch nicht *sein*. So sind die Begriffe des Nacheinander und der Veränderung ineinander inbegriffen, und man kann die Zeit als ein Universum ansehen, in dem sich ständig etwas verändert.[22] Auch in der Physik wird das Fortschreiten der Zeit durch eine bestimmte Veränderung (nämlich die Entropiezunahme) definiert.[23]

Doch auch damit ist die Frage, was das Charakteristische des Nacheinander ist, noch nicht beantwortet. Denn was Veränderung ist, ist schwer zu sagen, wenn man den Begriff des Nacheinander vermeiden will. Versuchsweise könnte man aber das Nacheinander gegenüber anderen Arten des Auseinander mit Hilfe des Bewusstseins wie folgt charakterisieren. Das Nacheinander zeichnet sich dadurch aus, dass von jedem Zeitpunkt aus betrachtet

- die *zu diesem Zeitpunkt stattfindenden* Ereignisse als wirklich wahrgenommen werden,
- die *früheren* aber als unwirklich und dennoch am Aufbau der Wirklichkeit beteiligt, und
- die *späteren* Ereignisse als unwirklich und am Aufbau der Wirklichkeit unbeteiligt.

Weil sich aber eine solche Dreiteilung der Wirklichkeitsauffassung zu *jedem* Zeitpunkt zeigt, haben die Ereignisse *absolut gesehen* den gleichen Anteil an der Wirklichkeit: Sie stehen in einem eigentümlich „oberflächlichen“ Wirklichkeitsmodus, weil sich ihre Wirklichkeit nur in einem einzigen Zeitpunkt in voller Weise entfaltet, während sie von allen anderen Zeitpunkten aus gesehen verblasst und zurücktritt. Das wirkliche Sein der Ereignisse ist also so schwach, dass es nicht allseitig zum Vorschein gelangt.[24]

Ein Universum heißt ein *räumliches Universum*, wenn das Auseinander seiner Punkte durch ein *Nebeneinander* begründet ist. Das Wesen des Nebeneinander ist viel leichter zu erklären als das des Nacheinander: Es ist ein Auseinander, bei dem es keine bevorzugte Richtung gibt und jedes eingeordnete Objekt von jedem Punkt aus gesehen denselben Wirklichkeits-Status zu erkennen gibt. Ein Beispiel für ein zeitliches Universum ist der Erlebnisstrom jedes einzelnen Subjekts, ein Beispiel für ein räumliches Universum ist ein dreidimensionaler unbegrenzter Raum.[25] Das Verhältnis mehrerer Universen zueinander könnte derart sein, dass ein Universum Teil eines anderen ist[26] oder dass sie sich überschneiden.[27] Sie könnten aber auch vollkommenen „auseinander“ bestehen, entweder indem sie auseinander liegende Teile eines größeren Universums sind[28] oder indem sie mit Punkten

---

[22] Siehe auch Abschnitt S. 298–299.

[23] Entropie ist ein Maß für die thermodynamische Unordnung (siehe Abschnitt 8.16.2). Veränderungen hin zu immer größerer Entropie gehen in einem geschlossenen System ohne Energiezufuhr „von selbst“ vor sich und sind daher als physikalischer Maßstab für den Fluss der Zeit im Universum geeignet (vgl. Penrose, *Computerdenken* S. 295–338). Wenn jedoch Physiker eine Entropieabnahme als Zeitumkehr betrachten, verwechseln sie den in diesem Fall nicht mehr brauchbaren physikalischen *Maßstab* der Zeit mit der Zeit selbst. Zeit würde auch dann vergehen (und zwar nach wie vor vorwärts), wenn sich das Universum bei abnehmender Entropie zusammenzöge oder wenn bloß geistige Veränderungen in einem denkenden Subjekt stattfänden.

[24] Zum Zeitbegriff siehe noch S. 296 (Infinitesimalstruktur der Zeit), S. 794–795 (Anfang oder Anfangslosigkeit der Zeit) und S. 767 sowie Fußnote 85 auf S. 791 (Verhältnis Gottes zur Zeit).

[25] Mathematisch kann man ohne Schwierigkeiten auch Universen mit weniger oder mehr als drei Dimensionen behandeln, darunter auch unendlichdimensionale Universen (siehe Abschnitt 5.23). Statt der gewöhnlichen Euklidischen Axiome könnten widerspruchsfrei auch andere Axiome in einem Raum gültig sein. Man denke hier nicht nur an die hyperbolische und elliptische Geometrie (siehe S. 278–279 mit Fußnote 681), sondern auch an die vielfältigen Möglichkeiten allgemeiner topologischer Räume. Räume, in denen Punkte unendlich weit voneinander entfernt sein können, sind ebenso denkbar wie solche, in denen unendlich kleine Strecken vorkommen (die dennoch von Punkten verschieden sind). Siehe hierzu unten S. 289–296.

[26] Beispiel: Unendliche Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum sind Teile dieses Raums; sie sind aber ebenso Universen wie der dreidimensionale Raum selbst, weil sie maximale Gesamtheiten einer spezifischen (nämlich ein- bzw. zweidimensionalen) Form des Nebeneinander darstellen.

[27] Beispiel: zwei sich schneidende Geraden.

[28] Beispiel: zwei parallele Geraden.

eines übergeordneten Universums ganz anderer Art koinzidieren.[29] Auch wären Universen denkbar, zwischen denen es überhaupt keine Verbindung gäbe (außer dadurch, dass Gott ihnen allen das Dasein gibt und um sie weiß). Es gibt nicht nur rein zeitliche und rein räumliche Universen. Das physikalische Universum nach EINSTEIN ist ein solches, in dem Raum und Zeit untrennbar miteinander verknüpft sind.[30] Ein ganz anderes Universum ist das im folgenden Abschnitt zu besprechende „logische Universum".

Ein Universum, in das nur Fiktionen eingeordnet sind, ist natürlich samt seiner Punkte ebenfalls fiktiv. Ein Universum aber, in welches wirkliche Objekte eingeordnet sind, gehört ebenso wie seine Punkte zu der Aktualitäten, weil dann die eingeordneten wirklichen Objekte durch das Universum und seine Punkte „wirklich" auseinander gehalten werden.

4.4.3 Sachverhalte und logisches Universum

Ein Sachverhalt[31] ist ein Objekt, welches als wahr oder als falsch beurteilt werden muss, dem also einer der beiden *Wahrheitswerte* („die Wahrheit" oder „die Falschheit") zukommt. Wahre Sachverhalte heißen auch *bestehende* Sachverhalte oder *Wahrheiten*, falsche Sachverhalte heißen *nicht-bestehende* Sachverhalte oder *Falschheiten*. Sachverhalte sind keine Attribute von Objekten, wohl aber sind sie auf ein oder mehrere Objekte gegründet, „von denen" sie „handeln". Die einem Sachverhalt zugrunde liegenden Objekte können selbst auch wieder Sachverhalte sein, dann handelt es sich um einen „Sachverhalt über Sachverhalte". Sachverhalte hängen mit Aussagen und Urteilen zusammen, sind aber nicht mit diesen identisch. Eine *Aussage* ist die sprachliche Formulierung eines Sachverhalts, und ein *Urteil* ist eine mentale Entscheidung darüber, ob ein Sachverhalt wahr oder falsch ist. So existieren Aussagen auf der sprachlichen, Urteile auf der mentalen und Sachverhalte auf der sachlichen Ebene.

Wahrheit und Falschheit

Was ist nun Wahrheit? Die klassische Definition lautet: Ein Urteil ist wahr, wenn es mit dem beurteilten Sachverhalt übereinstimmt (adaequatio rei et intellectus). Diese „Übereinstimmungs– oder Korrespondenztheorie" der Wahrheit wurde von FREGE angefochten: „Wollte man etwa sagen ‚wahr ist eine Vorstellung, wenn sie mit der Wirklichkeit übereinstimmt', so wäre damit nichts gewonnen, denn, um dies anzuwenden, müsste man in einem gegebenen Fall entscheiden, ob eine Vorstellung mit der Wirklichkeit übereinstimme, mit anderen Worten: ob es wahr sei, dass die Vorstellung mit der Wirklichkeit übereinstimme. Es müsste also das Definierte selbst vorausgesetzt werden."[32] Dieser Einwand wäre berechtigt, wenn man durch die Definition „die Wahrheit an sich" erklären wollte; doch erklärt sie lediglich die Wahrheit *von Urteilen*: Ein *Urteil* über einen Sachverhalt ist wahr, wenn der *Sachverhalt* ≪das Urteil stimmt mit dem Sachverhalt überein≫ wahr ist. So ist die klassische Wahrheitsdefinition nicht zirkulär, aber sie setzt voraus, dass für *Sachverhalte* bereits bekannt ist, was es für diese heißt, wahr oder falsch zu sein. Und *dies* lässt sich nicht durch eine formale Definition angeben, denn eine beliebige Definition der Form ≪Ein Sachverhalt ist wahr, wenn es wahr

[29] Zum Beispiel könnte eine Folge verschiedener rein räumlicher Universen mit den Punkten eines zeitlichen Universums koinzidieren. Umgekehrt könnte auch mit jedem Punkt eines räumlichen Universums je ein zeitliches Universum koinzidieren.

[30] Siehe S. 647.

[31] Zu diesem Begriff vgl. SEIFERT, *Sein* S. 327–344 und REINACH, *Negatives Urteil* S. 115–140. Wie SEIFERT (a.a.O., S. 327f) zur Geschichte des Sachverhaltsbegriffs bemerkt, wurde dieser, aufbauend auf Ideen von THOMAS VON AQUIN und BERNHARD BOLZANO, in seiner eigentlichen Bedeutung erst von phänomenologischen Philosophen des 20. Jahrhunderts erfasst, namentlich Edmund HUSSERL, Alexius MEINONG, Adolf REINACH, Alexander PFÄNDER, Hedwig CONRAD-MARTIUS, Dietrich VON HILDEBRAND und Roman INGARDEN.

[32] FREGE, *Logik* Einleitung S. 139f.

ist, dass ...≫ würde die Kenntnis des zu Definierenden schon voraussetzen, wie Frege mit Recht eingewendet hat. So kann man nur versuchen, durch Umschreibungen ein stärkeres Bewusstsein davon zu wecken, was gemeint ist.[33] Eine klare Erkenntnis bezüglich der Wahrheit und Falschheit von Sachverhalten ist zunächst deren *Trennung*, die sich im *Kontradiktionsprinzip* ausspricht. Man sollte eigentlich zwei Kontradiktionsprinzipien unterscheiden, nämlich:

(1) Ein Sachverhalt ist entweder wahr oder falsch.
(2) Von den Sachverhalten S und ≪nicht S≫ ist stets genau einer wahr.

Prinzip (1) ist das Kontradiktionsprinzip *bezüglich des Wahrheitswertes*, Prinzip (2) dasjenige *bezüglich gegensätzlicher Sachverhalte*.[34] Die mathematische Logik formuliert diese Prinzipien für Aussagen statt für Sachverhalte: *Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch*, und *die Aussagen A und ≪nicht A≫ haben stets verschiedene Wahrheitswerte*. Vom Standpunkt dieser Logik aus sind beide Prinzipien pure Selbstverständlichkeiten. Man betrachtet hier nämlich Aussagen als Zeichenreihen, denen man nach festen Regeln eines von zwei Objekten 0 und 1 zuordnet, die man als Repräsentanten der beiden „Wahrheitswerte“ auffasst, und nennt eine Aussage falsch bzw. wahr, wenn man ihr 0 bzw. 1 zugeordnet hat. Dabei ordnet man der Aussage ≪nicht A≫ stets genau dann 0 bzw. 1 zu, wenn man zuvor der Aussage A das Objekt 1 bzw. 0 zugeordnet hat. Dass in dem so konstruierten System die genannten Prinzipien gelten, ist nicht verwunderlich, *weil die logische Sprache gerade so aufgebaut wird, dass sie gelten.*

Damit nun allerdings die Festlegungen einer solchen Logik überhaupt einen *wirklich* feststehenden Sinn haben, ist ein tiefer liegendes Kontradiktionsprinzip erforderlich, das auf der Sachverhaltsebene liegt. Denn bei seinen „Festlegungen“ greift der Logiker ja auf Sachverhalte von der Art zurück, *dass einer bestimmten Zeichenreihe A die* 0 *oder die* 1 *zugeordnet worden ist.* Dass aber *diese* Sachverhalte ebenfalls den beiden Kontradiktionsprinzipien unterliegen, ist eine vorgegebene *ontologische* Tatsache, welche die Logik nicht geschaffen hat, sondern voraussetzen muss.[35] Auf der ontologischen Ebene folgt das erste Kontradiktionsprinzip keinesfalls aus einer bloßen Analyse der Definition des Sachverhaltes,[36] sondern kommt erst durch eine Zusammenschau der Begriffe „Sachverhalt“, „wahr“ und „falsch“ zum Vorschein. Ebenso ist der durch ≪nicht S≫ beschriebene Sachverhalt nicht schon per Definition ein solcher, dessen Wahrheitswert nicht mit dem von S identisch ist. Die der Negation zugrunde liegende Intuition dürfte vielmehr lediglich die Beobachtung sein, dass jeder Sachverhalt S immer genau einen *artgleichen Partner* besitzt, den man mittels Negation durch ≪nicht S≫ beschreiben kann. Negiert man diesen wieder, erhält man den mit ≪nicht nicht S≫ beschreibbaren Sachverhalt, der aber nicht ein dritter Sachverhalt, sondern mit S selbst

[33] „Wahrheit ist offenbar etwas so Ursprüngliches und Einfaches, dass eine Zurückführung auf noch Einfacheres nicht möglich ist“ (Frege, *Logik* Einleitung S. 140).

[34] Man kann beide Kontradiktionsprinzipien jeweils noch einteilen in den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (bzgl. des Wahrheitswertes besagt dieser, dass jeder Sachverhalt *mindestens* einen Wahrheitswert hat, und bzgl. gegensätzlicher Sachverhalte S und ≪nicht S≫, dass *mindestens* einer dieser beiden wahr sein muss) und den *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch* (bzgl. des Wahrheitswertes besagt dieser, dass jeder Sachverhalt *höchstens* einen Wahrheitswert hat, und bzgl. gegensätzlicher Sachverhalte S und ≪nicht S≫, dass *höchstens einer* von ihnen wahr sein kann, also *nicht beide zugleich* wahr sind).

[35] So wäre es für die Logik fatal, könnte der Logiker sich nicht a priori darauf verlassen, dass es einer bestimmten Aussage entweder die 1 als Wahrheitswert zugeordnet hat oder dies nicht getan hat, und dass der Sachverhalt, dass er dieser Aussage die 1 zugeordnet hat, entweder zutrifft oder nicht, d. h. entweder wahr oder falsch ist.

[36] Per Definition ist ein Objekt allein schon dann ein wahrer bzw. falscher Sachverhalt, wenn das Objekt als wahr bzw. falsch beurteilt werden muss – unabhängig davon, ob es womöglich *zugleich* als falsch bzw. wahr zu beurteilen wäre. Trivial ist allerdings der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wenn er bezüglich des Wahrheitswertes ausgesprochen wird (siehe Fußnote 34): Denn dass ein Sachverhalt mindestens einen Wahrheitswert hat, gilt per Definition des Sachverhalts.

identisch ist.[37] S und ≪nicht S≫ sind artgleiche Sachverhalte, da sie denselben Inhalt vorgeben, dessen Bestehen einmal bejaht und einmal verneint wird. Es begründen also Bejahung und Verneinung ein „Auseinander“ artgleicher Sachverhalte, und so könnte man denken, dass Bejahung und Verneinung zwei Punkte eines Universums sind, mit denen die positiven bzw. negativen Sachverhalte koinzidieren. Das wäre richtig, wenn man jeden Sachverhalt *in objektiver Weise* als positiv oder negativ charakterisieren könnte. Doch dies scheint nicht immer zwanglos möglich zu sein.[38]

Dagegen ist stets objektiv festgelegt, *welcher von beiden Sachverhalten der wahre und welcher der falsche ist*. Die beiden „Punkte“, welche das Auseinander der beiden Sachverhalte bewirken, sind daher nicht Bejahung und Verneinung, sondern Wahrheit und Falschheit. Diese Einsicht liegt dem zweiten Kontradiktionsprinzip zugrunde: dass nämlich die beiden artgleichen, durch S und ≪nicht S≫ beschriebenen Sachverhalte sich stets so auf die beiden Wahrheitswerte verteilen, dass stets beide Wahrheitswerte mit je einem der Sachverhalte koinzidieren. Wir haben demnach ein Universum mit nur zwei Punkten vor uns, mit denen sämtliche Sachverhalte koinzidieren, und diese beiden Punkte sind die *Wahrheitswerte* „wahr“ (oder: *die Wahrheit*, der *Wahrpunkt*) und „falsch“ (oder: *die Falschheit*, *der Falschpunkt*). Ich nenne dieses Universum das *logische Universum*. Das logische Universum ist offensichtlich weder ein zeitliches noch ein räumliches. Denn bei zeitlichen und ebenso bei räumlichen Universen haben die dort eingeordneten Objekte (absolut gesehen) denselben Wirklichkeits-Status, während sich hier *an dem einem Punkt nur wirkliche, an dem anderen aber nur unwirkliche Objekte befinden*.

Das Wirken wahrer Sachverhalte

Die Wahrheit ist gegenüber der Falschheit durch ihren Bezug zur Wirklichkeit ausgezeichnet: Nur wahre Sachverhalten geben etwas vor, was „wirklich“ der Fall ist, so dass wir wahre Sachverhalte zu den „wirklichen“ Objekten (Aktualitäten) rechnen, sie also als *wirksam* ansehen. Falsche Sachverhalte sind dagegen unwirksame Vorgaben: Fiktionen oder Impossibilien, je nachdem, ob sie hätten wahr sein können oder nicht.[39] Aber *wie* wirkt ein wahrer Sachverhalt? Ich sehe hier vier mögliche Wirkweisen. *Erstens* wirken alle Wahrheiten, auch zeitlose, dadurch, dass sie andere Wahrheiten *begründen*:[40] So begründet jeder wahre Sachverhalt S mindestens einen (neuen) Sachverhalt, nämlich den, *dass S wahr ist*. *Zweitens* können zeitliche Wahrheiten (d. h. Ereignisse) dadurch wirken, dass sie ein anderes Ereignis als zeitliche Folge hervorrufen. *Drittens* können auch zeitlose Wahrheiten in Verbindung mit zeitlichen in der Zeit wirken, z. B. können die Naturgesetze unseres Raum-Zeit-Kontinuums zusammen mit den Anfangsbedingungen eines Systems den weiteren zeitlichen Verlauf des Systems determinieren. *Viertens* wirken manche wahren Sachverhalte, wie schon im Abschnitt über Wirkarten (oben S. 37–39) erwähnt wurde, auf sich selbst, indem sie sich selbst in Geltung

[37] Dagegen sind die *Aussagen* A, ≪nicht A≫ und ≪nicht nicht A≫ drei voneinander verschiedene Aussagen, von denen die erste und die letzte äquivalent (aber nicht gleich) sind.

[38] Denn ob z. B. der mit ≪X ist gerade≫ beschriebene Sachverhalt positiv und der mit ≪X ist nicht gerade≫ negativ ist, hängt von der Formulierung ab, man könnte ja den ersten Sachverhalt auch durch ≪X ist nicht krumm≫ beschreiben und den zweiten durch ≪X ist krumm≫.

[39] Allerdings kann man nicht sagen, dass sich der Unterschied zwischen Wahrheit bzw. Falschheit in diesem verschiedenen Wirklichkeitsbezug erschöpft. Wahrheit ist nämlich auch *unabhängig vom Verhältnis zur Wirksamkeit* gegenüber der Falschheit ausgezeichnet, und zwar durch das folgende rein logische Kriterium: Ist S ein wahrer Sachverhalt, so ist ≪S ist wahr≫ ein neuer wahrer Sachverhalt; ist dagegen S ein falscher Sachverhalt, so ist ≪S ist falsch≫ keineswegs ein neuer *falscher*, sondern wieder ein neuer *wahrer* Sachverhalt. So gibt es also eine rein logisch begründete „Asymmetrie“ zwischen Wahrheit und Falschheit.

[40] Wenn ein Sachverhalt wahr ist, „weil“ ein anderer es ist, so begründet der letztere den ersten. Z. B. kann der Sachverhalt, dass die Sonne scheint, den Sachverhalt begründen, dass es hell ist. Von dieser *Begründung* ist die logische *Implikation* (*Ableitung*) zu unterscheiden, die nur schließt, dass ein Sachverhalt wahr ist, „wenn“ (nicht: „weil“) ein anderer es ist. Die Implikation ist nur ein Zusammenhang, der unsere Erkenntnis vom einen Sachverhalt zum anderen leitet, ohne dass der eine den anderen begründen müsste.

setzen: Das sind die so genannten *notwendig wahren Sachverhalte*, deren Wahrheit von selbst einleuchtet. Ein *falscher Sachverhalt* kann dagegen überhaupt nichts bewirken (so kann z. B. auch ein notwendig falscher Sachverhalt keineswegs seine eigene Falschheit begründen), denn was immer ein falscher Sachverhalt S zu begründen scheint, ist in Wirklichkeit das „Werk“ des wahren Sachverhalts, *dass S falsch ist*.

Zum Vollkommenheitscharakter des Wirkens von Sachverhalten ist zu sagen, dass sie nicht nur vorbereitend oder ausgestaltend am Wirken beteiligt sind wie die Universen, sondern selbst als „aktive Einheiten“ angesehen werden können. Dennoch wirken und sind sie nicht „für sich“, sondern „handeln von anderen Objekten“ und „über andere Objekte“: Sachverhalte (z. B. Ereignisse, Naturgesetze, und logische Gesetze) können nicht für sich selbst bestehen, sondern setzen (wenigstens hypothetisch) Objekte anderer Art voraus, deren Verhalten sie beschreiben, und die dann selbst „realer“ sind als diese Sachverhalte, indem sie *für sich selbst* da sind und wirken.

Wirkliche Welt und mögliche Welten

Den *notwendig wahren* Sachverhalten stehen die *kontingent wahren* Sachverhalte gegenüber: Diese könnten unter Umständen auch falsch sein, so dass ihre Wahrheit in anderen wahren Sachverhalten begründet liegt. Entsprechend gibt es *kontingent falsche* und *notwendig falsche* Sachverhalte (solche, deren Verneinung kontingent wahr bzw. notwendig wahr ist). Zwar haben alle Sachverhalte im logischen Universum ihren festen Platz, indem sie entweder mit dem Wahrpunkt oder mit dem Falschpunkt koinzidieren (also gewissermaßen „in“ der Wahrheit bzw. Falschheit sind), aber bei den notwendigen Sachverhalten ist die „Verankerung“ in ihrem Wahrheitswert noch „fester“ als bei anderen, da sie unter keinen Umständen eine andere Position hätten haben können. Die kontingenten Sachverhalten dagegen sind solcherart, dass sie widerspruchsfrei einen anderen Wahrheitswert hätten annehmen können als sie tatsächlich angenommen haben. Die Eigenschaften „notwendig“ und „kontingent“ schreiben wir auch Objekten x zu, die keine Sachverhalte sind, und zwar heißt x *notwendig* oder *kontingent*, wenn dies für den Sachverhalt zutrifft, *dass x wirklich ist*.

Die tatsächliche Verteilung der Sachverhalte auf die beiden Wahrheitswerte im logischen Universum kann man die *wirkliche Welt* oder die *Wirklichkeit* nennen. Da die kontingenten Sachverhalte fiktiv hätten anders verteilt sein können, gibt es mehrere (und wie man leicht einsieht: unendlich viele) fiktive Verteilungen der Sachverhalte auf die beiden Wahrheitswerte. Solche Verteilungen nenne ich *fiktive Welten*, und fasse sie mit der wirklichen Welt zu den *möglichen Welten* zusammen.[41]

Die Bezeichnung „Welt“ besteht hier zu Recht. Denn die Entscheidung, welche von allen möglichen Welten die wirkliche Welt (also die tatsächliche Verteilung der Sachverhalte im logischen Universum) ist, entscheidet nicht nur darüber, welche *Sachverhalte*, sondern schlechthin welche *Objekte* wirklich sind und welche nicht, so dass dadurch nicht nur der Wirklichkeits-Status aller Sachverhalte, sondern auch der aller übrigen Seienden vollständig charakterisiert ist. Denn ob x ein wirkliches Objekt ist oder nicht, ist ja dadurch entschieden, welcher von den beiden *Sachverhalten*, *dass x wirklich ist* und *dass x nicht wirklich ist*, der wahre ist.

4.4.4 Wirkliche Attribute

Wie auf S. 32–34 erklärt wurde, kann man die konkreten Attribute eines Objekts einteilen in jenseitige, relative, akzidentielle und essentielle. Abgesehen von den jenseitigen, die mit dem Wirken des Objekt nichts zu tun haben, hängen die konkreten Attribute eines wirklichen Objekts mit des-

[41] Ihnen stehen noch die *unmöglichen Welten* gegenüber, die zu den Impossibilien gehören. Darunter sind z. B. solche, in denen notwendig wahre oder falsche Sachverhalte ihren Wahrheitswert vertauschen, oder auch solche, in denen die Kontradiktionsprinzipien nicht gelten, also Sachverhalte zugleich mit beiden Wahrheitswerten koinzidieren oder ein Sachverhalt und seine Negation denselben Wahrheitswert haben.

sen Wirken zusammen und sind daher selbst „wirklich“. Dass zunächst die *akzidentiellen* Attribute (Akzidentien) eines wirklichen Objekts mit seinem Wirken zu tun haben, ist klar, denn in diesen Attributen besteht ja gemäß der Erklärung auf S. 33 geradezu die Wirkentfaltung des Objekts.

Aber auch die *essentiellen* Attribute (Wesensattribute) sind wirkbezogen, denn da wir Objekte nur durch ihr Wirken erkennen können, nimmt jede Wesensbeschreibung auf ein Wirken Bezug. In der Tat beschreiben Wesensattribute immer eine „natürlichen Neigung“ oder „Hinordnung“ zum Wirken, indem sie „fordern“, dass ein Wirken geschehe und ein entsprechendes Wirkvermögen vorhanden sei. Beispielsweise pflegt man als eines der Wesensattribute des Menschen seine „Rationalität“ aufzuzählen. Damit kann nicht gemeint sein, dass der Mensch tatsächlich stets denken muss auch nur denken können muss, um Mensch zu sein. Menschen sind, wie Whitehead sagt, „nur zeitweise rational, neigen lediglich zur Rationalität“,[42] und genau diese natürliche Neigung oder Hinordnung ist mit der Wesenseigenschaft der Rationalität in der Definition des Menschen gemeint.[43] In dieser Weise also scheinen alle Wesensattribute auf das Wirken bezogen zu sein, und selbst das allgemeinste Attribut, das Sein, kann vor diesem Hintergrund als „allgemeinste Forderung zum Wirken“ gedeutet werden (die dann also auch bei unwirklichen Objekten besteht, aber unerfüllt bleibt).

Die Wesensattribute zeichnen somit ein Wirken vor, während die *Wirkvermögen*, durch welche dieses Wirken ausgeübt werden kann, ebenso wie die damit ausgeübten *Wirkakte* zu den Akzidentien zählen. Ein Wirkvermögen ist etwas, was von den Wesensattributen *gefordert* wird und daher *normalerweise* (wenn auch nicht notwendigerweise) vorhanden ist, während ein Wirkakt als ein Vollzug des Wirkvermögens nur zeitweise stattfindet. So ist beim Menschen die *Hinordnung auf das Denkenkönnen* Wesensattribut, das *tatsächliche Denkenkönnen* (*Denkvermögen*) ist bereits ein Akzidens, und darauf aufbauend ist erst recht das *tatsächliche Denken* ein Akzidens. Wesensattribute, Wirkvermögen und Wirkakte eines wirklichen Objekts sind diejenigen Attribute, die sein Wirken direkt betreffen, aber auch die übrigen betreffen es wenigstens indirekt, indem sie die Wirklichkeit seiner räumlich-zeitlichen Einordnung ausgestalten (etwa Farben, Gestalten, Töne) oder die Wirklichkeit seiner Stellung gegenüber anderen Dingen charakterisieren (die relativen Attribute).

4.4.5 Substanzen

Eine *Substanz* ist ein vollständiges Objekt, dass für sich selbst wirkt.[44] Mit „Vollständigkeit“ ist die schon im Abschnitt über Attribute (oben S. 34) beschriebene dreifache Unabhängigkeit von anderen

[42] Whitehead, *Process* part 2 chapter 2 section 5 S. 122, Ausgabe Griffin/Sherburne S. 79, Ausgabe Holl S. 159: „only intermittently rational – merely liable to rationality“.

[43] Deshalb kann jemand auch dann ein Mensch sein, wenn er gerade nicht denkt, oder wenn er diese Fähigkeit noch nicht voll entwickelt hat, und sogar auch dann, wenn er aufgrund von Hindernissen in seiner natürlichen Entwicklung gehemmt wird und darum die von seinem Wesen her geforderte Denkfähigkeit tatsächlich nie erlangt.

[44] Es gibt in der Philosophie verschiedene Definitionen der Substanz. Für die aristotelisch-thomistische Philosophie ist sie „das Grundwesen, dem es zukommt, für sich zu sein und nicht an einem anderen“ (Gredt, *Elementa* Band 1 S. 146, deutsche Ausgabe S. 92; vgl. Band 2 S. 120–133, deutsche Ausgabe S. 109–120). Das würde auch für fiktive vollständige Seiende zutreffen. Nach Leibniz ist für die Substanz dagegen charakteristisch, ein wirkfähiges Seiendes zu sein: „un Être capable d'Action“ (Leibniz, *Natur und Gnade* § 1, Schriften Band 1 S. 414; ähnlich Farrer, *Infinite* S. 245). Descartes definiert die Substanz als „ein Ding, dass so existiert, dass es zu seiner Existenz keines anderen Dinges bedarf“ (Descartes, *Principia* Teil 1 § 51, Ausgabe Buchenau S. 17; vgl. Werke Band 8/1 S. 24 Zl. 21–23, Werke Band 9/2 S. 47), was Spinoza verschärft zu der Bestimmung, Substanz sei, „was in sich selbst ist und durch sich selbst begriffen wird“ (Spinoza, *Ethik* Teil 1 Def. 3, Ausgabe Bartuschat S. 5). Die letzten beiden Definitionen scheinen zu weit zu gehen, weil ihnen zufolge eigentlich nur Gott eine Substanz wäre. Diese Konsequenz hat Spinoza explizit vollzogen (*Ethik* Teil 1 Lehrsatz 14, Ausgabe Bartuschat S. 30f). Auch Descartes hat sie gesehen (a.a.O.), weshalb er neben der eigentlichen Substanz (= Gott) noch einen untergeordneten Substanzbegriff einführte, der geschaffene Körper und Geister zusammenfassen soll als diejenigen Dinge, „die bloß Gottes Beistand zu ihrem Dasein bedürfen“ (*Principia* Teil 1 § 52, Ausgabe Buchenau S. 18, vgl. Werke Band 8/1 S. 25 Zl. 2–3; Band 9/1 S. 47).

Objekten gemeint, dass nämlich das Objekt kein Sachverhalt, keine willkürliche Zusammenstellung anderer Objekte und kein willkürlicher Ausschnitt aus einem Objekt ist. Das „für sich Wirken“ soll schließlich den Gegensatz zum Wirken der Attribute und Sachverhalte ausdrücken, deren Wirken sich wesentlich auf andere Objekte bezieht.

Eine Substanz nenne ich *rein materiell* (oder einen *Körper*), wenn sie in ein räumliches oder raum-zeitliches Universum eingeordnet ist (das heißt dort durch Einordnung gegenwärtig ist; siehe S. 40). Materialität ist demnach dasselbe wie raumbezogene Substanzialität.[45] Ist die Substanz weder ganz noch teilweise in ein räumliches Universum eingeordnet, nenne ich sie *immateriell*, *unkörperlich* oder *geistig*, und unter einer *materiell-geistigen* Substanz verstehe ich eine solche, die nur teilweise in ein räumliches Universum eingeordnet ist.

Die vollkommenheitsmäßig untersten Substanzen sind diejenigen, die von Natur aus die in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Lebenstätigkeiten nicht ausüben können. Als mögliche Form inneren Wirkens bleibt für diese *unbelebte Substanzen* nur die partielle Selbstbegründung übrig, wie sie etwa einem Elementarteilchen in Bezug auf seine Erhaltungsgrößen zukommt.[46] Standardbeispiele für unbelebte Substanzen sind Atome, Moleküle, Minerale und Sterne. Die uns gut bekannten unbelebten Substanzen sind alle dreidimensional ausgedehnt, aber möglicherweise gibt es auch nicht-ausgedehnte (punktförmige) materielle Substanzen,[47] und auch immaterielle unbelebte Substanzen kann man nach obiger Definition nicht ausschließen.[48]

Substanzen, die sich kraft inneren Wirkens selbst unbegrenzt entfalten können, heißen *Lebewesen*. Als spezifische Wirkweisen für Lebewesen wurden in Abschnitt 4.4.1 Fortpflanzung und Erkennen beschrieben, wobei sich zeigte, dass Erkenntnis schlechthin vollkommener als Fortpflanzung ist. Es ist daher sinnvoll, die von ihrem Wesen her nicht mit Erkenntnis begabten Lebewesen als *unbewusste Lebewesen* zusammenzufassen und sie nach den unbelebten Substanzen auf die nächst höhere Stufe zu stellen, die mit Erkenntnis begabten dagegen auf die übernächste. Beispiele für unbewusste Lebewesen sind wahrscheinlich die Pflanzen.

Vollkommener als die unbewussten sind die mit Erkenntnis und somit Bewusstsein ausgestatteten Lebewesen, die man *Bewusstseinswesen* nennen kann. Da nun geistiges Erkennen vollkommener ist als sinnliches (siehe S. 24–25), stehen direkt über der Stufe der unbewussten Lebewesen die *nur* mit sinnlicher Erkenntnis ausgestatteten Bewusstseinswesen, d. h. die *nichtpersonalen Bewusstseinswesen*, und über diesen dann die mit geistiger Erkenntnis ausgestatteten, die *Personen*. Beispiele

---

[45] Das Wesen der Materie ist umstritten. Im *Materialismus* wird jede bewusstseinsunabhängige objektive Realität als Materie bezeichnet (vgl. Lenin, *Materialismus*, Werke Band 14 S. 260 und Fiedler et al. [Hg], *Dialektischer Materialismus* S. 66–71; vgl. auch Dühring, *Philosophie* S. 73); immateriell wären dann nur die Impossibilien. Für den *Thomismus* ist der Bezug zum Erkennen das Entscheidende: Immaterialität ist die „Wurzel des Erkennens“ (vgl. Gredt, *Elementa* Band 1 S. 362, deutsche Ausgabe S. 302), so dass rein materielle Körper nichterkennende Substanzen sind. Für Descartes ist dagegen der materielle Körper identisch mit dem räumlich Ausgedehnten (vgl. Descartes, *Principia* Teil 2 § 4, Werke 8/1 S. 42, Werke 9/2 S. 65, Ausgabe Buchenau S.32f), für Locke ist er das räumlich Ausgedehnte und zugleich mit Undurchdringlichkeit Ausgestattete (vgl. Locke, *Essay* Buch 2 Kap. 13 § 11, Ausgabe Yolton Band 1 S. 137, Ausgabe Brandt Band 1 S. 197). Unsere Definition umfasst als materielle Körper nicht nur ausgedehnte, sondern auch punktförmig in ein räumlichen Universum eingeordnete Wirklichkeiten. Diese Definition lehnt sich an den frühen Leibniz an: „Corporis ... definitio est esse in spatio“ (Leibniz, *Confessio contra atheistas*, Ausgabe Erdmann S. 47). Später sah Leibniz im Körper eine aus mehreren Kraftpunkten (Monaden) zusammengesetzte Substanz (Leibniz, *Monadologie* § 1, Schriften Band 1 S. 414f).

[46] Vgl. Fußnote 13 auf S. 37.

[47] Manchmal wird vermutet, dass die Elementarteilchen von dieser Art sein können (siehe S. 668). Wenn man mit Descartes das Wesen von Materialität in der Ausdehnung sieht (siehe Abschnitt 8.11.4), müsste man solche Substanzen geistig nennen.

[48] Von dieser Art sind vielleicht die Psychonen, aus denen sich nach der Hypothese des Gehirnforschers Eccles die Seele zusammensetzt (siehe Fußnote 38 auf S. 782). Immaterielle unbelebte Substanzen wären allerdings ausgeschlossen, wenn man mit dem Thomismus das Wesen der Materialität im Mangel an Erkenntnisfähigkeit sieht, so dass immaterielle Substanzen notwendigerweise mit Erkennen ausgestattet wären.

für nichtpersonale Bewusstseinswesen sind wahrscheinlich alle uns bisher bekannten Tiere.[49]

Demgegenüber ist der Mensch eine Person. Allerdings ist sein Erkennen anscheinend (wenigstens in diesem Leben) niemals rein geistig (siehe S. 24–26) und seine thematische Selbsterkenntnis ist immer nur teilweise möglich und unvollkommen, insofern sie stets von sinnlich-unthematischem Erkennen begleitet ist. Wenn nun ein sich selbst erkennendes Wesen genau so *ist*, wie es sich *erkennt*, so kann man schließen, dass die menschliche Person kein reines, sich voll erkennendes Bewusstsein ist und dass folglich etwas Außerbewusstes zur menschlichen Person hinzugehört: ihr „Körper", den sie als in den Raum eingeordnet erfährt. So steht die menschliche Person auf einer unteren Stufe von Personalität, man kann sie als *sinnlich-geistige* Person oder noch genauer als *materiell-sinnlich-geistige* Person bezeichnen.

Darüber hinaus kann man sich eine Person denken, die rein thematisch erkennen kann. Diese wäre mit ihrem geistigen Ich voll identisch, also reines Bewusstsein. Derartige hypothetische Personen kann man *rein-geistige Personen* oder *reine Geister* nennen. Reine Geister mit der zusätzlichen Eigenschaft, in unser Raum-Zeit-Kontinuum hinein wirken zu können, kann man mit den *Engeln* der jüdisch-christlich-islamischen Tradition identifizieren.[50]

4.4.6 Ausblick

In gewisser Hinsicht ist unser Durchgang durch die Seins-Stufen nun abgeschlossen. Es wäre aber noch zweierlei zu ergänzen. Zum einen wurde noch nicht über *Gott* geredet. Gott müsste natürlich, wenn überhaupt, „ganz oben" auf der höchsten Seinsstufe angesiedelt werden. Dies ist aber in einem eigenen Abschnitt zu erörtern (siehe Abschnitt 9.4.15). Zum anderen wurde der Begriff der *Vielheit* noch nicht erklärt. Dieser ist für unser Thema sehr wichtig, da es in erster Linie die Vielheiten sind, denen wir unter Umständen Unendlichkeit zuschreiben. Vielheiten aber können aus Seienden aller möglichen Arten „bestehen", die dann „Bestandteile" der Vielheit heißen. So kann eine Vielheit aus zwei wirklichen Seienden, aber auch aus einem wirklichen und einem nur möglichen bestehen, aus zwei Akzidentien ebenso wie aus zwei Punkten oder aus zwei göttlichen Personen. Diese Universalität der Vielheiten ist zusammen mit der Universalität des Denkens ein Grund für die universelle Tragweite der Mengenlehre und damit der Mathematik. Wegen ihrer alle Seins-Kategorien durchbrechenden Universalität („Transzendentalität") gehört aber das Thema „Vielheiten" nicht mehr zur Exposition der Klassen des Seienden, sondern ist im folgenden Abschnitt zu behandeln, der den transzendentalen Gegebenheiten gewidmet ist (siehe Abschnitt 4.5.5).

Hier sei aber noch bemerkt, dass man Vielheiten ebenfalls den beschriebenen Seinsstufen zuordnen kann, und zwar sollte man sinnvollerweise eine Vielheit immer auf die *unterste* Stufe setzen, zu der mindestens ein Bestandteil der Vielheit gehört. Wenn also z. B. auch nur ein einziger Bestandteil einer Vielheit zu den Impossibilien gehört, zählen wir darum auch die ganze Vielheit zu den Impossibilien, d. h. betrachten sie als widersprüchlich.

[49] Vgl. hierzu die Ansicht des Gehirnforschers Eccles, wonach „Tiere, wenn sie Bewusstsein besitzen, dennoch kein Selbstbewusstsein ... haben" (Popper und Eccles, *Self*S. 524). Auch Popper schreibt Tieren nur eine „nicht-selbstbewusste Bewusstheit" zu (ebd. S. 531; vgl. ebd. S. 589, 612f, 635, 650f und 659).

[50] Philosophisch können wir natürlich nicht die wirkliche Existenz dieser Wesen beweisen, sondern nur ihre Existenzmöglichkeit einsehen. Zumindest existieren also widerspruchsfreie Fiktionen solcher Wesen.

4.5 Transzendentale Gegebenheiten

Nach der Exposition der verschiedenen Seinsstufen sollen nun die „transzendentalen Gegebenheiten“ erörtert werden, die das Seiende als solches charakterisieren.

4.5.1 Transzendentalien

Unter *Transzendentalien* versteht man Attribute, die jedem Seienden zukommen, die man also von jedem Seienden aussagen kann. In der scholastischen Tradition sind dies die folgenden:

> ens (Seiendes), res (Ding), aliquid (etwas), unum (eins), verum (wahr), bonum (gut),[51] und als siebtes Transzendentale gilt manchmal noch das pulchrum (schön).

Jedes Seiende ist demzufolge ein Seiendes, ein Ding, ein Etwas, eins, wahr, gut und schön. Das Seiende wurde *wahr* genannt, weil es *erkennbar*, und *gut*, weil es *anstrebbar* ist. *Schönheit* wurde als „Einheit von Wahrheit und Gutheit“ definiert. Diese drei Transzendentalien nannte man wegen ihres Bezugs zum Erkennen und Wollen *relativ*, die übrigen aber *absolut*, weil sie dem Seienden unabhängig von irgendwelchen Bezügen zukommen. Ich würde nun die folgenden fünf Attribute als bedeutsame Transzendentalien ansehen.

1. *Wahrheit*. Die scholastische Philosophie hat richtig erkannt, dass alles Seiende denkbar sein muss.[52] Dies scheint die am leichtesten einsehbare Eigenschaft aller Seienden zu sein, und verdient darum, als Transzendentale aufgeführt zu werden.[53]

2. *Gutheit*. Die scholastische Gleichsetzung von Gutheit mit „Anstrebbarkeit durch den Willen“ scheint mir nicht hinreichend zu sein. Wie in Fußnote 4.4.1 auf S. 37 ausgeführt, umfasst Gutheit (mindestens) drei Dimensionen, nämlich neben dem Aspekt des Angestrebtwerdens auch jenen der selbstlosen Hingabe und der vom Streben unabhängigen Werthaftigkeit. Die Gutheit ist letztlich die Ähnlichkeit mit der so bestimmten *Idee des Guten*, mit der *jedes* Seiende verglichen werden kann. Daher ist Gutheit ein Transzendentale.[54]

3. *Macht*. Neben Wahrheit und Gutheit scheint es noch ein weiteres relatives Transzendentale zu geben, das in der scholastischen Transzendentalien-Liste nicht auftaucht, nämlich Macht. Denn jedes Seiende hat, wie wir gesehen haben, eine mehr oder weniger große Macht im Sinne von Realität oder Selbständigkeit gegenüber dem Denken und anderen Seienden.

---

[51] Vgl. Suárez, *Disputationes* 3 sectio 2 § 1 Ausgabe Berton Band 1 S. 107b und Gredt, *Philosophie* Band 2 S. 11–31, deutsche Ausgabe S. 9–25.

[52] Vgl. das von Thomas von Aquin ausgesprochene Prinzip universaler Intelligibilität (Fußnote 1 auf S. 28).

[53] Dagegen, dass dieses Transzendentale „Wahrheit“ genannt wird, könnte man allerdings einwenden, dass Wahrheit im eigentlichen Sinn nur bestimmten, nicht aber allen Seienden zugesprochen werden kann: nämlich nur den (wirklich bestehenden) Sachverhalten. Im weiteren Sinn kommt Wahrheit gewissen Urteilen und Aussagen zu, und schließlich Personen mit dem Bestreben, wahre Urteile zu fällen und auszusprechen (doch spricht man hier besser von *Wahrhaftigkeit*). Insofern aber das Denken in erster Linie auf das Erkennen von wahren Sachverhalten (Wahrheiten) hinzielt, ergibt sich ein gewisses Recht, den Begriff der Wahrheit im weitesten Sinn auf alles Denkbare auszudehnen.

[54] Man könnte einwenden, dass man auf gleiche Weise zu jedem beliebigen Objekt X als ein besonderes Transzendentale die X*-haftigkeit* einführen könnte, weil jedes Seiende mit X verglichen werden kann. Das ist richtig, aber alle diese unendlich vielen X-haftigkeiten drücken im Wesentlichen dasselbe aus: die allgemeine Vergleichbarkeit und damit Zusammengehörigkeit der Seienden, also das, was mit dem später zu besprechenden Transzendentale der *Einheit* ausgesagt wird. Mit der Gutheit dagegen ist die Ähnlichkeit der Seienden mit einer *ausgezeichneten* Idee ausgesagt, die ein *nicht-willkürlich* gewählter Maßstab für die Vollkommenheit jedes einzelnen Objekts ist.

4. *Sein und Wesen.* Für jedes Seiende trifft es zu, *dass* es in irgendeinem wenn auch noch so schwachen Sinn *das Nichtsein von sich abstößt*,[55] und dass es inhaltlich abgegrenzt ist, also *anderes Sein von sich abstößt.* Im Blick auf die erste Tatsache schreibt man dem Seienden eine das Nichtsein abstoßende Kraft zu, die man sein *Sein* nennt, und im Blick auf die zweite Tatsache eine Grenze, die man sein *Wesen* nennt.[56] Dieses Wesen ist als *transzendentales* Wesen sowohl von dem *physischen* als auch von dem *metaphysischen* Wesen des Seienden zu unterscheiden.[57] Da jedes Seiende also durch sein Sein und sein Wesen charakterisiert ist, sind die Attribute des Seins und des Wesens (genauer: des Sein-Habens und Wesen-Habens) weitere, und zwar absolute Transzendentalien.[58] Das Transzendentale „Sein-Haben“ entspricht dem „ens“ (das Seiende = das Sein Habende) in der scholastischen Tranzendentalien-Liste, und das „Wesen-Haben“ vielleicht dem „aliquid“ (Etwas).

5. Dass jedes Seiende ein „unum“ (eine Einheit) ist, könnte man mit Blick auf die noch zu besprechenden Vielheiten bezweifeln. Doch operiert man im Denken auch mit einer Vielheit stets so, als sei sie *ein* Etwas: Man spricht ja von *einer* Vielheit. Der Grund dafür ist, dass die Vielheit im Denken „zusammenfassbar“ wird (wenngleich dies bei inkonsistenten Vielheiten eine widersprüchliche Zusammenfassung sein kann). Sie bilden darum immer eine Einheit in einem mehr oder weniger strengen Sinn. So ist die Einheit ein Transzendentale.

Die übrigen Transzendentalien der Scholastiker (Schönheit und Ding) können als überflüssig beiseite getan werden.[59] Die hauptsächlichen Transzendentalien sind somit *wahr, gut, mächtig, eins, Wesen habend und Sein habend.* Handelt es sich bei diesen Attributen um verschiedene „Teile“ des Seienden? Diesbezüglich behauptet der Thomismus, dass es eine reale Verschiedenheit von Sein und Wesen gäbe, andere leugnen dies. Um hier entscheiden zu können, müssen wir Klarheit darüber gewinnen, welche grundlegenden Klassen von Unterschieden und Identitäten es gibt.

4.5.2 Unterschiede und Identitäten

Man betrachtete in der Scholastik die folgenden Arten von Unterschieden:[60]

1. reale Unterschiede,
2. rein gedankliche Unterschiede,
3. Unterschiede, die weder real noch rein gedanklich sind, nämlich:
   a) virtuelle Unterschiede = gedankliche Unterschiede mit sachlichem Fundament, und
   b) formale Unterschiede.

---

[55] Das gilt, wie wir gesehen haben, auch für das Nichts, insofern auch dieses dem Denken „gegeben“ und daher im Denken „anwesend“ sein kann.

[56] Die Lehre von Sein und Wesen geht auf Alfarabi (siehe S. 708) zurück und wurde vor allem von Thomas von Aquin und Francisco Suárez weiterentwickelt (vgl. dazu Coreth, *Metaphysik* § 25 S. 187–194). Vgl. auch die weiterführenden Ideen von Coreth (ebd. § 24–29 S. 178–215).

[57] Zum physischen und metaphysischen Wesen siehe S. 33 mit Fußnote 7.

[58] Im Vorgriff auf die Gotteslehre könnte man einwenden, dass Gott ein unbeschränktes Sein hat und ihm daher kein Wesen zukommen könne. Doch auch Gott muss ein Wesen haben, das allerdings einzigartig ist. Das Wesen eines nicht-göttlichen, eingeschränkten Seienden erfüllt nämlich seine Aufgabe dadurch, dass es das Sein einschränkt, also die Nichtseins-ausschließende Wirkung des Seins teilweise aufhebt. Bei Gott dagegen *besteht die Wesensgrenze gegenüber den eingeschränkten Seienden gerade darin, dass eine solche Einschränkung fehlt.* Statt zu sagen, dass bei Gott das Wesen fehlt, sagt man also besser, dass hier *Sein und Wesen identisch* sind.

[59] Bei der Schönheit ist dies schon aus der Definition („Einheit von Wahrheit und Gutheit“) ersichtlich. Dasselbe gilt für den Ausdruck „Ding“, den man etwa als „Einheit von Sein und Wesen“ definieren könnte.

[60] Vgl. Gredt, *Elementa* Band 1 S. 102–104, deutsch Ausgabe S. 70–73; Pohle, *Dogmatik* Band 1 S. 74-77; Scheeben, *Dogmatik* Band 1 § 73 S. 526–530; Suárez, *Disputationes* 7, Ausgabe Berton Band 1 S. 250a–274b; Schell, *Dogmatik* Band 1 S. 245–247.

Ein *realer Unterschied* ist ein objektiver: Es liegen zwei Objekte vor. Dagegen liegt bei einem *rein gedanklichen Unterschied* eigentlich nur ein einziges Ding vor, das dadurch vervielfacht wird, dass man es durch verschiedene Gedanken erfasst, wobei dieses verschiedene Denken von der Natur der Sache her nicht erforderlich ist: z. B. dieselbe Kugel, einmal von links, einmal von rechts betrachtet. Zwischen diesen beiden Extremen sollen der virtuelle und der formale Unterschied liegen, wobei der virtuelle dem rein gedanklichen, der formale aber dem realen Unterschied näher steht. Die Thomisten treten für die Alleinberechtigung des virtuellen Unterschieds ein, während die Scotisten diesen verwerfen und durch den formalen ersetzen: Einen *virtuellen Unterschied* (distinctio rationis cum fundamento in re) sehen die Thomisten dort, wo – ganz wie beim rein gedanklichen Unterschied – eigentlich nur in Gedanken unterschieden wird, diese Unterscheidung aber ein „sachliches Fundament" besitzt, d. h. der Sache angemessen ist und von ihr objektiv gefordert wird. Was dann im Objekt vorliegt, soll zwar kein objektiver *Unterschied*, wohl aber eine objektive *Unterscheidbarkeit* sein, die durch den Verstand aktualisiert wird, indem er verschiedene Begriffe bildet. Für die Scotisten liegt dagegen immer dann, wenn wir objektiv genötigt sind, ein real ungeteiltes Ding durch verschiedene Begriffe zu beschreiben, ein *formaler Unterschied* vor, denn es gibt dann im Ding selbst verschiedene „Formalitäten" (z. B. im Menschen: seine Vernünftigkeit und Lebendigkeit).

Die Problematik des virtuellen Unterschieds liegt darin, dass unklar ist, welcher Natur das „sachliche Fundament" der „objektiven Unterscheidbarkeit" sein soll, wenn sich im Ding selbst *gar nichts* unterscheiden soll.[61] Logisch klarer ist der „formale Unterschied" konzipiert, wobei die scotistischen „Formalitäten" offenbar nichts anderes sind als konkrete Attribute. Eine Schwachstelle in der scotistischen Lehre ist allerdings, dass der formale Unterschied eigentlich gar nicht wesentlich andersartig ist als der reale. Der einzige Grund zum Auseinanderhalten dieser Unterschieds-Arten soll der sein, dass es beim realen Unterschied „Dinge" und beim formalen „Formalitäten" sind, die sich unterscheiden. Demgegenüber sollte man doch aber erwarten, dass verschiedene *Unterschieds*-Arten wirklich *als Unterschiede*, also *in der Art ihres Unterscheidens* verschieden sind: Für die Einteilung von Unterschieden sollte es keine Rolle spielen, *was für* Objekte, sondern *wie* Objekte sich unterscheiden.

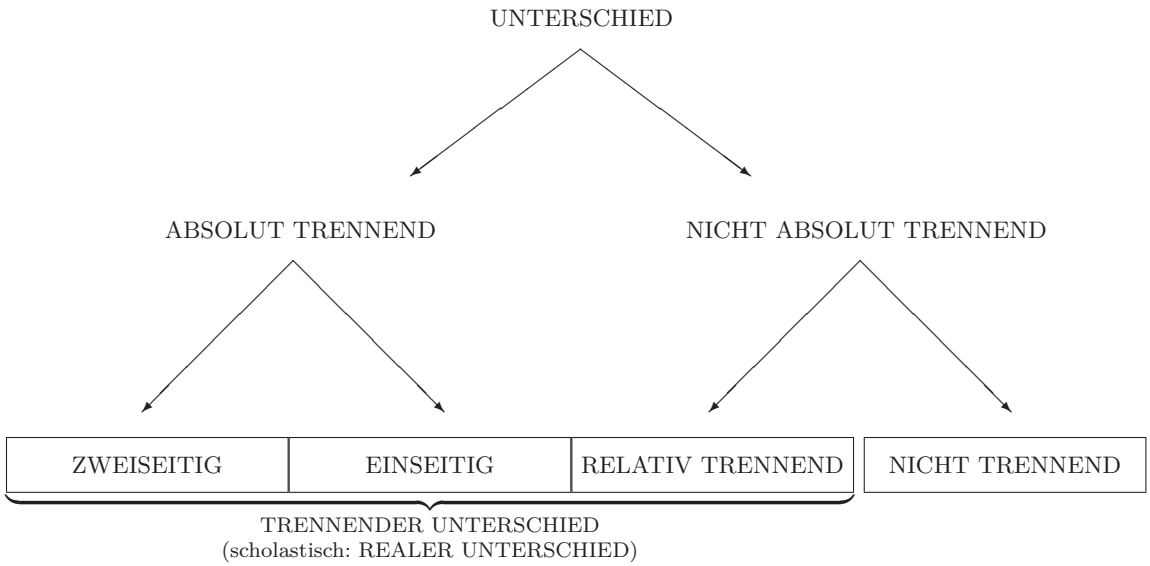
Unter diesem Aspekt wäre nun die Unterschiedslehre neu zu bedenken. Zunächst muss klargestellt werden: Objekte A und B sind entweder identisch oder verschieden; einen dritten Fall gibt es nicht. Im ersten Fall handelt es sich eigentlich nur um ein einziges Objekt, also kann man nur im zweiten Fall sinnvollerweise fragen, welcher Art der Unterschied ist. Hier sehe ich zunächst zwei wesentlich verschiedene Arten: entweder ist eines der Objekte A und B widerspruchsfrei ohne das andere denkbar, oder die Objekte sind ineinander inbegriffen (derart dass keines von ihnen widerspruchsfrei ohne das andere gedacht werden kann).

Ist mindestens eines der Objekte widerspruchsfrei ohne das andere denkbar, möchte ich von einem *absolut trennenden Unterschied* reden. Dieser zerfällt sofort in zwei Unterarten: Entweder gilt für *jedes von beiden*, dass es problemlos ohne das jeweils andere gedacht werden kann (so etwa die zwei Hälften einer Kugel), oder *nur eines* der beiden kann widerspruchsfrei ohne das andere gedacht werden (Beispiel: bei einer rot gefärbten Oberfläche kann das Rot dieser Oberfläche nicht ohne die Oberfläche, diese aber ohne das Rot gedacht werden). Im ersten Fall liegt ein *zweiseitiger*, im zweiten ein *einseitiger* absolut trennender Unterschied vor. Liegt aber *gar kein absolut trennender* Unterschied vor, sind also beide Objekte ineinander inbegriffen, kann es trotzdem noch ein grundsätzliches Gegenüber zwischen ihnen geben, zum Beispiel dann, wenn beides sich gegenüberstehende Relationen sind (so stehen sich Elternschaft und Kindschaft als Relationen gegenüber, und doch kann das eine nicht widerspruchsfrei ohne das andere gedacht werden). In diesem Fall spreche ich von einem *relativ trennenden Unterschied*. Zusammen mit dem absolut trennenden Unterschied fasse ich ihn

[61] Vgl. die Beschreibung des Suárez: „ratio ... per modum distinctiorum concipit, quae distincta non sunt" (Suárez, *Disputationes* 7 sectio 1 § 6, Ausgabe Berton Band 1 S. 251b).

als *trennenden Unterschied* zusammen. Sind schließlich beide Objekte ineinander inbegriffen, *ohne* dass sie sich als Relationen gegenüberstehen, spreche ich von einem *nicht-trennenden Unterschied*. Ein Beispiel wäre das Universum und die Vielheit seiner Punkte: Eines kann nicht ohne das andere gedacht werden, und doch handelt es sich um verschiedene Realitäten (siehe Fußnote 20 auf S. 40).

Vergleicht man diese Unterschiede mit den scholastischen Begriffen, so muss der trennende Unterschied im Sinne der Scholastik als realer Unterschied bezeichnet werden, während der nicht-trennende von den Scholastikern als eine vom realen Unterschied verschiedene Art des Unterschieds aufgefasst werden würde, also – je nach Schule – als formaler oder virtueller Unterschied.



Hierbei ist der größte Unterschied der zweiseitig absolut trennende, dann kommt der einseitig absolut trennende, dann der relativ trennende, dann der nicht-trennende. Man könnte diese Liste noch durch ein uneigentliches Glied ergänzen: Hinter dem „nicht-trennenden Unterschied“ käme als noch kleinerer Unterschied der nur gedachte Unterschied (= gar kein Unterschied). Andererseits kann man den „zweiseitig absolut trennenden Unterschied“ noch einteilen durch verschiedene Stufen des *tatsächlichen Auseinander*. Der zweiseitig absolut trennende Unterschied besagt ja nur, dass Objekte vorliegen, von denen jedes ohne das andere gedacht werden kann, und dies begründet die Möglichkeit, dass die Objekte in verschiedener Weise und verschiedenem Ausmaß „auseinander“ sein können (z. B. indem sie mehr oder weniger räumlich oder zeitlich voneinander entfernt sind, oder indem sie an der Bestimmung von mehr oder weniger vielen Dingen gemeinsam beteiligt sind). Wichtig ist aber die Feststellung, dass nicht widerspruchsfrei von einem *totalen Unterschied* gesprochen werden kann: Wann immer Objekte gegeben sind, sind diese vergleichbar, das aber heißt: man kann sie vergleichend nebeneinander stellen und allein dies ist schon eine Gemeinsamkeit.

Die Arten des Unterschieds könnte man umgekehrt auch als Arten der Identität oder Gleichheit auffassen, wobei nun größere Unterschiede als kleinere Identitäten (Gleichheiten) aufzufassen sind und umgekehrt. Ich schlage diesbezüglich folgende Terminologie vor:

1. Liegt *kein* Unterschied vor, haben wir eine *unterschiedslose* Identität oder *Selbigkeit*,
2. ein *nicht-trennender* Unterschied heiße *gleichförmige* Identität,
3. ein *relativ trennender* Unterschied *differenzierte* Identität,
4. ein *einseitig absolut trennender* Unterschied heiße *inkongruente* Identität
5. ein *zweiseitig absolut trennender* Unterschied heiße *kumulative* Identität.

Nun lässt sich die Frage nach der Art des Unterschieds zwischen den Transzendentalien in ein und demselben Seienden beantworten. Da in jedem Seienden dessen Transzendentalien vorhanden sein müssen, können sie im Denken nicht widerspruchsfrei voneinander getrennt werden: Sie sind ineinander inbegriffen. Andererseits sind sie natürlich nicht unterschiedslos identisch, denn wir meinen mit Sein, Wesen, Wahrheit, Gutheit, Macht offenbar durchaus etwas je Verschiedenes. Somit waltet zwischen ihnen ein *nicht-trennender* Unterschied oder *gleichförmige* Identität. Der reale Unterschied, den der Thomismus zwischen Wesen und Sein behauptet, wäre dann also abzulehnen, aber das berechtigte Anliegen der thomistischen realen distinctio, nämlich das metaphysische Gefälle zwischen Sein und Wesen zu betonen, kann ebenso auch durch den nicht-trennenden Unterschied aufgegriffen werden, besonders wenn man die Objektivität dieses Unterschieds betont.

4.5.3 Transzendentale Unendlichkeiten in jedem Seienden

Der zwischen den Transzendentalien eines Seienden bestehende „kleinste“ aller Unterschiede, der nicht-trennende Unterschied, reicht aus, um eine erstaunliche Unendlichkeit im Bereich eines jeden Seienden aufzudecken. In einem Seienden S unterscheiden sich dessen Transzendentalien (Wahrheit, Gutheit, Macht, Einheit, Wesen, Sein) untereinander und natürlich auch von S. Jedes Transzendentale aber ist selbst ein Seiendes, hat also ebenfalls Transzendentalien: So gibt es ein Sein des Seins von S, ein Wesen des Seins von S, eine Wahrheit des Seins von S usw. Da dies Transzendentalien von Transzendentalien von S (also Attribute von Attributen von S) sind, nennen wir sie *Attribute zweiten Grades* von S. Die Attribute zweiten Grades von S sind natürlich wieder Seiende und haben darum ebenfalls Attribute, zu deren Kernbestand fünf transzendentale Attribute gehören. Alle Attribute von Attributen von Attributen mögen *Attribute dritten Grades* heißen. Es ist nun klar, dass man auf diese Weise fortfahrend unendlich viele Grade von Attributen von S definieren kann.[62] Insbesondere induziert jedes Seiende S die unendliche Attributenkette:

S, Sein von S, Sein des Seins von S, Sein des Seins des Seins von S ...

Diese Konsequenz hat der Thomismus trotz des behaupteten realen Unterschieds zwischen Sein und Wesen nicht gezogen. Man kann ihr aber nur entgehen, wenn man behauptet, dass Sein und Wesen selbst *keine* Seienden sind, sondern etwa „Konstitutiva“ des Seienden. Doch dann gäbe es außer Seiendem noch etwas anderes, und so wäre das Seiende nicht mehr der allgemeinste Gegenstand des Denkens, als welcher er ursprünglich konzipiert war. Eine ähnliche Kette unendlich vieler Bestimmungen wird erkennbar, wenn man beachtet, dass der Unterschied U zwischen zwei Attributen A und B eines Seienden S stets ein sowohl von A als auch von B verschiedenes Attribut zweiter Art von S ist. Weiter ist dann der Unterschied U' zwischen U und A ein Attribut dritten Grades, der Unterschied U'' zwischen U' und A ein Attribut vierten Grades usw.[63] So sind in einem beliebigen Seienden stets unendlich viele Attribute inbegriffen, zumindest wenn man Attribute höheren Grades mit hinzurechnet. Aber auch dann, wenn man nur mit Attributen ersten Grades rechnet, ergibt sich eine Unendlichkeit von Attributen für jedes Seiende S. Ist nämlich X ein beliebiges von S verschiedenes Seiendes, so besitzt S das Attribut des Nicht-X-Seins, und da es – wie inzwischen deutlich geworden ist – unendlich viele solche X gibt, besitzt S unendlich viele derartige Attribute.

[62] Auf eine derartige unendlichen Reihe hat schon Platon in seinem Dialog *Parmenides* hingewiesen, wo er Parmenides ausführen lässt, dass das „seiende Eine“ zunächst zwei Teile (Sein oder Seiendes und das Eine, οὐσία oder ὄν und ἕν) hat, von denen jeder Teil seinerseits wieder auf diese Zweiteilung Anspruch hat und so weiter bis ins Unendliche (Platon, *Parmenides* Kap. 13, 142b3–143a3, Ausgabe Zekl S. 54–57). Siehe auch Abschnitt 8.1.8.

[63] Auch hier ist an Platons Dialog *Parmenides* zu erinnern (siehe Fußnote 62), wo Parmenides in dem „seienden Einen“ neben „Sein“ und „Eins“ als drittes noch den „Unterschied“ (ἕτερον) zwischen Sein und Eins findet und mit diesen Prinzipien die Existenz der Zahlen und unendlich vieler Seiender beweist (vgl. Platon, *Parmenides* Kap. 13, 143b1–144a7, Ausgabe Zekl S. 56–59; siehe auch Abschnitt 8.1.8.).

4.5.4 Individuen und Teile

Ein *Individuum* ist nach der Wortbedeutung ein *Ungeteiltes*, während sich *Vielheiten* aus Teilen zusammensetzen. Nun könnte eine Vielheit zwar aus Teilen bestehen, von denen jeder wieder teilbar ist; konzeptionell einfacher sind aber sog. *wohlfundierte* Vielheiten, die sich letztlich aus *kleinsten Teilen* („Bestandteilen") zusammensetzen, also aus Individuen bestehen. Solche Vielheiten werden zum Aufbau einer realistischen Mengenlehre benötigt. Wenn wir also die Individuen gefunden haben, stehen uns zugleich auch die wohlfundierten Vielheiten zur Verfügung. Da nun Individuen ungeteilt sein sollen, ist zunächst zu klären, was „Teile" sind. Klare Beispiele von Teilen sind zunächst *physische Teile*, die wir wie folgt definieren können.

4.5.1 Erklärung Ein *physischer Teil* eines Objekts ist ein Inhalt des Objekts, der sich von einem anderen Inhalt desselben Objekts dadurch unterscheidet, dass einer der beiden Inhalte mit einem Ort eines Universums koinzidiert, mit dem der andere Inhalt *nicht* koinzidiert.

Z. B. sind die Punkte, Kanten, Flächen oder Teilkörper eines Körpers dessen physische Teile, weil sie stets mit Orten in einem räumlichen Universum koinzidieren, mit denen andere Punkte des Körpers nicht koinzidieren. Physische Teile eines Menschen sind ferner Leib und Seele, da ersterer immer mit einem Ort im räumlichen Universum koinzidiert, während die Seele gar nicht durch Einordnung im Raum gegenwärtig zu sein scheint. Neben physischen Teilen gibt es aber noch andere. So verteilen sich die Inhalte eines Allgemeinbegriffs nicht auf verschiedene Orte in Universen, und dennoch erschiene es unangemessen, Allgemeinbegriffe als vollkommen ungeteilt anzusehen. So wird man den „Menschen an sich" mit Blick auf seine Charakterisierung durch eine Vielzahl von Attributen (vernunftbegabt, durch freie Entscheidungen selbstbestimmt, fortpflanzungsfähig usw.) kaum als absolut ungeteilt bezeichnen wollen. Um auch nicht-physische Teile zu erfassen, definieren wir:

4.5.2 Erklärung Ein *metaphysischer Teil* eines Objekts X ist eines seiner konkreten Attribute, dass von dem Objekt selbst (vom X-Sein) verschieden ist.

Entsprechend dieser Teil-Sorten können wir zwei Individuen-Begriffe aufstellen:

4.5.3 Erklärung Eine *physisches Individuum* ist ein Objekt ohne physische Teile, und ein *absolutes Individuum* ist ein solches, das weder physische noch metaphysische Teile hat.

Die folgenden Objekte scheinen nun am ehesten Individuen zu sein:

(1) das Ich, erfahrbar als „ungeteiltes Bewusstseinszentrum",
(2) Punkte (von Euklid geradezu definiert als das, „was keine Teile hat"),
(3) momentan vollzogene geistige Akte (z. B. Gedanken),
(4) einfache Begriffe (z. B. das „Rot an sich" oder eine „Denkform").[64]

Das *Ich* (Beispiel 1) hat keine Raumteile, wohl aber ist es in die Zeit eingeordnet und hat zeitliche Teile. Daher ist es *kein* physisches Individuum im strengen Sinn.

Ein *Punkt* (Beispiel 2) hat zwar, wenn es sich um einen Punkt in einem *zeitlosen, rein euklidischen Raum* handelt (und *wenn* Euklid tatsächlich recht hat, dass Punkte unausgedehnt sind),[65] keine physischen Teile, ist also tatsächlich ein physisches Individuum. Aber er hat eine Reihe von verschiedenen Attributen: beispielsweise liegt er auf verschiedenen Geraden und Flächen. Diese relativen Attribute beschreiben nicht nur den Punkt im Verhältnis zu anderen Objekten, sondern

[64] Siehe S. 26–27.

[65] Wie wir in Abschnitt 5.25 (auf S. 292) sehen werden, scheint es Anschauungsräume zu geben, in denen dies *nicht* der Fall ist.

bestimmen sein Wesen, da seine relative Stellung zu anderen Orten im Raum für ihn selbst wesentlich ist; es handelt sich also um essentielle Relationen des Punktes.

Akte (Beispiel 3) können sowohl in den Raum als auch in die Zeit eingeordnet sein und dann sowohl Raum– wie auch Zeitteile haben. Sind es aber *geistige* Akte (wie Gedanken), so haben sie keine Raumteile, und sind es zudem *momentan vollzogene* Akte, so sind sie auch zeitlich ungeteilt und können deshalb als physische Individuen gelten. Jedoch sind Akte Akzidentien, und jedes Akzidens besitzt mindestens zwei metaphysische Teile: ein Attribut, das seinen Inhalt aussagt, und eines, das seine Zugehörigkeit zu einem Träger beschreibt.

Begriffe (Beispiel 4) gehören von vornherein keinem räumlichen oder zeitlichen Universum an und sind deshalb physische Individuen. Doch hat selbst ein so einfach erscheinender Begriff wie „Rot an sich“ immer noch metaphysische Teile. So besitzt das „Rot an sich“ etwa die Attribute des „Farbe-Seins“ und des „Qualität-Seins“, und außerdem – wie jeder Begriff – Attribute wie das „Instanzen-Haben“, das „Abstrakt-Sein“, das „Möglich-Sein“ usw.

Wenngleich also in keinem Fall ein absolutes Individuum vorliegt, können die genannten Beispiele dennoch als Musterbeispiele für „relative Individuen“ gelten. Diese Feststellung gewinnt noch mehr Gewicht, wenn es, wie es nun scheint, *überhaupt keine widerspruchsfreien absoluten Individuen gibt*. Jedes Objekt X hat ja nicht nur verschiedene Transzendentalien als Attribute, sondern besitzt auch für jedes beliebige Objekt Y die essentielle Relation des Nicht-Y-Seins. Da es unendlich viele verschiedene Objekte gibt, besitzt dann auch jedes von ihnen unendlich viele metaphysische Teile. Für ein „möglichst perfektes Individuum“ gibt es also nur eine einzige klare Forderung: Es muss sich um ein physisches Individuum handeln, d. h. ein Objekt, dass entweder überhaupt nicht in ein Universum eingeordnet ist, oder in einem solchen nur mit einem einzigen Punkt koinzidiert. Darüber hinaus könnte man höchstens noch fordern, dass der Unterschied zwischen seinen Attributen „möglichst gering“ ist. Der geringste Unterschied ist nun der nicht-trennende, bei dem sich das eine nicht ohne das andere denken lässt, die Attribute also „ineinander inbegriffen“ sind. Bei konkreten Attributen bedeutet dies, dass die entsprechenden Begriffe (d. h. die entsprechenden abstrakten Attribute) einander implizieren, also genau denselben Umfang haben. Aber auch die Forderung, dass *alle* konkreten Attribute ineinander inbegriffen sind, ist bei keinem einzigen Objekt erfüllt.[66]

Wenn daher in der Theologie von der „Ungeteiltheit“ Gottes die Rede ist, darf man diesen Ausdruck nicht überbewerten; über die physische Ungeteiltheit hinaus kann Ungeteiltheit sinnvollerweise nur besagen, dass die *am meisten charakteristischen* Attribute eines Seienden ineinander inbegriffen sind. Dies ist für die göttlichen Attribute tatsächlich der Fall.[67]

4.5.5 Logische Individuen und Vielheiten

Anknüpfend an das Ergebnis des vorhergehenden Abschnitts, dass es gar keine Individuen im absoluten Sinn gibt, scheint es nun sinnlos zu sein, von wohlfundierten, aus Individuen bestehenden Vielheiten zu reden. Dem steht jedoch entgegen, dass wir im alltäglichen Leben scheinbar ganz selbstverständlich die zusammengesetzten Teile einer Vielheit von ihren einfachen *Bestandteilen* unterschieden können. Wenn wir etwa von „fünf Menschen“ sprechen, so liegt die Antwort auf die Frage, welche Objekte in dieser Vielheit die „Individuen“ sind, auf der Hand: Jeder einzelne der fünf Menschen ist ein solcher Bestandteil. Allerdings scheint diese Antwort nur durch die Benennung der Vielheit als Vielheit der „fünf Menschen“ suggeriert zu sein. Welche Bestandteile diese Vielheit jedoch „objektiv“ hat, darf nicht von ihrer Benennung abhängen. So gesehen scheinen etwa

[66] So hat ein Objekt immer Relationen zu anderen Objekten, die nicht alle ineinander inbegriffen sein können. Außerdem sind Akzidentien und essentielle Attribut niemals ineinander inbegriffen, und selbst die Forderung, dass alle essentiellen Attribute ineinander inbegriffen sein sollen, ist unerfüllbar. Denn die allgemeineren essentiellen Attribute können stets *ohne* die darauf aufbauenden spezielleren gedacht werden.

[67] Siehe S. 772–773.

die Körperteile der Menschen noch kleinere Teile dieser Vielheit zu sein, und zu den kleinsten Teilen würde man dann am ehesten noch die Punkte rechnen können, aus denen die Körper der Menschengruppe bestehen. Doch auch ein einzelner Punkt ist (wie wir gesehen haben) noch in gewisser Weise aus Attributen zusammengesetzt, und selbst, wenn man objektive Gründe finden könnte, bei den Punkten Halt zu machen, wäre dieses Ergebnis unbefriedigend, da man ja ursprünglich eben nicht eine Vielheit *von Punkten*, sondern eben eine solche *von Menschen* betrachten wollte.

Eine weiterführende Idee ist nun folgende: Wenn wir die uns interessierenden Gegenstände, die wir gern als Individuen ansehen würden, je einzeln in einen „Behälter“ packen könnten, und diese Behälter in objektiver Weise voneinander getrennte Einheiten wären, könnten wir anstelle der „nackten“ Gegenstände die „verpackten“ Gegenstände oder noch besser die sie enthaltenden Behälter betrachten und als Individuen definieren, die stellvertretend für ihren Inhalt stehen. Diese Behälter sollten alle möglichen Arten von Objekten enthalten können, nicht nur konkrete und materielle. Nun gibt es tatsächlich „Behälter“, die Objekte *aller* möglichen Arten enthalten und zusammenfassen können. Da nämlich jedes Objekt erkennbar bzw. denkbar ist, sind *Gedanken* die Behälter, die schlechthin alles zum Inhalt haben können.

Was uns nun daran hindert, einfach jeden widerspruchsfreien Gedanken als ein Individuum anzusehen, das stellvertretend für seinen Inhalt steht, ist einerseits die Tatsache, dass verschiedene Gedanken denselben Inhalt haben können, und andererseits die Zeit– und Subjektgebundenheit der Gedanken. Wie auf S. 26–27 gezeigt wurde, kann man diese Schwierigkeiten beseitigen, indem man die konkreten Gedanken durch Denkformen ersetzt. Diese waren definiert als zeit– und subjektunabhängige momentane Erkenntnisakte, die so abstrakt sind, dass sie *allein durch ihren direkten Inhalt* eindeutig bestimmt sind. So können sie stellvertretend für diesen Inhalt zu stehen. Denkformen sind zudem relativ perfekte Individuen (siehe Beispiel 4 von Abschnitt 4.5.4). Ich definiere daher:

4.5.4 Erklärung *Logische Individuen* sind widerspruchsfreie Denkformen. Von jetzt sind mit „Individuen“ stets logische Individuen gemeint.

Bemerkung. *Nicht alle Objekte können mit Individuen identifiziert werden.* Es kann nämlich Inhalte geben, die sich nicht in eine widerspruchsfreie Denkform packen lassen: Diese nenne ich *nicht individualisierbar*. Ich möchte hier auf zwei verschiedene Gründe hinweisen, warum ein Objekt nicht individualisierbar sein kann. Zum einen könnte es sich um ein „zu subjektives“ Objekt handeln: um einen Inhalt, der sich gewissermaßen nur im Denken *eines ganz bestimmten* Subjekts „voll objektivieren“ kann. Ein solches „zu subjektives“ Objekt dürfte eigentlich jeder konkrete Erkenntnisakt und allgemeiner jedes konkrete Erlebnis einer Person sein, besonders aber ihre direkte Reflexion über sich selbst. Die Person kann zwar anderen „etwas“ über ihr subjektives Erleben mitteilen (was dann objektivierbar und mit einer Denkform identifizierbar ist), aber es scheint immer eine subjektive Komponente übrig zu bleiben, die nicht kommunikabel ist, mit der sich also die auf S. 26–27 beschriebene Abstraktion, die zu einer Denkform und somit zu einem Individuum führt, nicht durchführen lässt.

Zum Zweiten könnte das Objekt „zu kompliziert“ sein, weil man zusammen mit ihm eine „unvorstellbar große“ Vielheit von Individuen zugleich betrachten muss (sei es, dass das Objekt selbst eine solche Vielheit ist oder z. B. ein Sachverhalt über eine solche). Im Gegensatz zu den zuvor betrachteten „zu subjektiven“ Objekten können bei einem solchen Objekt zwar die zu einer Denkform notwendigen Abstraktionen durchgeführt werden, und man erhält dann also eine Denkform: Aber diese erweist sich als widersprüchlich. – Hier muss noch näher erläutert werden, was es für eine Denkform bedeutet, „widerspruchsfrei“ bzw. „widersprüchlich“ zu sein. Wenn wir an ein widersprüchliches Objekt, etwa das Nichts, denken, so kann der *Gedanke daran* selbst vollkommen klar und frei von Widersprüchen sein. Damit der Erkenntnisakt selbst widersprüchlich wird, muss also ein Widerspruch nicht im *Inhalt*, sondern in der Beziehung des *Beinhaltens* liegen. So ist ein

Erkenntnisakt nur dann widerspruchsvoll, wenn er etwas zugleich (direkt) beinhaltet und nicht beinhaltet, gleichgültig, ob dieser Inhalt *selbst* widersprüchlich ist oder nicht. Es wird sich in Abschnitt 5.2 zeigen, dass es zu einer solchen Widersprüchlichkeit dadurch kommen kann, dass ein (auch für unser abstraktes Vorstellungs– und Denkvermögen) „unvorstellbar großer“ Inhalt zum Erkenntnisobjekt wird.

Wir können die Rede von den „fünf Menschen“ jetzt wie folgt erklären. Indem wir „fünf Menschen“ sagen, betrachten wir eigentlich fünf Denkformen, von denen jede je einen dieser Menschen beinhaltet. Diese Denkformen sind fünf logische Individuen, nicht mehr und nicht weniger. – Nun legen wir den Vielheitsbegriff wie folgt fest:

4.5.5 Erklärung Eine *Vielheit* ist ein aus mehreren (logischen) Individuen unstrukturiert zusammengesetztes Objekt.

Mit dieser Definition haben wir also nicht-wohlfundierte Vielheiten, die nicht aus Individuen bestehen, aus dem Vielheits-Begriff ausgeschlossen. Das Wort „unstrukturiert“ soll besagen, dass die Vielheit *nur* aus den Individuen besteht und *nichts* darüber hinaus umfasst, insbesondere also keine Anordnung und kein Zusammenwirken dieser Individuen in die Vielheit mit eingeht. Das Axiom „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Bestandteile“ ist daher hier *nicht* gültig, vielmehr soll die Vielheit *nichts anderes als* die reine Summe der sie konstituierenden Individuen sein. Wichtig ist auch die folgende Feststellung, die mir anschaulich klar zu sein scheint, wenn man die Begriffe richtig erfasst:

4.5.6 Vielheitsaxiom *Keine Vielheit ist Bestandteil einer anderen.*

Besteht z. B. eine Vielheit V_1 aus den Individuen a, b, c, so ist die aus a und b bestehende Vielheit V_2 zwar ein *Teil* von V_1, aber sie gehört nicht zu den *Bestandteilen* dieser Vielheit, d. h. nicht zu den „kleinsten“ Teilen, den logischen Individuen, aus denen sie sich zusammensetzt.[68]

4.5.6 Unendliche Vielheiten von Seienden

Nach unserem Durchgang durch die verschiedenen Seinsbereiche können wir uns nun der Frage zuwenden, inwieweit im Reich der Seienden unendliche Vielheiten auftreten. Den Bereich der Impossibilien möchte ich dabei ausklammern, denn man kann zwar mit einigem Recht sagen, dass es unendlich viele *Impossibilien* gibt, doch sind im Bereich der Impossibilien eindeutige Feststellungen grundsätzlich in Frage zu stellen.

Zunächst ist klar, dass es unendlich viele mögliche *pure Possibilien* gibt. Z. B. ist die Anzahl der *Fiktionen* unendlich: Es gibt mindestens ebenso viele fiktive Universen, wie es natürliche Zahlen gibt, denn zu jeder natürlichen Zahl n kann man sich z. B. eine fiktive Welt mit genau n Sternen ausdenken. Dass auch die Gesamtheit aller möglichen *Gedanken* unendlich ist, haben wir schon mit dem Dedekindschen Unendlichkeitsbeweis (oben S. 18–19) gesehen. Damit sind auch die von den möglichen Gedanken abstrahierten Denkformen unendlich. Da dies spezielle Begriffe sind, folgt die Unendlichkeit der *Begriffe*.

Unendlichkeit tritt aber in vielfacher Weise auch im Bereich der *Aktualitäten* auf. So hat jedes wirkliche Seiende X unendlich viele *essentielle Relationen*, denn es besitzt für jedes Objekt Y das Attribut des Nicht-Y-Seins. Erst recht sind die *Attribute höheren Grades* in X unendlich, wie

[68] Ein Einwand könnte lauten: Wenn man von „zwei Vielheiten“ spricht, hat man eine Zweiheit (also Vielheit) vor Augen, deren Bestandteile Vielheiten sind. Ich würde antworten: Man betrachtet bei einer solchen Zweiheit nicht die beiden Vielheiten nicht als solche, sondern betrachtet eigentlich zwei Denkformen (oder Begriffe), deren Inhalt (bzw. Umfang) jeweils eine der Vielheiten ist.

wir in Abschnitt 4.5.3 sahen. Ferner ist die Vielheit der *Sachverhalte* unendlich: Ist nämlich S_0 eine Wahrheit, so ist der Sachverhalt, dass S_0 wahr ist, eine weitere Wahrheit S_1, sodann der Sachverhalt, dass S_1 wahr ist, wieder eine weitere Wahrheit S_2 usw. Aber auch auf andere Weise können wir sehen, dass es unendlich viele Sachverhalte geben muss. Ist nämlich $A, B, C, \ldots$ eine beliebige unendliche Reihe von Objekten, die voneinander verschieden sind (z. B. Possibilien), lässt sich die folgende unendliche Reihe von Sachverhalten angeben: dass A nicht B ist, dass A nicht C ist, dass A nicht D ist usw. Ein ebenso klares Beispiel für eine unendliche Vielheit bilden die *Punkte, Strecken, Flächen, Teilräume, Zeitpunkte* und *Zeitintervalle* im unserem raum-zeitlichen Universum.

Die bisherigen Beispiele stammen allerdings alle aus dem Bereich der unter-substantiellen wirklichen Objekte. Ob es auch unendlich viele *Substanzen* gibt, wissen wir nicht. Ob es sie wenigstens geben kann, untersuche ich in Abschnitt 11.2. Jedenfalls ist unser **neuntes Beispiel** für Unendlichkeiten (siehe Abschnitt 2.3) nun hinreichend erläutert. Für das **zehnte Beispiel** verweise ich auf Kapitel 9, besonders Abschnitt 9.4.15.

5 Grundlegung der Mathematik und mathematischer Zugang zur Unendlichkeit

Hermann WEYL beantwortete in seiner *Philosophie der Mathematik* die Frage nach dem „Mittelpunkt“ der Mathematik mit dem Satz: Sie ist „die *Wissenschaft vom Unendlichen*“.[1] Wenn dies richtig ist, fällt der Mathematik für unser Thema eine entscheidende Rolle zu. Tatsächlich hatte die Mathematik im Lauf ihrer Geschichte drei Mal verstärkt mit dem Unendlichen zu ringen, was jedesmal eine Krise auslöste. Erstmals geschah dies in der griechischen Mathematik des 5. vorchristlichen Jahrhunderts durch die Entdeckung *inkommensurabler Streckenverhältnisse*, die nur durch unendliche Verfahren, etwa den nicht-abbrechenden Euklidischen Divisionsalgorithmus oder unendliche Kettenbrüche beschrieben werden können.[2] Der erste Entdecker, wahrscheinlich der Pythagoräer HIPPASOS, soll nach einigen Überlieferungen aus der Sekte der Pythagoräer ausgestoßen und im Meer ertränkt worden sein, weil er diese für das griechische Denken beunruhigenden Fakten bekannt gemacht hatte.[3] Die zweite Krise wurde durch die Entwicklung der Infinitesimalrechnung mit *unendlich kleinen Größen* durch LEIBNIZ und NEWTON im 17. Jahrhundert ausgelöst,[4] und die dritte am Ende des 19. Jahrhunderts durch die Mengenlehre Georg CANTORs, in welcher erstmals *aktual unendliche Mengen* zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen gemacht wurden.

Erst durch die CANTORsche Mengenlehre ist die Mathematik wirklich zu einer „Wissenschaft vom Unendlichen“ geworden; zuvor hatten die Mathematiker das Unendliche meist nur als eine façon à parler angesehen und nur die Existenz des *potentiell Unendlichen* anerkannt. Charakteristisch hierfür ist das oft zitierte Wort des „Princeps Mathematicorum“, Carl Friedrich GAUSS, in seinem Brief an SCHUMACHER vom 12. Juli 1831: „so protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon à parler ...“[5] So hatte CANTOR anfangs fast alle Mathematiker gegen sich, darunter auch seinen ehemaligen Lehrer Leopold KRONECKER, welcher CANTORs Lehre vom Unendlichen zeitlebens bekämpfte. Aber am Ende des 19. Jahrhunderts hatte sich diese Lehre weitgehend unter den Mathematikern durchgesetzt (siehe Abschnitt 8.14). Etwa zeitgleich mit dem Aufkommen der CANTORschen *Mengenlehre* erneuerte Gottlob FREGE die *Logik* und war bestrebt, die gesamte Mathematik (zunächst die Arithmetik) aus rein logischen Begriffen abzuleiten.

Beide Unternehmungen wurden stark erschüttert, als zu Anfang des 20. Jahrhunderts die berüchtigten Widersprüche (Antinomien, Paradoxien) in der Mengenlehre und Logik auftauchten. Diese mit dem Unendlichen zusammenhängenden Probleme, die ich später im Einzelnen erörtern

---

[1] WEYL, *Philosophie* S. 89. Vgl. auch MAOR, *Infinity* S. 19: „Vor allem ... gehört das Unendliche in das Reich der Mathematik, denn dort ist dieser Begriff am tiefsten verwurzelt, dort wurde er geprägt und unzählige Male neu formuliert, dort feierte er schließlich seinen größten Triumph“. Die Wurzeln des Unendlichkeitsbegriffs sind zwar eher theologisch-philosophischer Art (siehe Kapitel 8), aber WEYL und MAOR haben insofern recht, als er in der Mathematik am genauesten analysiert wurde.

[2] Vgl. MAINZER, *Reelle Zahlen* S. 23–27.

[3] Vgl. HEATH, *History of Greek Mathematics* Band 1 S. 65; WAERDEN, *Die Pythagoräer* S. 71–73 und vor allem FRITZ, *Hippasus*.

[4] Vgl. Abschnitt 5.25, S. 293.

[5] GAUSS, *Werke*Band 8 S. 216. In der „Bildersprache des Unendlichen“ sieht GAUSS nur dann nichts Widersprechendes, wenn „der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen.“ (ebd. S. 218).

werde,[6] schienen nicht nur das Lebenswerk CANTORs und FREGEs ins Wanken zu bringen, sondern waren der Anlass, die Frage nach den Fundamenten der Mathematik überhaupt neu zu stellen: So kam es zur *dritten* oder *modernen* „Grundlagenkrise der Mathematik".[7] Die alte Frage nach dem Wesen der mathematischen Gegenstände, die „immer ein philosophisches Problem der ersten Größenordnung gewesen" ist,[8] und früher in Bezug auf „Zahlen" gestellt wurde,[9] musste nun im Hinblick auf Mengen, insbesondere „unendliche Mengen", neu verhandelt werden. Hierauf basierend konnten dann verschiedene Strategien zur Vermeidung der Widersprüche entworfen werden.

Eine *theoretisch* allseits befriedigende Lösung ist bis heute nicht gefunden worden, doch haben sich im Kampf gegen die Widersprüche verschiedene Systeme der „axiomatischen Mengenlehre" als nützlich erwiesen, welche festschreiben, dass die Mengenbildung bestimmten Prinzipien, den Axiomen, folgen muss. Dieses Vorgehen hat sich praktisch bewährt: „Seit 40 Jahren", so heißt es z. B. in BOURBAKIS *Théorie des Ensembles* (1954), sei man im Umgang mit der axiomatischen Mengenlehre „niemals einem Widerspruch begegnet, und man ist berechtigt zu hoffen, dass sich niemals einer ergeben wird."[10] Die Zeit des „unbehelligten" Arbeitens (heute etwa 100 Jahre) hat dazu beigetragen, dass im Bewusstsein der meisten heutigen Mathematiker die Grundlagenkrise als „verjährt" erscheint. Die Tatsache, dass so lange kein Widerspruch aufgetaucht ist, zeigt aber bloß, dass Widersprüche, falls es sie gibt, „tiefliegend" in den Strukturen verborgen und darum nicht einfach zu entdecken sind. Einen tief liegenden Widerspruch ausschließen oder seine Existenz auch nur unwahrscheinlich machen kann aber die verflossene Zeit keinesfalls. Nur eine apriorisch-intuitive Begründung der Evidenz der Axiome könnte hier wirklich weiterhelfen.

Eine solche Begründung soll in diesem Kapitel erarbeitet werden. Hierbei zeige ich anknüpfend an die Ontologie einen Weg zu einer realistischen Grundlegung der Mathematik („realistische Mengenlehre") auf, der geeignet zu sein scheint, die „Wissenschaft vom Unendlichen" auf ein sicheres Fundament zu stellen. Während man bei einer rein mathematischen Behandlung der Mengenlehre von den Axiomen ausgeht – einigen wenigen Sätzen, die man ohne Begründung *voraussetzt* – geht es hier darum, diese Axiome zu *rechtfertigen*. Leider kann man die Axiome nicht einfach der Reihe nach abhandeln, ohne tiefer in die Mengenlehre einzudringen: Die komplizierteren dieser Axiome kann man jeweils erst formulieren, nachdem man einen gewissen Teil der Mengenlehre abgehandelt hat, der auf den einfacheren Axiomen basiert. Will man also die Axiome darstellen und begründen, so muss man parallel zu den Axiomen zugleich auch einen beachtlichen Teil der darauf basierenden Mengenlehre diskutieren. Wenn wir daher beim letzten Axiom angekommen sind, werden wir zugleich auch die fundamentalsten Theoreme der Mengen– und Zahlenlehre besprochen haben.

Meine „Beweise" der Axiome sind Explikationen der in der Ontologie verwendeten „objekttheoretischen" Anschauung. Diese Beweise stehen natürlich nicht mit mathematischen Beweisen auf einer Stufe, welche als rein logische Ableitungen (zu deren Eigenart siehe Kapitel 6) ohne eine solche Anschauung auskommen. Um deutlich zu machen, welche Art von Beweis ich anwende, verwende ich das Wort „Beweis" fortan nur für logische Ableitungen, während ich eine anschauliche Begründung als „Plausibilitätsbetrachtung" bezeichne. Des Weiteren nenne ich Sätze, die logisch aus den Axiomen folgen, *Theoreme* (wenn es Hauptsätze der Theorie sind), *Lemmata* (wenn es Hilfssätze sind) oder *Korollare* (wenn es Folgerungen aus Theoremen sind), während ich anschaulich plausibel gemachte Sätze als *Prinzipien* bezeichne: Außer den Axiomen sind dies noch weitere Sätze, die ich zur Begründung der Axiome heranziehe. Vor der Durchführung dieser Aufgabe möchte ich jedoch im Folgenden zunächst auf die bisher eingenommenen Positionen in der Grundlagendiskussion eingehen.

---

[6] Siehe Abschnitt 5.6; außerdem unten S. 81–86 sowie S. 156–163.

[7] Die Bezeichnung „Grundlagenkrise" stammt von Hermann WEYL (vgl. WEYL, *Grundlagenkrise*).

[8] Günther PATZIG im Vorwort zu FREGE, *Funktion* S. 11.

[9] Hierzu vergleiche Abschnitt 5.33.

[10] S. 9: „depuis 40 ans ... on n'a jamais rencontré de contradiction, et on est fondé à espérer qu'il ne s'en produira jamais".

5.1 Grundlagenstandpunkte

Da es sich bei den Mengen um Allgemeinbegriffe (Universalien) handelt, erinnert die „Grundlagenkrise“ zu Anfang des 20. Jahrhunderts stark an den mittelalterlichen Universalienstreit, in dem man eine realistische, konzeptualistische und nominalistische Position unterschied.[11] Dem Realismus entspricht in etwa der „mathematische Platonismus“, dem Konzeptualismus der „mathematische Intuitionismus“ und dem Nominalismus der sog. „Formalismus“.[12] Wesentlicher als diese Dreiteilung ist allerdings die Zweiteilung in realistische und nicht-realistische Positionen: Nach der ersten werden die mathematischen Objekte und Theoreme „entdeckt“ und bestehen unabhängig von unserem Denken, nach der zweiten werden sie „erfunden“ und sind bloß Konstruktionen des Mathematikers.[13]

A. Die *realistische* Auffassung begegnet uns vor allem in Form des sog. *mathematischen Platonismus*, ein Begriff, der 1935 von Paul Bernays geprägt wurde.[14] Das Charakteristikum dieses Standpunkts ist nach Heinrich Scholz „die Grundvoraussetzung, dass die Objekte der Mathematik ... an sich existieren, wie die platonischen Ideen. Mit Bezug auf diesen An-sich-Charakter sprechen wir von einer *platonischen Ontologie*. Für diese Ontologie existieren die unendlichen Bereiche beliebig hoher Mächtigkeit als fertig vorliegende Objekte ...“[15] Es sind also zwei Aspekte für den mathematischen Platonismus charakteristisch: *Erstens* bestehen die mathematischen Objekte unabhängig von unserem Denken und *zweitens* befinden sich darunter „unendliche Mengen beliebiger Größe“.[16] Die ideal-zeitlose Existenzweise der mathematischen Objekte ist nun sicher in einem anderen Sinn „real“ zu nennen als die zeitliche Existenzweise physikalischer Körper, wenngleich einige zeitgenössische Realisten diesen Unterschied in Frage stellen, indem sie den mathematischen Objekten eine Abhängigkeit von der Körperwelt zuschreiben.[17] In klassischer Interpretation aber kommt den in Frage stehenden Objekten ein apriorisch-idealer Status zu[18] und man kann daher statt von „realer“ auch

[11] Vgl. Stegmüller, *Universalienproblem einst und jetzt*. Zum Nominalismus siehe auch Kap. 8.10.6, besonders Fußnote 702 auf S. 566.

[12] Vgl. Stegmüller, *Metaphysik* S. 222–307; Fraenkel et al., *Foundations* S. 331–345.

[13] Vgl. Antweiler, *Unendlich* S. 2. Freilich sind die mathematischen Objekte auch im zweiten Fall real existierende Possibilien. Aber der Unterschied ist: Wenn sie nur vom Mathematiker konstruiert sind, so „existiert“ von ihnen auch nur das, was der Mathematiker konstruiert, und das sind bloß linguistische Entitäten. Das heißt: Es existieren dann möglicherweise nur die Formeln und Terme *ohne* dahinter stehende, von diesen Ausdrücken selbst verschiedene Sachverhalte und Objekte.

[14] Vgl. Bernays, *Platonism*.

[15] Scholz und Hasenjaeger, *Mathematische Logik* S. 1.

[16] Rucker, *Infinity and the Mind* S. 65.

[17] Der Hauptvertreter dieses „a-posteriori-Realismus“ (den man auch naturalistisch, physikalistisch oder quasi-empiristisch nennt) ist David Armstrong, der als einer der Architekten des modernen Materialismus gilt. Armstrong gibt zu, dass eine „zufriedenstellende diesseitige Beschreibung“ mathematischer Aussagen derzeit nicht in Sicht ist, glaubt aber dennoch, „dass es eine solche Beschreibung geben mus“ (*Naturalism* S. 39; vgl. *Scientific Realism*). Das Konzept ist also nicht wirklich ausgereift. Auch Quines und Putnams Realismus geht in diese Richtung, während Maddy für einen „Kompromiss“ zwischen diesem modernen und dem klassischen Realismus plädiert (siehe Maddy, *Realism in Mathematics* S. 28–31 und 178). Als Vorläufer des modernen a-posteriori-Realismus kann Aristoteles gelten, für den sich die mathematischen Gegenstände durch Abstraktion aus sinnlich wahrnehmbaren Quantitäten konstituieren (vgl. Apostle, *Aristotle's Philosophy* S. 3–32).

[18] Diese Sicht kommt z. B. bei Rucker, *Infinity and the Mind* zum Ausdruck: „Eine Menge ist die Form eines möglichen Gedankens“ (S. 64). „Selbst, wenn niemand eine bestimmte Menge zur Kenntnis nimmt, existiert sie doch als ein bestimmtes mögliches Denkmuster oder eine mögliche Wahrnehmung“ (S. 249). Auch Roger Penrose nimmt diesen klassischen Standpunkt ein und beschreibt ihn eindrucksvoll: „Ich stelle mir vor, dass der Geist jedesmal, wenn er eine mathematische Idee wahrnimmt, mit der Platonischen Welt der mathematischen Begriffe in Kontakt tritt“ (Penrose, *Computerdenken* S. 418). Diese Welt ist „nur über den Intellekt zugänglich“, existiert aber „außerhalb“ des Bewusstseins (S. 418), und die dort befindlichen Ideen sind „zeitlos“ und „gottgegeben“ (ebd. S. 95; vgl. ebd. S. 92–95, 109–113, 435, 437). Seinen Platonismus erläutert Penrose ausführlich in *Reality* S. 11–24. Siehe auch Fußnote 36 auf S. 63.

(in genau derselben Bedeutung) von „idealer“ Existenz reden.[19] So gesehen könnte man den realistischen Standpunkt auch als „mathematischen Idealismus“ bezeichnen. Der (klassisch interpretierte) platonistische Standpunkt in der Mathematik ist nicht nur der den tatsächlichen Gegebenheiten angemessenste, sondern auch der theologisch interessanteste. Denn aus der Sicht des Theismus sind die platonischen Ideen nicht „getrennt“ von Gott vorstellbar und werden daher von christlichen Denkern z. B. mit Inhalten des göttlichen Verstandes gleichgesetzt[20] oder in auch in anderer Weise mit Gott in Verbindung gebracht.[21]

Natürlich ist es nicht sicher, ob Platon selbst sich zum „mathematischen Platonismus“ bekannt haben würde,[22] wie auch die Einordnung anderer früherer Philosophen in diesem Zusammenhang problematisch erscheint.[23] Jedenfalls würde die realistische Grundthese wohl auch Aristoteles unterschrieben haben, und sie darf als die Ansicht der Mathematiker und Philosophen seit jeher gelten. Klassische Formulierungen findet man schon bei Augustinus, der im Hinblick auf die Existenz unbezweifelbarer Wahrheiten sagt: „Der Vernunftgebrauch erschafft derartiges nicht, sondern findet es“.[24] Wie bei Augustinus zeigt sich auch bei Leibniz und Kepler die religiöse Dimension dieses Standpunkts. Leibniz war nicht nur überzeugt, dass „was wahr ist, wahr bleibet, wenn es gleich von keinem Menschen erkannt würde“,[25] sondern glaubte an „ewige und allgemeine Wahrheiten“, die „in allen Weltkugeln, ja in allen Zeiten, und mit einem Wort bei Gott selbst gelten müssen, von dem sie auch beständig herfließen“.[26] Für Kepler sind „die mathematischen Vernunftschlüsse, nach denen die Körperwelt zu schaffen war, gleich ewig mit Gott“,[27] und er meinte sogar: „Die Geometrie ... ist Gott selbst (was ist nämlich in Gott, was nicht Gott selbst ist?) und hat ihm die

---

[19] Vgl. Stein, *Endliches und ewiges Sein* S. 114 und Seifert, *Sein* S. 256. Vgl. auch Cantor, der von der „durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage“ seiner Betrachtungen sprach (Cantor, *Punktmannigfaltigkeiten* Nr. 5 § 8, Ausgabe Zermelo S. 181).

[20] Thomas von Aquin erklärt in der *Summa Theologiae*, dass die platonischen Ideen in der Tat existieren, und zwar „im Geist Gottes“ (in mente divina) (Thomas von Aquin, *Summa Theologiae* pars 1 quaestio 15 articulus 1 corpus, Ausgabe Busa S. 210b). In quaestio 15 articulus 3 corpus, Ausgabe Busa S. 211a ist näher ausgeführt, dass es von allen Dingen, die Gott erkennt, sowohl von den geschaffenen wie auch von den bloß erschaffbaren, im göttlichen Verstand eine entsprechende Idee gibt.

[21] So sind nach Seifert, *Sein* S. 217f gewisse Ideen im göttlichen Wesen verkörpert, während andere bloß „mögliche Weisen“ sind, wie dieses Wesen durch kontingente Seiende nachgeahmt werden kann.

[22] Zu Platons Philosophie der Mathematik vgl. Wedberg, *Plato*. Siehe auch Abschnitt 8.1.8.

[23] So hat Adolf Abraham Fraenkel in etwas gewagter Weise Platon und Leibniz als Vorläufer des mathematischen Realismus hingestellt, und demgegenüber in Aristoteles und Kant die Vorläufer der (als „Idealismus“ bezeichneten) intuitionistischen Gegenposition gesehen (Fraenkel, *Notion d' existence*). Insbesondere macht Fraenkel den Unterschied am Existenzbegriff fest: Für die Vertreter der ersten Position soll mathematische Existenz *Widerspruchsfreiheit* („compatibilité“), für jene der zweiten Position *Konstruierbarkeit* („possibilité de construire“) bedeuten. Eine interessante Zusammenstellung von Positionen in den Grundlagenfragen der Mathematik von Pythagoras bis heute ist zu finden bei Hersh, *What is Mathematics* S. 91–232.

[24] Augustinus, *De vera religione* Kap. 39 Zl. 48, Ausgabe Martin S. 235, Ausgabe Thimme S. 124: „Non enim ratiocinatio talia facit, sed invenit“. Ähnlich sagt Augustinus in *De doctrina christiana*, die Wahrheit logischer Zusammenhänge werde vom Menschen nicht eingerichtet, sondern wahrgenommen: „veritas connexionum non instituta, sed animadversa est ab hominibus“ (Buch 2 Kap. 32 Zl. 1f, Ausgabe Martin S. 67), und in Buch 2 von *De libero arbitrio* (Ausgabe Green S. 246 Zl. 27 – S. 264 Zl. 23, Ausgabe Perl S. 67–94) baute er diese Position zu einem „arithmetischen“ Gottesbeweis aus (siehe hierzu auch Fußnoten 241 auf S. 725 und 15 auf S. 689): Die Existenz unwandelbarer arithmetischer Wahrheiten garantiert die Existenz der „unwandelbaren Wahrheit“ an sich, und wenn es nicht etwas noch Vorzüglicheres als diese gibt, „so ist die Wahrheit selbst Gott [ipsa veritas Deus est]“ (Ausgabe Green S. 264 Zl. 1f, Ausgabe Perl S. 93). Vgl. auch *Epistula 118* Kap. 23, Ausgabe Goldbacher S. 686 Zl. 14f: „veritas utique Deus est“. Einen ähnlichen Gottesbeweis hat Robert Spaemann vorgetragen (siehe Fußnote 241 auf S. 725).

[25] Leibniz, *Initia*, Ausgabe Gerhardt S. 111.

[26] Leibniz, *Initia*, Ausgabe Gerhardt S. 115.

[27] Kepler, *Harmonices Mundi* Buch 4 Kap. 1, Ausgabe Caspar S. 219: „rationes creandorum corporum mathematicas, Deo coaeternas fuisse, ... id sciunt christiani“.

Urbilder für die zu erschaffende Welt geliefert".[28] BERNAYS stellte 1934 fest, dass der platonische Grundlagenstandpunkt vorherrschend sei,[29] und dass dies stets der natürliche Standpunkt des „working mathematician" bleiben wird, unterliegt keinem Zweifel. Einschränkend kann man allerdings sagen, dass der typische Mathematiker unserer Tage, wie es DAVIS und HERSH treffend formuliert haben, „wochentags Realist und sonntags Formalist" ist:[30] Solange er arbeitet, ist er überzeugt, es mit einer objektiven Realität zu tun zu haben; wird er aber aufgefordert, philosophisch über diese Realität Rechenschaft zu geben, zieht er es vor zu behaupten, er glaube nicht daran. Zu den modernen Verfechtern des mathematischen Platonismus gehören zunächst die Wegbereiter der modernen Logik und Mengenlehre, CANTOR[31] und FREGE,[32] dann aber auch Paul FINSLER,[33] Heinrich SCHOLZ,[34] Kurt GÖDEL[35] und Roger PENROSE.[36] Nach GÖDEL könnten mathematische Objekte „unabhängig von unseren Definitionen und Konstruktionen" existieren,[37] und er behauptete, man habe „ebenso viel Grund, an ihre Existenz zu glauben", wie man Grund habe, die Existenz physikalischer Körper anzunehmen.[38] Besonders bei CANTOR, SCHOLZ und GÖDEL zeigt sich auch die theologische Bedeutung dieser Position, wie wir in Abschnitt 8.15 sehen werden.

Für die Vertreter des mathematischen Platonismus sind die zu Anfang des 20. Jahrhunderts aufgetretenen Widersprüche kein Grund zur Abwendung von Logik und Mengenlehre in ihrer klassischen Form. Als Quelle der Widersprüche vermuten sie einige unseren „logischen Intuitionen" bisher verborgen gebliebene Subtilitäten, die man durch einen schärferen Blick auf die Realität klarer erfassen zu können hofft.[39] Zur Beseitigung der Widersprüche wären dann nur kleinere Kor-

---

[28] KEPLER, *Harmonices Mundi* Buch 4, Ausgabe Caspar S. 223: „Geometria ante rerum ortum Menti divinae coaeterna, Deus ipse (quid enim in Deo, quod non sit Ipse Deus) exempla Deo creandi mundi suppeditavit". Allerdings haben auch Denker, die weniger platonistisch eingestellt waren, die Mathematik manchmal mit Gott in Verbindung gebracht. So war GAUSS davon überzeugt, dass Zahlen „bloß unseres Geistes Produkt" sind (Brief an BESSEL vom 9. 4. 1830, *Werke* Band 8 S. 201, *Briefwechsel* S. 497) und wollte das Unendliche aus der Mathematik verbannen (siehe S. 59), konnte aber dennoch behaupten: «Ὁ θεὸς ἀριθμίζει» – Gott rechnet (WALTERSHAUSEN, *Gauss* S. 97f). Ähnlich konnte auch der Konstruktivist und Finitist KRONECKER vom Geschaffensein der Zahlen durch Gott reden (siehe S. 341).

[29] Vgl. BERNAYS, *Platonism* S. 56: „le platonisme règne aujourd'hui dans la mathématique".

[30] Vgl. DAVIS und HERSH, *Mathematical Experience* S. 321: „Most writers on the subject seem to agree that the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays."

[31] Siehe S. 623.

[32] Für FREGE manifestieren sich die arithmetischen und logischen Wahrheiten in objektiven „Gedanken", die neben den subjektiven „Vorstellungen" und den wirkenden „Dingen" der Außenwelt ein „drittes Reich" bilden: „Was zu diesem gehört, stimmt mit den Vorstellungen darin überein, dass es nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, mit den Dingen aber darin, dass es keines Trägers bedarf, zu dessen Bewusstseinsinhalte es gehört" (FREGE, *Der Gedanke* S. 69). Vgl. auch FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik* Band 1 Vorwort S. XVIII: „[I]ch erkenne ein Gebiet des Objektiven, Nichtwirklichen an, während die psychologischen Logiker das Nichtwirkliche ohne weiteres für subjektiv halten".

[33] Vgl. FINSLER, *Platonischer Standpunkt.*

[34] Siehe S. 627–628.

[35] Siehe S. 628–630. Die Vereinnahmung der GÖDELschen Unvollständigkeitssätze (siehe S. 381–385) durch den postmodernen Relativismus und den Positivismus ist ungerechtfertigt (vgl. GOLDSTEIN, *Gödel*).

[36] PENROSE versucht in seinem Hauptwerk *Computerdenken* nachzuweisen, dass eine algorithmisch vorgehende künstliche Intelligenz den Reichtum mathematischer Strukturen nicht erfassen kann: Diese Strukturen existieren daher in einem nur dem Geist zugänglichen Platonischen Ideenreich (siehe Fußnote 18).

[37] GÖDEL, *Russell's Mathematical Logic* S. 137, Werke Band 2 S. 128, deutsche Ausgabe S. XIV: „Classes and concepts may, however, also be conceived as real objects, ... existing independently of our definitions and constructions."

[38] GÖDEL, *Russell's Mathematical Logic* S. 137, Werke Band 2 S. 128 (deutsche Ausgabe S. XIV): „It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence."

[39] Vgl. GÖDEL, *Russell's Mathematical Logic* S. 150, Werke Band 2 S. 138, deutsche Ausgabe S. XXVI. Siehe auch Fußnote 238 auf S. 99.

rekturen an den bisher zu naiv gebrauchten logischen oder mengentheoretischen Systemen notwendig. Die Bemühungen um solche Korrekturen waren entweder *logischer* oder *mengentheoretischer* Art, je nachdem, ob man an die FREGEsche Logik oder an die CANTORsche Mengenlehre anknüpfte.

A1. Diejenigen Realisten, welche das FREGEsche Vorhaben, die Mathematik auf ein *logisches* Fundament aufzubauen, weiter verfolgten, wurden *Logizisten* genannt. Hierzu rechnet man RUSSELL, WHITEHEAD, QUINE und manchmal auch CARNAP, die in der Tat logische Systeme entwickelten, welche die Mathematik zu tragen imstande waren.[40] Zur Vermeidung der Widersprüche wurden dabei verschiedene Mittel angewendet,[41] für die jedoch keine allgemein akzeptierte Rechtfertigung vorgelegt werden konnte. Man kann allerdings die genannten „logizistischen" Logiker, abgesehen von WHITEHEAD,[42] nur mit Einschränkungen als Realisten betrachten. RUSSELL entwickelte sich vom überzeugten Realisten[43] zu einem mit dem Nominalismus sympathisierenden Skeptiker.[44] Ähnlich erging es QUINE.[45] Am wenigsten ist CARNAP Realist; sein Standpunkt ist ein „anti-ontologischer", von dem aus der Streit um externe Existenz als „pseudo-theoretische Diskussion" zurückgewiesen wird.[46] Nach MADDY gehört diese Position zum „Konventualismus" (siehe S. 66).[47]

A2. Eine andere Strategie als die Logizisten verfolgten die Begründer der axiomatischen Mengenlehre, ZERMELO und FRAENKEL, sowie später NEUMANN, BERNAYS und GÖDEL, welche die CANTORsche Mengenlehre durch eine Rückbindung an Axiome absichern wollten (siehe S. 79). Man vernachlässigte allerdings die philosophische Aufgabe einer intuitiven Begründung der Axiome. So fügte ZERMELO seinem Axiomensystem die folgende Bemerkung bei: „Die weitere, mehr philosophische Frage nach dem Ursprung und dem Gültigkeitsbereiche dieser Prinzipien soll hier noch unerörtert bleiben. Selbst die gewiss sehr wesentliche ‚Widerspruchslosigkeit' meiner Axiome habe ich noch nicht streng beweisen können ... " Eingehendere Betrachtungen zur intuitiven Absicherung der Axiome blieben auch später aus, obgleich in dieser Richtung Versuche unternommen wurden.[48]

B. Wer den Realismus ablehnt, sieht die Gegenstände der Mathematik als von den Mathematikern geschaffene Gebilde an. Ansonsten aber ist die „Opposition" gegen den mathematischen Platonismus unter sich zerstritten, was die vielen Schlagwörter wie *Nominalismus*, *Formalismus*, *Konventualismus*, *Konzeptualismus*, *Intuitionismus*, *Konstruktivismus*, *Finitismus* belegen, welche die verschiedenen Spielarten der nicht-realistischen Auffassung kennzeichnen.

---

40 Vgl. RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica*; QUINE, *New Foundations* und *Mathematical Logic* sowie CARNAP, *Logische Syntax*.

41 Etwa RUSSELLs *Typentheorie* (siehe S. 83–84 und S. 97–98) oder QUINEs „Stratifizierung" (siehe S. 84).

42 Zu WHITEHEAD siehe S. 639–640.

43 In *The Principles of Mathematics* (1903) hatte er noch vehement die Existenz unendlicher Klassen als beweisbar verteidigt (Kap. 43 § 337–350 S. 355–368).

44 In den *Principia Mathematica* wird von Klassen geredet, ohne deren reale Existenz vorauszusetzen (Band 1 S. 88; siehe auch S. 78); auch wird die Frage, ob es unendliche Klassen gibt, offen gelassen als eine Frage, die legitimerweise nur auf empirischer Basis entschieden werden könne (Band 2 S. 183). Allerdings bekannte sich RUSSELL weiterhin zu Universalien (vgl. RUSSELL, *Analysis of Mind* S. 290).

45 Vgl. QUINE, *Theories and Things*, Replik auf David Amstrong S. 220–222, ferner QUINE, *Reification* sowie QUINE und GOODMAN, *Constructive Nominalism*. Siehe auch S. 78–79 mit Fußnote 137.

46 Vgl. FRAENKEL et al., *Foundations* S. 337f.

47 MADDY, *Realism in Mathematics* S. 27: „conventionalist line of thought". In der Tat sagt CARNAP: „the decisive question ist not the alleged ontological question of the existence of abstract objects, but rather the question whether the use of abstract linguistic forms ... ist expedient and fruitful for the purposes for which sementical analyses are made" (CARNAP, *Empiricism* S. 39).

48 Ein Beispiel ist Hao WANGs intuitive Rechtfertigung eines „iterativen" Mengenkonzepts (WANG, *Mathematics* S. 181–187).

B1. Unter dem mathematischen *Nominalismus* versteht man die radikalste Form der Ablehnung einer realen Existenz abstrakter mathematischer Gegenstände. Der Nominalist „anerkennt nichts anderes als seiend denn Individuen“.[49] Zwar arbeitet er auch mit Nichtindividuen, deutet diese aber nur als „façon à parler“ oder nützliche Fiktion.[50] Hersh nennt deshalb den eigentlichen Nominalismus *Fiktionalismus*.[51] Dieser echte Nominalismus hat aber kaum Anhänger und steht auch mit dem Grundlagenstreit am Anfang des 20. Jahrhunderts kaum im Zusammenhang. Innerhalb dieses Streits nahm vielmehr der sog. Formalismus seine Stelle ein.

B2. Für den *Formalismus*[52] ist Mathematik ein „Spiel mit Formeln“,[53] oder drastischer ausgedrückt: ein „Spiel mit Zeichenreihen“.[54] So steht an sich betrachtet der Formalismus „dem Nominalismus am nächsten“.[55] Sobald man aber den formalisierten Systemen eine Interpretation und Anwendung auf irgendeinem Gebiete gibt, kann der nominalistische Gesichtspunkt nicht mehr aufrecht erhalten werden, und somit zeigt sich der Formalismus als eine „Pendeltheorie, die zwischen extremem Nominalismus und eindeutigem Platonismus hin und her pendelt“.[56] Als führender Formalist des 20. Jahrhunderts gilt David Hilbert (1862–1943), der das erste moderne Axiomensystem der Geometrie entwarf und zusammen mit Wilhelm Ackermann den ersten ausgereiften, vollständigen Kalkül der Prädikatenlogik aufstellte.[57] Hinter den Hilbertschen Bemühungen stand allerdings die Absicht, den Formalismus letztlich als sichere Methode der *inhaltlichen* Erkenntnisgewinnung einzusetzen: Hilbert wollte die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik und dann auch der transfiniten Mengenlehre beweisen; er war sogar überzeugt, dass sich auf diesem Wege durch „reine Vernunft“ alle mathematischen Probleme überhaupt klären lassen („Hilbertsches Programm“).[58] Im Formalismus kommt ein die moderne Mathematik kennzeichnender Wesenszug zum Ausdruck, insofern diese nur „formale Strukturen“ betrachtet und die Frage nach dem „Wesen“ und der „wahren Bedeutung“ ihrer Resultate ausklammert. Dies brachte Bertrand Russell treffend zum Ausdruck:

> „Mathematik können wir definieren als das Gebiet, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden, und ob das, was wir sagen, auch wahr ist.“[59]

Im gleichen Sinn schrieb Wittgenstein:

> „Alle Sätze der Logik sagen aber dasselbe. Nämlich nichts.“[60]

---

[49] Stegmüller, *Metaphysik* S. 150.

[50] Vgl. Maddy, *Realism in Mathematics* Kap. 5.2. S. 159-170.

[51] Vgl. Hersh, *What is Mathematics* S. 179–181 und Maddy, *Realism in Mathematics* S. 159–170.

[52] Vgl. Stegmüller, *Metaphysik* S. 286-307 und Ebbinghaus, *Mengenlehre* S. 299f.

[53] Stegmüller, *Metaphysik* S. 299.

[54] Ebbinghaus, *Mengenlehre* S. 203f.

[55] Stegmüller, *Metaphysik* S. 299.

[56] Stegmüller, *Metaphysik* S. 299.

[57] Vgl. Hilbert, *Geometrie*, und Hilbert und Ackermann, *Logik*; siehe auch S. 379.

[58] Dieses optimistische „Programm“ formulierte Hilbert im Jahre 1900 auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Paris, wo er einem Katalog von 23 offenen Fragen der Mathematik das Motto voranstellte, dass der Mathematiker alle Probleme durch reine Vernunft lösen könne, es gebe für ihn kein „ignorabimus“: „Cette conviction de la possibilité de resoudre tout problème est pour nous un précieux encouragement pendant le travail. ... Voilà le problème, cherches-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet, [le] mathématicien ne sera réduit à dire: ‚Ignorabimus‘“. Man weiß heute, dass dieses Programm grundsätzlich zum Scheitern verurteilt ist, da der Gödelsche Unvollständigkeitssatz eine vollständige Lösung aller Probleme grundsätzlich ausschließt (siehe Satz 6.4.11 auf S. 385).

[59] Russell, *Mathematics and the Metaphysicians* S. 75: „Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are taking about, nor whether what we are saying ist true.“

[60] Wittgenstein, *Tractatus* § 5.43, Ausgabe Busch S. 71.

Aber weder RUSSELL noch WITTGENSTEIN waren Formalisten. Zum Formalisten wird man erst, wenn man die Wesensfrage nicht nur ausklammert, sondern für bedeutungslos erklärt und das wahre Wesen der Mathematik in der Form „an sich“ sieht. Doch auch dies kann, wenn man sich wie HILBERT für die Frage nach der *Widerspruchsfreiheit* dieser Formen interessiert und diese mit ihrer *inhaltlichen Erfüllbarkeit* assoziiert, der realistischen Position sehr nahe kommen. Radikalere Formalisten sehen daher in der letzteren Position – und namentlich bei HILBERT – immer noch eine Metaphysik am Werk, welcher eine „pseudoplatonische Ideologie“ zugrunde liege.[61]

B3. Eine andere Spielart des Nominalismus ist der *Konventualismus* (oder *Positivismus*, *Pragmatismus*), für den die Gesetze der Logik und Mathematik nur aufgrund von willkürlichen menschlichen Konventionen bestehen.[62] Der bedeutendste Vertreter dieser Richtung war der Positivist Rudolf CARNAP (siehe auch S. 64 und unten S. 626). Als Begründer des Konventualismus gilt Jules Henri POINCARÉ (1854–1912), der allerdings die Arithmetik und Logik vom Konventualismus ausnahm, indem er deren Gesetze für notwendig ansah.[63]

B4. Unter dem *Konzeptualismus*[64] versteht man in der Philosophiegeschichte des Mittelalters eine zwischen Realismus und Nominalismus vermittelnde Position. Als dem Konzeptualismus entsprechende Position gilt in der Philosophie der Mathematik an erster Stelle der *mathematische Intuitionismus*. Dieser Grundlagenstandpunkt geht auf den holländischen Mathematiker Luitzen Egbertus Jan BROUWER (1881–1966) zurück, als dessen Vorläufer CANTORs Gegner Leopold KRONECKER (1823–1891) gilt. BROUWER selbst sah KANT als seinen Vorläufer an. Der Intuitionismus gewann nur wenige, dafür aber hochkarätige Mathematiker und Logiker wie Emile BOREL, Henri LEBESGUE, Thoralf SKOLEM, Hermann WEYL und Arend HEYTING als Anhänger oder Sympathisanten; auch der Konventualist Henri POINCARÉ sympathisierte mit der BROUWERschen Bewegung. Der führende Kopf des Intuitionismus ist heute der Logiker und Philosoph Michael DUMMETT.[65]

BROUWER lehnte im Gegensatz zu den Logizisten die Logik als Begründung der Mathematik ganz ab, und im Gegensatz zu den Formalisten war ihm auch die Sprache nebensächlich: Mathematische Gegenstände werden ihm zufolge „durch die geistige Aktivität des Mathematikers erschaffen“, ihre Existenz muss durch eine „Konstruktion“ nachgewiesen werden,[66] die im Geist des Mathematikers, nicht auf dem Papier vollzogen wird.[67] BROUWER tendiert gewissermaßen zu einem mathematischen Solipsismus:[68] Beweise sind ihm zweitrangig, mathematische Erkenntnis muss durch eine persönliche Initiation dem Studenten vermittelt werden, der die Konstruktionen allein in sich selbst vollziehen muss.[69] Mathematik ist „mehr ein Tun denn eine Lehre“.[70] Dabei sind „alle Konstruktionen der Mathematik auf das Zählen zurückzuführen“,[71] denn die Vorstellung der zum Zählen verwende-

[61] Vgl. Detlef LAUGWITZ, *Sinn und Grenze der axiomatischen Methode*. Vortrag vom 13.04.1965 auf der Nürnberger Jahrestagung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, zitiert nach MESCHKOWSKI, *Wahrheit in der Mathematik* S. 94.

[62] Vgl. MADDY, *Realism in Mathematics* S. 27.

[63] Vgl. FREY, *Konventualismus*. POINCARÉ sympathisierte auch mit dem Intuitionismus (siehe Fußnote 72 auf S. 67).

[64] Vgl. HÜBNER, *Konzeptualismus*, besonders S. 1098.

[65] Vgl. DUMMETT, *Metaphysics* und DUMMETT, *Intuism*.

[66] HEYTING, *Intuitionismus* S. 543.

[67] Vgl. BROUWER, *Intuitionisme en formalisme* S. 7: „Op de vraag, waar de wiskundige exactheid dan wel bestaat, antwoorden beide partijen verschillend; de intuitionist zegt: in het menschelijk intellect, de formalist: op het papier.“ (zit. nach WEYL, *Philosophie* S. 83; engl. Übers. in BROUWER, *Werke* Band 1 S. 83).

[68] Vgl. FRAENKEL et al., *Foundations* S. 225. Zum philosophischen Solipsismus siehe S. 601.

[69] Vgl. FRAENKEL et al., *Foundations* S. 225.

[70] WEYL, *Grundlagenkrise* S. 17.

[71] MAINZER, *Konstruktivismus* S. 1019.

ten natürlichen Zahlen bzw. die Vorstellung des sie erzeugenden Bildungsgesetzes gilt als eine der Begründung oder empirischen Bestätigung weder bedürftige noch fähige „Urintuition“ (daher der Name „Intuitionismus“). Weil nun der Mensch nicht in der Lage ist, unendlich viele Sukzessionen zugleich in seinem Geist zu vollziehen, ist klar, dass in dieser Sicht das Unendliche nur potentiell existieren kann.[72] Wie der Brouwer-Anhänger Hermann Weyl ausführt, liegt die „tiefste Wurzel des Übels“ darin, dass „ein zum Unendlichen hin offenes Feld von Möglichkeiten ... für ein geschlossenes Gebiet“ gehalten worden sei: darin bestehe „der Sündenfall und die Erbsünde der Mengentheorie“.[73] Intuitionisten sind also zugleich Konstruktivisten und neigen daher zum Finitismus.

Das bekannteste Beispiel für die radikalen Mittel, mit denen Brouwer die Mathematik heilen wollte, ist seine Ablehnung des „tertium non datur“. Sein positivistischer Wahrheitsbegriff, der „wahr“ mit „verifizierbar“ identifiziert, führte ihn zur Ablehnung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, wonach jede sinnvolle Formel wahr oder falsch sein muss.[74] Eine der vielen seltsamen Konsequenzen daraus ist, dass dann von zwei verschiedenen reellen Zahlen keineswegs die eine immer entweder kleiner oder größer als die andere sein muss.[75] Der Intuitionismus verlangt also einen tiefgreifenden Umbau der gesamten Mathematik. Es werden nicht nur das aktual Unendliche und die Mengenlehre radikal abgelehnt, auch die klassische Logik und große Teile der klassischen Mathematik sollen aufgegeben oder vollkommen neu konzipiert werden. Dabei sind die klassischen Beweise durch kompliziertere intuitionistische zu ersetzen. Viel mehr Aufwand und viel weniger Resultate um fragwürdiger Prinzipien willen – das ist der abschreckende Eindruck, den der Intuitionismus auf die meisten Mathematiker gemacht hat. Marcel Barzin hat diesen Eindruck treffend so umschrieben: Brouwers Versuch, die Paradoxien zu beseitigen gleicht dem Verhalten eines Chirurgen, der, um einen eingewachsenen Nagel zu entfernen, gleich das ganze Bein amputiert.[76]

B5. Es gibt außer dem Intuitionismus noch andere Spielarten des Konzeptualismus. So ist der Konzeptualismus, zu dem sich der zeitgenössische Mathematiker Heinz-Dieter Ebbinghaus bekennt, vom Intuitionismus klar zu unterscheiden. Ebbinghaus macht keinerlei Abstriche von der Mengenlehre in ihrem klassischen Umfang, glaubt aber, dass mathematische Konzepte nicht von vornherein „fertig“ sind, sondern sich „aus der Erfahrung über die uns umgebende Wirklichkeit“ entwickeln und „über die Kommunikation der Mathematiker untereinander zu einem immer einheitlicheren Gebrauch“ gelangen. Die Frage, „wie weit und in welche Sinn Konzepten Realität zukommen kann“, lässt er offen.[77] Eine ähnliche Spielart des Konzeptualismus ist auch der sog. *quasi-empiristische Standpunkt* von Imre Lakatos (1922–1973), der von Hersh als begrüßenswerte Alternative von *allen* „klassischen“ Grundlagenpositionen abgehoben wird.[78] Nach Lakatos hat die Mathematik kein feststehendes Fundament: Sie nähert sich in einem dialektischen Prozess durch grundsätzlich stets fehlbare Versuche der Wahrheit an, ohne diese jemals voll erreichen zu können.[79]

---

[72] Die wahren Mathematiker sind auch nach Poincaré, *Les Mathématiques et la Logique* S. 312 „celle où l'on ne patauge pas dans l'infini actuel“ (jene, bei denen man nicht im aktual Unendlichen herumwatet). Vgl. ebd. S. 316: „Il n'y a pas d'infini actuel“.

[73] Weyl, *Philosophie* S. 299f.

[74] Vgl. Brouwer, *Intuitionistische Betrachtungen* S. 2 (Collected Works S. 410). Es geht hier um den Satz vom ausgeschlossenen Dritten bezüglich des Wahrheitswertes (oben S. 43–44 mit Fußnote 34 auf S. 43), der trivialerweise gültig ist (siehe Fußnote 36 auf S. 43), *wenn* wir den gewöhnlichen Wahrheitsbegriff voraussetzen (den Brouwer jedoch verwirft).

[75] Vgl. Davis und Hersh, *Mathematical Experience* S. 369–374.

[76] Vgl. Barzin, *Crise* S. 11.

[77] Ebbinghaus, *Mengenlehre* S. 204-206.

[78] Er ist insbesondere vom quasi-empiristischen *Realismus* (siehe Fußnote 17 auf S. 61) zu unterscheiden.

[79] Vgl. Hersh, *What is Mathematics* S. 208–216; Davis und Hersh, *Mathematical Experience* S. 345–359.

B6. Der Hauptinhalt des *Konstruktivismus*[80] ist das Bestreben, Mathematik letztlich auf das Zählen (und somit die ganzen Zahlen) zurückzuführen. Von einer unendlichen Menge zu reden, sieht der Konstruktivist nur dann als legitim an, wenn jedes Element dieser Menge über ein Rechenverfahren in endlich vielen Schritten „konstruierbar“ ist. Wie wir gesehen haben, sind die Intuitionisten zugleich Konstruktivisten, aber umgekehrt muss ein Konstruktivist nicht die Metaphysik des Intuitionismus übernehmen.[81] So müssen die „Konstruktionen“ keineswegs mentaler Art sein, wie es der intuitionistischen Lehre entspricht.[82]

B7. Die Anhänger des *finitistischen* Grundlagenstandpunkts schließlich betrachten unendliche Mengen „als heikle Schöpfungen des menschlichen Geistes“, ziehen „zwischen den überblickbaren und den unüberblickbaren Gesamtheiten eine scharfe Trennungslinie“ und verlangen „für die Bildung von unüberblickbaren Gesamtheiten besondere Legitimationen“.[83] In diesem Sinn war Leopold Kronecker (1823–1891) unter den modernen Mathematikern „der erste, für lange Zeit einzige und unverstandene Finitist“,[84] aber eigentlich tendieren alle Vertreter eines nicht-realistischen Standpunktes mehr oder weniger zum Finitismus. Als „Finitisten“ schlechthin wurden meist Hilbert (siehe S. 65) und seine Anhänger bezeichnet. Das ist zwar insofern berechtigt, als sie für mathematische Beweise einen vollkommen klaren, finiten Formalismus forderten,[85] aber Hilbert wollte mit diesem „finitistischen“ Formalismus die *gesamte* Mathematik *einschließlich* der transfiniten Mengenlehre weitmöglichst absichern, nach dem Motto: „Das Unendliche kann nur durch das Endliche gesichert werden“.[86] Zwar sagt Hilbert: „das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig“,[87] aber er fügt hinzu, das Unendliche sei ein „Vernunftbegriff“, der „alle Erfahrung übersteigt und durch den das Konkrete im Sinne der Totalität ergänzt wird“, es sei eine „Idee“ im Kantschen Sinn, welcher wir „unbedenklich vertrauen dürfen in dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat“.[88] Hiernach scheint Hilbert nicht weit von einer platonistischen Auffassung entfernt gewesen zu sein; überdies hört man eine gewisse Begeisterung für das Unendliche heraus,[89] die auch verständlich macht, warum ausgerechnet der „Finitist“ Hilbert ausrufen konnte: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“[90]

---

80 Vgl. Mainzer, *Konstruktivismus*.

81 Dies betonte der Formalist Haskell Brooks Curry (1900–1982), und er fügte hinzu: „Modern improvements of the constructivity notion have been made by persons who are primarily formalists“ (Curry, *Foundations* S. 15).

82 Beispiel eines vom Intuitionismus unabhängigen Konstruktivismus ist auch der „Operationalismus“ von Paul Lorenzen (vgl. Lorenzen, *Operative Logik* und Lorenzen, *Metamathematik*).

83 Scholz, *Mathesis* S. 296.

84 Scholz, *Mathesis* S. 296 Fußnote 2. Vgl. zu Kronecker auch S. 341 mit Fußnote 898 auf S. 341. Auch Wittgenstein war Finitist (siehe Fußnote 394 auf S. 157). Ein zeitgenössischer Finitist ist der Koreaner Joong Fang, der in seinem Buch *The illusory infinite – a theology of mathematics* behauptet, das aktual Unendliche sei „im Prinzip göttlich“ und daher „weit außerhalb der Reichweite von uns Sterblichen, einschließlich der Mathematiker“ (S. 20). Er lehnt daher Cantors transfinite Arithmetik ab und meint, es handle sich dabei nicht um „geradlinige Mathematik“, sondern um eine „verkleidete Theologie“ (S. 11); Cantors Höhenflug ins Reich des Transfiniten sei „mehr theologisch oder pathologisch als mathematisch“ gewesen (S. 178) und schon seine Grundannahmen seien nicht nur mathematisch, sondern auch philosophisch unsinnig (vgl. S. 187).

85 Vgl. Hilbert und Bernays, *Grundlagen der Mathematik I* § 2 S. 20–44.

86 Hilbert, *Über das Unendliche* S. 190.

87 Hilbert, *Über das Unendliche* S. 190; vgl. auch die kritischen Ausführungen gegen eine reale Existenz des Unendlichen ebd. S. 164f und in Hilbert und Bernays, *Grundlagen der Mathematik I* S. 15f.

88 Hilbert, *Über das Unendliche* S. 190.

89 Aus dieser Begeisterung heraus scheint Hilbert auch die Idee des Unendlichen in öffentlichen Vorträgen durch sein „Hotel-Gleichnis“ populär gemacht zu haben (siehe S. 237–238).

90 Hilbert, *Über das Unendliche* S. 170.

Mit dem sog. „strengen Finistismus“,[91] der die Existenz unendlicher Mengen strikt bestreitet, hat HILBERT jedenfalls nichts zu tun, und man wird selbst unter den Intuitionisten der BROUWERschen Schule einen solchen Finitisten kaum finden. In diese Richtung tendieren am ehesten die sog. *Ultra-Intuitionisten* um Aleksandr YESSENIN-VOLPIN, der es fragwürdig findet, ob die Zahl 10^{12} (eine Billion) existiert, da noch niemand bis dahin gezählt habe.[92] Wenn aber YESSENIN-VOLPIN weiter sagt, er glaube zwar nicht an die „Existenz“ der natürlichen Zahlenreihe, wolle aber ihre „Möglichkeit“ im Sinne von Widerspruchsfreiheit beweisen,[93] so zeigt sich, dass auch dieser strengste Finitismus der Unendlichkeit noch einen gewissen Möglichkeits-Modus einzuräumen gewillt ist.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Bild. Der nominalistische *Fiktionalismus* leugnet die Existenz von Mengen, der *Formalismus* vernachlässigt die semantische Dimension der Formeln, der *Konventualismus* nimmt ihnen ihre objektive Bedeutung, der *Intuitionismus* opfert große Teile der klassischen Mathematik, der *Quasi-Empirismus* betrachtet nur ihre subjektive und praktische Seite, der *Konstruktivismus* engt Mathematik auf Konstruktionen und der *Finitismus* auf endliche Bereiche ein. *Jede* dieser Richtungen verkleinert also auf spezifische Weise den vom mathematischen Platonismus angenommenen Gesamtbestand der Mathematik. So ist der Platonismus ein *mathematischer Universalismus*, dem die übrigen Standpunkte als *Partikularismen* gegenüber stehen.

Zur Würdigung dieser Partikularismen kann man sagen, dass sie in dem, worauf sie positiv blicken (im Gegensatz zu dem, was sie ablehnen) wertvolle Beobachtungen und Anregungen für die Mathematik zu bieten haben. Der Formalismus ist als strenge Methode hilfreich. Fiktionalismus, Intuitionismus, Konstruktivismus und Finitismus zeigen auf, wie weit man „von unten“, d. h. ohne Rückgriff auf höhere ontologische Prinzipien kommen kann. Quasi-Empirismus und Konventualismus schließlich zeigen, wie der mathematische Forschungsbetrieb funktioniert. Doch als tragendes Fundament zur Erklärung des *Gesamtphänomens Mathematik* scheint keiner dieser Partikularismen für sich allein geeignet zu sein. Hier gibt es zum Platonismus einfach keine überzeugende Alternative. Was also nun Not tut, ist eine platonistisch-inhaltliche Begründung der Axiome der axiomatischen Mengenlehre. Diese Axiome sollten nicht als willkürliche Sätze aufgefasst werden, sondern entweder logisch evidente Tatsachen ausdrücken oder aber Sachverhalte, die durch Explikation einer nichtlogischen Anschauung evident gemacht werden können. Diese alte, auf ARISTOTELES und EUKLID zurückgehende Auffassung haben sich in neuerer Zeit auch der Logiker FREGE und der Mathematiker Felix KLEIN zu eigen gemacht, denen ich mich diesbezüglich anschließen möchte. FREGE schrieb in seinem Brief an HILBERT vom 27.12.1899: „Axiome nenne ich Sätze, die wahr sind, die aber nicht bewiesen werden, weil ihre Erkenntnis aus einer von der logischen ganz verschiedenen Erkenntnisquelle fließt“.[94] KLEIN klagt in seiner *Elementarmathematik*, man finde

> „bei solchen Leuten, die sich nur für die logische und nicht für die anschauliche oder allgemein-erkenntnistheoretische Seite der Sache interessieren, neuerdings häufig die Meinung, *die Axiome seien nur willkürliche Sätze* ... Ich selbst teile diesen Standpunkt keineswegs, sondern halte ihn für den Tod der Wissenschaft“.[95]

---

91 Vgl. MOORE, *The Infinite* S. 133-137.

92 Vgl. YESSENIN-VOLPIN, *Criticism* S. 4. Siehe auch YESSENIN-VOLPIN, *Programme ultra-intuitioniste*.

93 „I don't really believe in the *existence* of a series containing 10^{12} – I shall prove the *possibility* of such a series“ (YESSENIN-VOLPIN, *Criticism* S. 5). Außerdem wollte er sogar die Konsistenz der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre beweisen: „I shall ... prove the consistency of Zermelo-Fraenkel set theory“ (ebd. S. 3).

94 FREGE, *Briefwechsel* S. 63. FREGE nennt diese Erkenntnisquelle hier explizit die „Raumanschauung“, womit er aber wohl nicht die allgemeine Erkenntnisquelle für Axiome gemeint sein dürfte; denn es geht in dem Brief konkret um eine Kritik der Axiomatik in HILBERTs Werk über „Grundlagen der Geometrie“.

95 KLEIN, *Elementarmathematik* S. 202.

5.2 Objekte, Individuen, Klassen, Mengen und Unmengen

Da wir den Objektbereich so groß wie möglich konzipieren wollen, fordern wir bloß, dass die Objekte durch feste Grenzen eindeutig voneinander unterscheidbar sind. Der Bereich der in der Ontologie bereits eingeführten „logischen Individuen“[96] erfüllt diese Forderung, und sie bleibt erfüllt, wenn wir diesen Bereich erweitern, indem wir zum Bereich der *Gesamtheiten von Individuen* übergehen:

5.2.1 Erklärung (Vorläufige Festlegung[97] des Objektbegriffs) Die *Objekte* der Mathematik (von jetzt an kurz: *Objekte*) seien die Gesamtheiten von Individuen (kurz: *Gesamtheiten*), nämlich:
1. die aus *mehreren* Individuen zusammengesetzten Vielheiten (kurz: *Vielheiten*),
2. die aus *einem* Individuum bestehenden Gesamtheiten, also die einzelnen *Individuen*,
3. die aus *null* Individuen bestehende Gesamtheit: das *Nichts*.

Zu den Individuen sind also die Vielheiten und das Nichts hinzugenommen. Aufgrund der eindeutigen Unterscheidbarkeit steht nun für Objekte x, y stets fest, ob sie unterschiedslos identisch sind oder nicht.[98] Das heißt: Wann immer θ_1 und θ_2 Objekte bezeichnen, sind die diese Objekte entweder ein und dasselbe Objekt, oder sie unterscheiden sich. Um Ersteres bzw. Letzteres auszudrücken, schreibt man

$$\theta_1 = \theta_2 \qquad \text{[Lesart: } \theta_1 \text{ gleich } \theta_2\text{]} \qquad \text{bzw.} \qquad \theta_1 \neq \theta_2 \qquad \text{[Lesart: } \theta_1 \text{ ungleich } \theta_2\text{].}$$

Ein Zeichenverband der Form $\theta_1 = \theta_2$ bzw. $\theta_1 \neq \theta_2$ heißt *Gleichung* bzw. *Ungleichung*.

Von den *Vielheiten von Individuen* sind die *Denkformen*[99] *mit einer Vielheit von Individuen als Inhalt* zu unterscheiden: Denkformen sind nämlich (falls sie widerspruchsfrei sind) immer einzelne Individuen. Wie es bei allen widerspruchsfreien Denkformen der Fall ist, sind auch diese durch ihren direkten Inhalt vollständig bestimmt, so dass es keine zwei von ihnen gibt, die genau den gleichen direkten *Inhalt* haben.[100]

Doch kann es immer noch zwei Denkformen geben, welche genau dieselbe *Gesamtheit von Individuen* als direkten Inhalt besitzen: in den beiden Denkformen können nämlich die direkt beinhalteten Individuen in verschiedener Weise in ein System eingebettet sein (z. B. können die Individuen vor verschiedenem Hintergrund vorgestellt werden;[101] sie können in der Vorstellung auf verschiedene räumliche oder zeitliche Punkte verteilt sein; sie können als Träger verschiedener Akzidentien und Sachverhalte oder als aufeinander wirkend vorgestellt werden). Sind aber *nur* die Individuen der Gesamtheit (ohne jeden Hintergrund, ohne Einbettung in ein Universum, ohne Akzidentien, Sachverhalte und Interaktionen) in der Vorstellung, so dass nur die „reine“ Gesamtheit zum direkten Inhalt gehört, spreche ich von einer *Menge*.

5.2.2 Erklärung Eine *Menge* ist eine widerspruchsfreie Denkform (somit ein Individuum), deren direkter Inhalt eine reine Gesamtheit von Individuen ist. Gehört ein Individuum zum direkten Inhalt einer Menge, so wird es ein *Element* dieser Menge genannt.

---

96 Wir hatten diese Individuen beschrieben als widerspruchsfreie Denkformen, also abstrakte momentane Erkenntnisakte, die nicht etwas zugleich direkt beinhalten und nicht beinhalten (siehe Definition 4.5.4, S. 56).

97 Bei der endgültigen Festlegung des Objektbereichs werden wir gewisse „überflüssige“ Gesamtheiten wieder entfernen (siehe Definition 5.4.2 S. 88).

98 Zum den Arten der Identität und des Unterschieds siehe Abschnitt 4.5.2. Bei unterschiedsloser Identität liegt eigentlich nur ein einziges Objekt vor.

99 Zu diesem wichtigen Begriff siehe S. 26–27.

100 Zu direkten und indirekten Inhalten von Erkenntnisakten siehe S. 26.

101 Gemeint ist hier ein thematisch erfasster Hintergrund, da Denkformen schon so abstrakt sind, dass sie keinen unthematischen Hintergrund mehr haben (siehe S. 26–27).

Ernst ZERMELO stellte 1932 fest, dass die Mengenlehre „der schöpferischen Tat eines einzelnen zu verdanken“ ist: Sie ist eine „Schöpfung“ von Georg CANTOR (1845–1918), der sie während eines Zeitraums von etwa 25 Jahren, von 1874 bis 1897, in einer Reihe von Abhandlungen entwickelt hat. Nach ZERMELOs Urteil ist die Mengenlehre „seitdem zum bleibenden Besitze der Wissenschaft geworden“, so dass „alle späteren Forschungen auf diesem Gebiete“ nur noch als „ergänzende Ausführungen“ zu den Gedanken CANTORs verstanden werden können.[102] Wenngleich diese Aussage nach der Entwicklung der verschiedenartigsten *formalen* Systeme der Mengenlehre (ZERMELO, FRAENKEL, RUSSELL, VON NEUMANN, BERNAYS, GÖDEL, QUINE, KELLEY, MORSE, SCOTT, ...) etwas überholt klingen könnte, so ist es doch wahr, dass die meisten *realistischen* Interpretationsversuche der Mengenlehre direkt an CANTOR anknüpfen. Auch meine Definition der Menge soll eine Explikation der CANTORschen Definition sein, mit welcher er 1895 seine letzte Veröffentlichung zur Mengenlehre eröffnete, und die seither fast in jedem Buch der Mengenlehre zitiert wird:

> „Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“[103]

Nun müsste vor allem präzisiert werden, was „Zusammenfassung“ heißt. Verschiedene Mathematiker haben dafür die verschiedensten Vergleiche angegeben. So verglich Thoralf SKOLEM Mengen mit „Katalogen“, die ihre Elemente anführen.[104] Richard DEDEKIND stellte sich eine Menge vor „wie einen geschlossenen Sack“,[105] und von Georg CANTOR wird berichtet, dass er seine Mengenvorstellung einmal wie folgt kundgetan hat:

> „Er richtete seine kolossale Figur hoch auf, beschrieb mit erhobenem Arm eine großartige Geste und sagte mit einem ins Unbestimmte gerichteten Blick:
> ‚Eine Menge stelle ich mir vor wie einen Abgrund.‘“[106]

Sehen wir von solchen Vergleichen ab, so bleibt nur übrig, die Menge als einen Begriff oder abstrakten Gedanken aufzufassen, was im Einzelnen natürlich in verschiedener Weise präzisiert werden kann. Meine Definition 5.2.2 der Menge als Denkform soll eine solche Präzisierung sein.

Das wichtigste Anliegen der Mengenlehre ist es nun, Gesamtheiten, insbesondere Vielheiten, weitestgehend wie Individuen zu behandeln. CANTOR hat es einmal so ausgedrückt: Eine Menge sei „jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt“.[107] Nach dem hier vorgestellten Ansatz lässt sich dies wie folgt verstehen: Eine Vielheit oder Gesamtheit kann als Einheit betrachtet werden, wenn eine Menge existiert, welche genau die Bestandteile der Gesamtheit beinhaltet. Dann ist nämlich diese Menge (die als Denkform ein Individuum ist) ein diese Gesamtheit repräsentierendes Individuum, und so kann die Gesamtheit als „individualisiert“ gelten.[108] Wir können jeder Menge jeweils die zugehörige Gesamtheit ihrer Elemente gegenüberstellen, und *wenn* nun auch umgekehrt zu jeder Gesamtheit eine entsprechende Menge existiert, würde die „Entsprechung“ von Mengen und Gesamtheiten vollkommen sein. Diese Hypothese wird also durch folgendes Diagramm veranschaulicht:

---

102 ZERMELO, *Cantor* Vorwort S. III.

103 CANTOR, *Transfinite Mengenlehre* § 1, Ausgabe Zermelo S. 282.

104 Siehe Fußnote 610 auf S. 257.

105 BERNSTEIN, *Bemerkungen* S. 449.

106 BERNSTEIN, *Bemerkungen* S. 449.

107 CANTOR, *Punktmannigfaltigkeiten* Nr. 5 § 1, Ausgabe Zermelo S. 204 Fußnote 1.

108 Einen analogen Trick haben wir schon in Abschnitt 4.5.5 angewendet, um überhaupt Individuen zu erhalten: Wir packten Inhalte in eine Denkform. Dasselbe tun wir hier wieder mit Gesamtheiten von Individuen, und erhalten so „individualisierte“ Gesamtheiten von Individuen, die wir Mengen nennen.

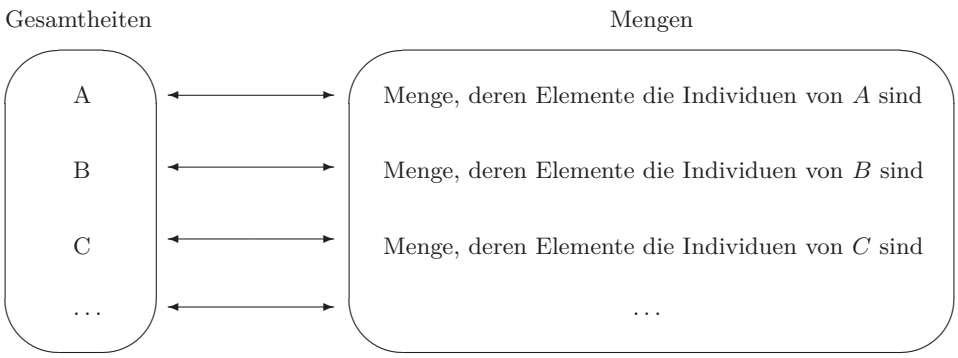


Abbildung 5.1: Gegenüberstellung der Gesamtheiten und Mengen (Erste Hypothese)

Man könnte dann dem Anliegen der Mengenlehre voll entsprechen: *Alle* Gesamtheiten könnten durch die entsprechende Menge ersetzt und dadurch „individualisiert“ werden. Existiert dagegen nicht zu jeder Gesamtheit eine entsprechende Menge, müsste es auf der Seite der Gesamtheiten „mehr“ Objekte geben, und die Situation wäre folgende:

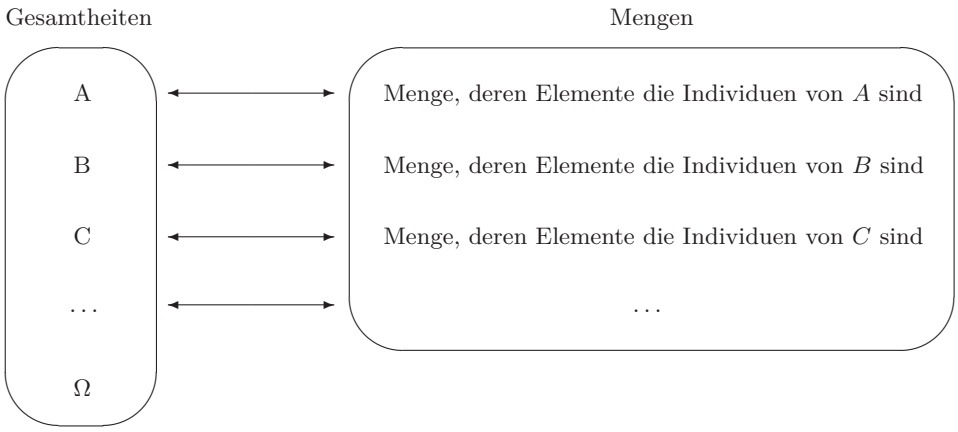


Abbildung 5.2: Gegenüberstellung der Gesamtheiten und Mengen (Zweite Hypothese)

Dies ist die wahre Situation: Es gibt Vielheiten, zu denen keine entsprechende Menge existiert, wie ich im Folgenden zeigen werde. Zu jeder Gesamtheit gibt es einen Gedanken G, der diese zum Inhalt hat (weil jedes Objekt denkbar ist). Um zu prüfen, ob es auch eine *Menge* mit diesem Inhalt gibt, muss man an G die entsprechenden Abstraktionen vornehmen und gelangt zu einem abstrakten Erkenntnisakt G^*. Wenn nun dieser widerspruchsfrei ist, ist G^* die gesuchte Menge, und andernfalls existiert keine solche (dabei kommt es auf einen Widerspruch im *Beinhalten* an, wohingegen es gleichgültig ist, ob auch ein Widerspruch im Inhalt selbst vorliegt oder nicht).[109] Können wir uns nun die Gesamtheit durch einen einfachen, unkomplizierten Gedanken G vor Augen stellen, ist ein solcher Widerspruch offenbar ausgeschlossen. Damit die Gesamtheit nicht individualisierbar ist, muss also G unübersichtlich kompliziert sein, und da eine Gesamtheit von Individuen nur die Summe ihrer Bestandteile ist,[110] kann eine solche Komplexität nur auf der unüberschaubar großen Anzahl ihrer Bestandteile beruhen.

Da das Nichts zwar widersprüchlich, aber vollkommen übersichtlich ist, gibt es eine Menge, deren Inhalt das Nichts ist: Diese so genannte „leere Menge“ wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Ein Musterbeispiel

[109] siehe S. 56–57.

[110] Als Gesamtheiten von Individuen gelten nach Erklärung 5.2.1: erstens das Nichts, zweitens die einzelnen Individuen und drittens die Vielheiten von Individuen. Eine Vielheit von Individuen aber ist nach unserer Erläuterung auf S. 57 nichts anderes als die Summe der Individuen, aus denen sie bestehen.

an Einfachheit bilden sodann die Gesamtheiten, die nur aus einem einzelnen Individuum bestehen, und so gibt es zu jedem Individuum x eine Menge, die nur x zum Inhalt hat, und die man mit $\{x\}$ bezeichnet. Solche Mengen heißen *einelementige Mengen* oder *Einermengen*. Ebenso überschaubar sind Gesamtheiten, die sich aus zwei verschiedenen Individuen x und y zusammensetzen, und so existiert stets eine entsprechende Menge, die man mit $\{x, y\}$ bezeichnet. Solche Mengen heißen *Zweiermengen*. So haben wir eines der elementarsten Axiome der Mengenlehre begründet: das *Axiom der Elementarmengen*:[111]

5.2.3 Axiom der Elementarmengen

Es existiert eine Menge $\emptyset$ ohne Inhalt.
Zu einem Individuum x existiert stets eine Menge $\{x\}$ mit x als einzigem Element.
Zu Individuen x und y existiert stets eine Menge $\{x, y\}$ mit Elementen x und y.

Wir können die vorhergehende Betrachtung über die Zweiermengen hinaus fortsetzen, und gelangen so zu der Einsicht, dass jede endliche Vielheit von Individuen prinzipiell überschaubar ist, so dass es eine korrespondierende Menge gibt, deren Inhalt diese Individuen bilden. Die entsprechenden Mengen heißen *endliche Mengen*. Man könnte nun vermuten, dass die Grenze zwischen individualisisierbaren und nicht-individualisierbaren Vielheiten gerade diejenige zwischen endlichen und unendlichen Vielheiten ist. Aber dem ist nicht so. Zwar sind unendliche Vielheiten uns nicht mehr in gleicher Weise anschaulich gegeben wie endliche, aber eine derartig „absolute“ Unübersichtlichkeit, dass sich beim Denken *logische* Widersprüche einstellen können, wird man nicht für jede unendliche Vielheit behaupten wollen. Widerspruchsfrei denkbar dürften insbesondere unendliche Gesamtheiten sein, die uns in „relativ übersichtlich zusammengefasster“ Form entgegentreten, wie z. B. die Gesamtheit der Punkte auf einer uns vor Augen stehenden begrenzten Linie, oder der „erste unendliche Teilabschnitt“ der auf S. 25–26 beschriebenen endlosen Kette von Erkenntnisakten $E, E', E'', E''', \ldots$, von denen der jeweils folgende immer den vorhergehenden zum Inhalt hat. So scheint es auch für gewisse unendliche Vielheiten entsprechende Mengen zu geben, die dann *unendliche Mengen* heißen.

Mithin müssen Gesamtheiten, die nicht von einer Menge beinhaltet werden, „besonders große“ unendliche Gesamtheiten sein, nämlich im wahrsten Sinne des Wortes „unvorstellbar große“: so groß, dass ihre Bestandteile nicht mehr in einem einzigen unserer Vorstellungsakte widerspruchsfrei zusammenstehen können. Die Existenz solcher Vielheiten hat bereits Cantor erkannt, und er nannte diese Vielheiten *inkonsistent* (nicht-zusammenstehend) oder *absolut unendlich*.[112] Gesamtheiten, zu denen die entsprechende Menge existiert, nannte er dagegen *konsistent*.[113] Eine sehr glückliche

[111] Es wurde von Zermelo in seinen *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* S. 263 eingeführt und postuliert (1) die Existenz einer „leeren“ Menge $\emptyset$ ohne Elemente, (2) zu jedem Individuum x die Existenz einer nur x enthaltenden Einermenge und schließlich (3) zu Individuen x, y die Existenz einer Zweiermenge, deren Elemente x und y sind. In Abschnitt 5.9 wird Teil (1) des Axioms das *Nullmengenaxiom* und Teil (3) das *Paarmengenaxiom* genannt werden. Teil (2) wird sich als entbehrlich erweisen.

[112] Vgl. Cantors Brief an Dedekind vom 3.8.1899 (siehe Fußnote 113) und seinen Brief an Jourdain vom 4.11.1903 (*Briefe* S. 433).

[113] Brief vom 3.8.1899 an Dedekind (Cantor, *Briefe* S. 407): „Gehen wir vom Begriff einer bestimmten Vielheit ... aus, so hat sich mir die Notwendigkeit herausgestellt, zweierlei Vielheiten ... zu unterscheiden. Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, dass die Annahme eines ‚Zusammenseins‘ *aller* ihrer Elemente auf einen Widerspruch führt, so dass es unmöglich ist, die Vielheit als eine Einheit, als ‚ein fertiges Ding‘ aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich *absolut unendliche* oder *inkonsistente Vielheiten*. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist z. B. der ‚Inbegriff alles Denkbaren‘ eine solche Vielheit ... Wenn hingegen die Gesamtheit der Elemente einer Vielheit ohne Widerspruch als ‚zusammenseiend‘ gedacht werden kann, so dass ihr Zusammengefasstwerden zu ‚*einem* Ding‘ möglich ist, nenne ich sie eine *konsistente Vielheit* oder eine ‚Menge‘“. In der von Zermelo herausgegebenen Ausgabe der Cantorschen Werke ist dieses Zitat fälschlich in den Brief vom 28.07.1899 inkorporiert worden.

deutsche Bezeichnung für die inkonsistenten Vielheiten ist das Wort *Unmenge*,[114] in dem man zwei hier einfließende Aspekte zugleich ausgedrückt sehen kann: (a) dass es sich nicht um eine Menge handelt und (b) dass es sich um eine *sehr große* Vielheit handelt:

5.2.4 Erklärung Eine *Unmenge* oder *inkonsistente Vielheit* ist eine Vielheit, die so groß ist, dass die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind.

Der Unterschied zwischen konsistenten Vielheiten, die in einer endlichen oder unendlichen Menge enthalten sind, und inkonsistenten Vielheiten oder Unmengen lässt sich am klarsten durch das unterschiedliche Verhältnis zur *Vorstellbarkeit* verdeutlichen: Während eine *endliche Vielheit* prinzipiell in einer *anschaulichen Vorstellung* vollkommen klar überschaut werden kann, und sich die Elemente einer *unendlichen Menge* (mit mehr oder weniger großen Einschränkungen bezüglich Anschaulichkeit und damit auch bezüglich Übersichtlichkeit) immer noch in einem *nicht-widersprüchlichen Vorstellungsakt* zusammenfassen lassen, ist eine *Unmenge* gänzlich *unvorstellbar*, d. h. sie kann nicht in einem einzigen widerspruchsfreien Vorstellungsakt der uns bekannten Art vollständig erfasst werden.[115] Das Gegenüber von Gesamtheiten und Mengen lässt sich nun wie folgt veranschaulichen:

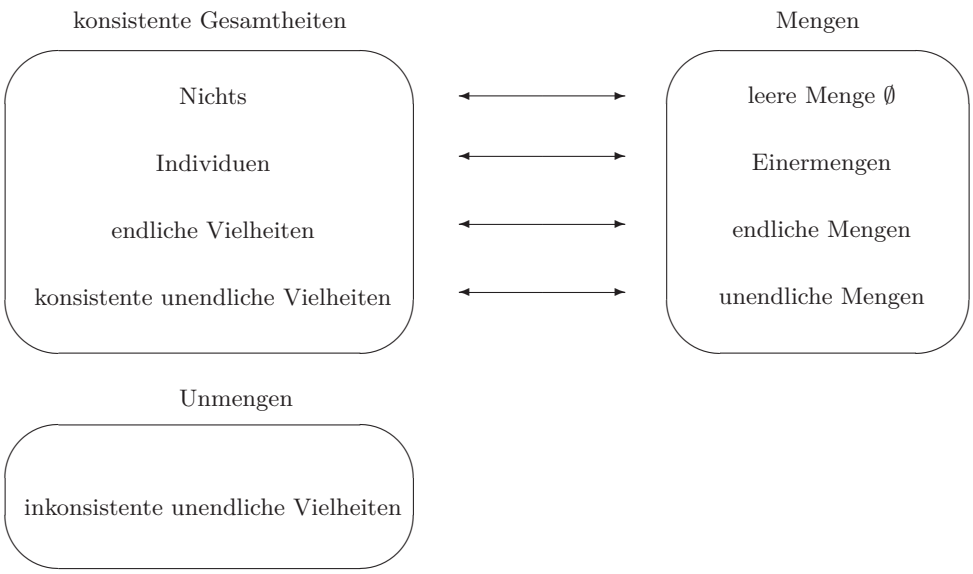


Abbildung 5.3: Gegenüberstellung der Gesamtheiten und Mengen (wahre Situation)

Um die Existenz von Unmengen plausibel zu machen, gebe ich nun ein „Verfahren“ an, mit dem sich Unmengen gedanklich „aufbauen“ lassen. Zunächst muss man sich davon überzeugen, dass zu jeder Menge M Individuen existieren, die *keine* Elemente von M sind, und die ich daher *Außenindividuen* von M nenne. Da ein Erkenntnisakt (der uns bekannten Art) sich selbst nicht thematisch beinhalten kann, kann keine Menge M Element von sich selbst sein, also ist M selbst ein Außenindividuum von M. Dieses ist nicht das einzige. Denn wie auf S. 25–26 erläutert wurde, induziert M eine unendliche Kette $M, M', M'', M''', \ldots$ weiterer Erkenntnisakte, von denen jeder den vorhergehenden beinhaltet, während der vorhergehende keinen der folgenden beinhaltet. So beinhaltet M keinen der Erkenntnisakte M', M'', M''', die widerspruchsfrei sind, weil sie nur ein einziges Individuum

[114] Dieser Begriff taucht bereits 1930 in Zermelos Artikel über *Grenzzahlen und Mengenbereiche* (S. 29 und 47) auf. Vgl. auch Klaua, *Mengenlehre* § 19.4 S. 327–331.

[115] Wir erfassen Unmengen nur im abstrakten Denken durch Begriffe, die uns eine *Gemeinsamkeit* ihrer Bestandteile vor Augen führen, ohne dass damit eine vorstellungsmäßige Repräsentation der Vielheit verbunden ist (siehe auch S. 90).

enthalten. So handelt es sich – wenn wir diese Erkenntnisakte abstrakt genug denken – um *unendlich viele Mengen und damit Individuen, die nicht in M enthalten sind*. Damit gibt es unendlich viele Außenindividuen von M. Nun zu dem Verfahren:

5.2.5 Verfahren zur Bildung von Unmengen *Man wähle zu jeder Menge M ein Außenindividuum von M und bilde eine Vielheit $\mathcal{V}$, die mindestens diese ausgewählten Außenindividuen umfasst. Dieses $\mathcal{V}$ ist dann eine Unmenge.*

Plausibilitätsbetrachtung. Ich nehme das Gegenteil an und führe es zum Widerspruch. ANGENOMMEN, $\mathcal{V}$ wäre *keine* Unmenge. Dann gibt eine Menge $\mathcal{M}$, die alle Individuen von $\mathcal{V}$ beinhaltet, insbesondere auch alle ausgewählten Individuen. Da wir zu *jeder* Menge ein Außenindividuum ausgewählt haben, ist unter den ausgewählten Individuen auch ein Außenindividuum i von $\mathcal{M}$. Nun muss dieses i einerseits (weil $\mathcal{M}$ *alle* ausgewählten Individuen beinhaltet) ein Element von $\mathcal{M}$ sein, aber andererseits kann i (als *Außen*individuum von $\mathcal{M}$) natürlich *kein* Element von $\mathcal{M}$ sein. Damit haben wir einen Widerspruch. Also war die ANNAHME falsch, und die Vielheit $\mathcal{V}$ ist eine Unmenge. □

Dieses Verfahren liefert offensichtlich nicht nur eine, sondern unendlich viele Unmengen $\mathcal{V}$, denn zu jeder Menge gibt es jeweils unendlich viele Möglichkeiten, ein Außenindividuum auszuwählen. Wenn man zu jeder Menge M als Außenindividuum M selbst wählt, ist die Vielheit der so ausgewählten Individuen offenbar die „Vielheit aller Mengen“, d. h. die Vielheit, sie sich aus sämtlichen Mengen zusammensetzt. Diese bezeichne ich mit $\mathbb{M}$. Das Verfahren zeigt also, dass $\mathbb{M}$ selbst eine Unmenge ist, und ebenso, dass jede Vielheit, die noch umfassender als $\mathbb{M}$ ist, eine Unmenge sein muss. Unter den Vielheiten, die noch umfassender als $\mathbb{M}$ sind, ist natürlich an erster Stelle die Vielheit zu nennen, die sich *aus allen Individuen überhaupt* zusammensetzt. Man bezeichnet diese Vielheit mit $\mathbb{D}$.[116] So hat sich gezeigt:

Die Vielheiten $\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$ sind Unmengen.[117] (5.1)

5.2.6 Konsistenz und Inkonsistenz Die vorstehenden Ausführungen lassen sich wie folgt zusammenfassen: Ein Objekt (insbesondere eine Vielheit) x heißt *konsistent*, wenn es eine x beinhaltende Menge gibt, also eine widerspruchsfreie Vorstellung von x möglich ist; andernfalls heißt x *inkonsistent*. Inkonsistente Vielheiten heißen auch *Unmengen*, da sie „unvorstellbar groß“ sind und keine entsprechende Menge existiert.
Das Nichts, jedes Individuum, jede endliche und manche unendliche Vielheit ist konsistent. Die Vielheit $\mathbb{M}$ aller Mengen ist ebenso wie die Vielheit $\mathbb{D}$ aller Individuen eine Unmenge.

Es kommt nun alles darauf an, einsichtige Prinzipien zu finden, wonach sich von der Konsistenz (oder Inkonsistenz) einer Vielheit auf die Konsistenz (bzw. Inkonsistenz) anderer Vielheiten schließen lässt. Man kann nämlich sagen, dass *fast alle Axiome der Mengenlehre solche Prinzipien sind*. Da Inkonsistenz in der „zu großen Komplexität“ einer Vielheit begründet ist, ist die Wahrheit der folgenden beiden Prinzipien leicht einzusehen, die wir später zu entsprechenden Axiomen umformulieren werden:[118]

5.2.7 Teilprinzip Die Vielheit $\mathcal{V}$ sei „kleiner“ als die Vielheit $\mathcal{W}$. Das soll heißen: Alle zu $\mathcal{V}$ gehörenden Individuen gehören auch zu $\mathcal{W}$, so dass $\mathcal{V}$ ein Teil von $\mathcal{W}$ ist. Dann gilt:

[116] Diese Bezeichnung verwendet zum Beispiel OBERSCHELP, *Allgemeine Mengenlehre* Def. 4.4 S. 36. Der Buchstabe $\mathbb{D}$ soll an „Ding“ oder „Definitionsbereich“ oder engl. „domain“ erinnern.

[117] Später leite ich diesen Satz nochmals formal aus den Axiomen ab (siehe Theorem 5.10.12 S. 123).

[118] Siehe Axiome 5.10.5 und 5.10.57.

(a) *Wenn $\mathcal{V}$ inkonsistent ist, so ist erst recht die „größere“ Vielheit $\mathcal{W}$ inkonsistent.*

(b) *Wenn $\mathcal{W}$ konsistent ist, so ist erst recht die „kleinere“ Vielheit $\mathcal{V}$ konsistent.*

5.2.8 Ersetzungsprinzip *Wählt man für jedes Individuum einer konsistenten Vielheit $\mathcal{V}$ irgendein Individuum (zulässigerweise auch dasselbe Individuum) als „Partner“ aus, so ist die Vielheit $\mathcal{W}$ aller ausgewählten Partner ebenfalls konsistent.*

Das Ersetzungsprinzip ist plausibel, weil die Vielheit $\mathcal{W}$ anschaulich entweder „genauso groß“ ist wie $\mathcal{V}$ (nämlich dann, wenn man jeweils für verschiedene Individuen von $\mathcal{V}$ immer auch *verschiedene* Partner gewählt hat), oder sie ist sogar „kleiner“ als $\mathcal{V}$ (nämlich dann, wenn man in wenigstens einem Fall für verschiedene Individuen aus $\mathcal{V}$ ein und denselben Partner ausgesucht hat). Ist also $\mathcal{V}$ konsistent, so auch das „kleinere“ oder „gleich große“ $\mathcal{W}$.

Die „konsistenten Gesamtheiten“ sind nun eigentlich überflüssig, da wir sie durch die entsprechenden *Mengen* ersetzen können. Entfernen wir die konsistenten Gesamtheiten aus unserem Objektbereich, so verbleiben dort nur noch Individuen und inkonsistente Vielheiten (Unmengen). Unter diesen Objekten stimmen nun die Mengen und die Unmengen darin überein, dass sie als Zusammenfassungen von Individuen angesehen werden können. Daher ist es sinnvoll, sie unter einem neuen Begriff, dem Klassenbegriff, zusammenzufassen:

5.2.9 Erklärung Eine *Klasse* ist ein Objekt, das entweder eine Menge oder eine Unmenge ist. Unmengen sollen auch *echte Klassen* heißen.[119]

In diesem Klassenbegriff kommen also zwei recht disparate Dinge zusammen: Mengen und (inkonsistente) Vielheiten.[120] Zum richtigen Verständnis dieses Begriffs ist Folgendes zu beachten:
1. *Alle Klassen, auch die Unmengen, sind widerspruchsfreie Objekte.* Zwar ist unsere *Vorstellung* von einer Unmenge ein widersprüchlicher Erkenntnisakt,[121] aber *die Unmenge selbst ist widerspruchsfrei*, und zwar einfach deshalb, weil sämtliche ihrer Bestandteile widerspruchsfrei existieren und sie als Vielheit nichts weiter ist als bloß die Summe dieser Bestandteile.[122]
2. Es ist jede Klasse *entweder* eine Menge *oder* eine Unmenge, *aber nicht beides*. Denn Unmengen sind inkonsistent, während Mengen (weil sie Individuen sind) konsistent sind. Da eine Klasse (gemäß der ersten Bemerkung) widerspruchsfrei ist, kann sie aber nicht zugleich konsistent und inkonsistent sein.
3. Zwischen Gesamtheiten und Klassen besteht eine genaue Entsprechung, insbesondere entspricht jeder Gesamtheit G eine Klasse G^*: für konsistente Gesamtheiten ist G^* die entsprechende Menge, und für inkonsistente Gesamtheiten ist G^* identisch mit G.

5.2.10 Erklärung Die *Elemente* einer Klasse C sind

- im Fall, dass C eine Menge ist, die von dem Erkenntnisakt C beinhalteten Individuen,

[119] So gibt es also für das Wort *Unmenge* zwei Synonyme: *inkonsistentes Objekt* und *echte Klasse*. Unmengen werden deshalb als „echte“ Klassen bezeichnet, weil sie es sind, die den Klassenbegriff erforderlich machen, denn ohne sie könnte man sich ja mit dem Mengenbegriff allein begnügen.

[120] Eine ähnliche Dichotomie des Klassenbegriffs tauchte 1903 in Bertrand Russells *Principles of Mathematics* auf, wo Russell die „Klassen als Eines“ (classes as one) von den „Klassen als Vieles“ (classes as many) unterschied (§ 74 S. 76f und § 79 S. 80). Erstere entsprechen den Mengen, letztere den (konsistenten und inkonsistenten) Vielheiten. Ich vereinige in meinem Klassenbegriff Klassen von beiden Arten, schließe aber die *konsistenten Vielheiten* aus, weil diese bereits durch Mengen repräsentiert werden.

[121] Denn ihr direkter Inhalt ist einerseits diese ganze Unmenge, andererseits aber haben wir gesehen, dass die Unmenge gar nicht als Ganze zum Inhalt der Vorstellung werden kann. Sie ist also zugleich direkter Inhalt und ist es nicht, und so haben wir einen Widerspruch.

[122] Siehe S. 57.

- im Fall, dass C eine Unmenge ist, die Individuen, aus denen C besteht.

Für beliebige Objektbezeichnungen x, y schreibt man

$$x \in y \quad \text{bzw.} \quad x \notin y$$

als Abkürzung für «es gilt bzw. gilt nicht, dass x Individuum, y Klasse und x Element von y ist». Der Zeichenverband $x \in y$ heißt eine *Elementformel*. Als Lesarten sind gebräuchlich: «x ist Element von y», «x ist in y enthalten», «y enthält x», «x liegt in y».

Ich schließe nun diesen Abschnitt mit einigen historischen Bemerkungen zum Klassen– und Mengenbegriff ab. Der *Klassenbegriff* taucht erst in der neuzeitlichen Logik auf.

Leibniz definierte eine Klasse als ein „kleineres Ganzes" (d. h. Teil eines größeren Ganzen), dessen Bestandteile eine gemeinsame Eigenschaft haben, wobei die Bestandteile verschiedener Klassen stets verschieden sind.[123] Klassen in diesem Sinn sind offenbar die Glieder der *Einteilung* eines Ganzen.[124]

Eine dem modernen Klassenverständnis näher kommende Konzeption entwickelte George Boole (1815–1864), für den der Klassenbegriff eine zentrale Rolle spielt.[125] Klassen werden nach Boole konstituiert durch die Dinge (things oder individuals), die von einem Begriffswort repräsentiert werden.[126] Für Boole existiert auch eine Klasse, die *alle* Individuen enthält, ebenso wie eine solche, die *nichts* enthält. Erstere bezeichnet er mit 1 und nennt sie „the Universe",[127] letztere bezeichnet er mit 0 und nennt sie „Nothing".[128] Sowohl bei Leibniz wie auch bei Boole hängen also Klassen eng mit Begriffen zusammen.

Für Frege (1848–1925) ist eine Klasse der *Umfang* eines Begriffs, der aber dennoch am Begriff haften und daher keine bloße „Sammlung oder Gesamtheit von Individuen" sein soll.[129] Diese Position ist eine merkwürdige „Zwischenstellung" zwischen der Gleichsetzung von Klassen mit Begriffen und ihrer „kollektiven" Deutung als bloße Gesamtheiten.[130]

Die kollektive Auffassung vertrat vor allem Ernst Schröder (1841–1902). Als Klassen wollte Schröder nämlich auch „ganz willkürlich zusammengesetzte" und „zusammengewürfelte" aner-

---

123 „Classis rerum est totum minus, constans ex rebus convenientibus in certo tertio, tanquam partibus; sic tamen ut reliquae classes contineant res contradistinctas." (Leibniz, *Ars combinatoria* Definitio 14 S. 9).

124 In diesem Sinn wird der Klassenbegriff in der Mathematik heute nur noch gebraucht, wenn von „Äquivalenzklassen" die Rede ist (dazu siehe Abschnitt 5.12).

125 Als Begründung für die Wichtigkeit der „Logic of class" gibt Bool in *Logic of Reasoning* (Werke Band 1 S. 213) an: „the conception of classes seems to be involved in all other scientific conceptions" (ebd. S. 214). Vgl. auch Boole, *Calculus of Logic* Werke Band 1 S. 125.

126 Vgl. Boole, *Laws of Thought* Kap. 2 Abschnitt 6 S. 28, Werke Band 2 S. 31: „By a class is usually meant a collection of individuals, each of which a particular name or description is applied", wobei Boole explizit die Fälle zulassen will, in denen zu einer Klasse nur ein einziges oder gar kein Ding oder alle Dinge gehören. Vgl. auch Boole, *Logic and Reasoning* Werke Band 1 S. 212.

127 Vgl. Boole, *Laws of Thought* Kap. 3 Abschnitt 13 S. 48, Werke Band 2 S. 52f: „... the class represented by 1 must be ‚the Universe'", in dieser Klasse finden wir „*all* the individuals that exist in *any* class." Vgl. Boole, *Mathematical Analysis* S. 15, Werke Band 1 S. 60: „Let us employ the symbol 1, or unity, to represent the Universe, and let us understand it as comprehending every conceivable class of objects whether actually existing or not".

128 Vgl. Boole, *Laws of Thought* Kap. 3 Abschnitt 13 S. 47, Werke Band 2 S. 52: „... the symbol 0 represent[s] Nothing. In accordance with a previous definition, we may term Nothing a class."

129 Frege, *Kritische Beleuchtung* S. 451. Ebd. S. 455 sagt Frege, es sei verfehlt, „den Umfang des Begriffes als Klasse ... auf die Einzeldinge zu stützen". Er bestehe nicht so aus den unter ihn fallenden Gegenständen „wie ein Wald aus Bäumen", sondern habe „an dem Begriff selbst und nur an diesem seinen Halt".

130 Gegen die kollektive Auffassung machte Frege darauf aufmerksam, dass die Vertreter dieser Auffassung mit einelementigen und leeren Klassen arbeiten, die es bei dieser Auffassung aber eigentlich nicht geben dürfte (vgl. Frege, *Kritische Beleuchtung*, besonders S. 427, 444f und 451–453).

kennen.[131] Dieser Auffassung schloss sich auch Giuseppe PEANO (1858–1932) an, der unter einer Klasse eine „Anhäufungen von Seienden“ verstand.[132]

Bertrand RUSSELL (1872–1970) unterschied 1903, wie schon in Fußnote 120 auf S. 76 erwähnt, zwischen zwei Arten von Klassen: „class as many“ (Vielheiten) und „class as one“ (begriffsartige Einzeldinge). Seit 1906 bekannte sich RUSSELL jedoch zur nominalistischen „Keine-Klassen-Theorie“.[133] Ihr zufolge sind Klassenbezeichnungen für sich genommen sinnlos; sie haben nur im Kontext von Formeln eine Bedeutung.[134] QUINE behauptete aber zu Recht, dass RUSSELL wider Willen die Klassen als reale abstrakte Objekte nicht vollkommen eliminiert, sondern bloß durch abstrakte Eigenschaften ersetzt hat,[135] denn in einer sinnvollen Formel steht die Klassenbezeichnung für eine Eigenschaft.[136] So können RUSSELLs Klassen also als Begriffe im realistischen Sinn gedeutet werden.

Wie der späte RUSSELL, wollte auch Willard Van Orman QUINE (1908–2000) in nominalistischer Weise abstrakte Objekte möglichst vermeiden, musste aber zugeben, dass Mathematik und Naturwissenschaften bislang nicht ohne die Annahme solcher Objekte auskommen.[137] QUINE arbeitete sowohl mit den nur nominellen, objektiv nicht existierenden Klassen im Sinne RUSSELLs, die er *virtuelle Klassen* nannte,[138] als auch mit *realen Klassen*,[139] welche als echte Universalien existieren.[140] Diese teilte er ein in solche, die Elemente anderer Klassen sein können, und solche, die das nicht können und die er „äußerste Klassen“ (ultimate classes) nannte.[141] Erstere sind in unserer Terminologie Mengen, letztere Unmengen.[142] Während er sich die realen Klassen (also Mengen und Unmengen) als reale abstrakte Eigenschaften vorstellte,[143] sollte es sich bei den virtuellen Klassen um eine reine „façon à parler“ handeln, und zwar war für QUINE eine Formel wie $\ll a$ ist Element der Klasse aller x mit Eigenschaft $F \gg$ nur eine andere Schreibweise für $\ll a$ hat die Eigenschaft

---

131 Vgl. SCHRÖDER, *Algebra der Logik* Band 1 S. 100.

132 PEANO, *Arithmetices Principia* Logicae notationes Kap. 4 S. 27f: „Signo K significatur *classis*, sive entium aggregatio.“

133 RUSSELL, *Difficulties* S. 45–47 sowie S. 53, Fußnote (Note, added on February 5th, 1906): „I now feel hardly any doubt that the no-classes theory affords the complete solution of all the difficulties“. Vgl. RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica* Einl. Kap. III(2) S. 72, deutsche Ausgabe S. 103: Klassen sind „nur konventionelle Zeichen der Symbolik oder Sprache, nicht echte Gegenstände“.

134 „The symbols of classes ... are ... incomplete symbols: their *uses* are defined, but they themselves are not assumed to mean anything at all.“ (RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica* S. 71, deutsche Ausgabe S. 103). Bei den Formeln, in denen Klassenbezeichnungen Ψ sinnvoll werden, handelt es sich in erster Linie um Elementformeln $x \in \Psi$, die einer Sachverhaltsbeschreibung gleichkommen, in der x eine Eigenschaft Ψ zugeschrieben wird. Dass man *jede* Formel φ gleichwertig durch eine Formel $x \in \Psi$ ersetzen kann, ist der Inhalt des RUSSELLschen *Reduzibilitätsaxioms* (vgl. RUSSELL, *Theory of Types* Kap. 5 S. 80–83; RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica* S. 55-60, deutsche Ausgabe S. 80–86).

135 „Russell's contextual definition of class names ... does not dispense with abstract entities, but only eliminates so-called classes in favor of properties“ (QUINE, *Mathematical Logic* S. 121 Fußnote 1).

136 Siehe Fußnote 134.

137 „One may prefer to regard abstractions as fictions or manners of speaking ... Such a nominalistic program presents extreme difficulty, if much of standard mathematics and natural science is to be really analyzed ... If a nominalistic theory ... should be achieved, we may gladly accept it ...; meanwile, however, we have no choise but to admit those abstract entities“ (QUINE, *Mathematical Logic* S. 121).

138 Vgl. QUINE, *Set Theory* Teil 1 Kap. 1 Nr. 2, deutsche Ausgabe S. 12–16.

139 Vgl. QUINE, *Set Theory* Teil 1 Kap. 2, deutsche Ausgabe S. 21–35.

140 Vgl. QUINE, *Reification* Nr. 3 S. 114, deutsche Ausgabe S. 110. Ontologisch sind es für ihn Aggregate oder rein extensionale Attribute (vgl. *Set Theory and its Logic* , Einführung, deutsche Ausgabe S. 1f).

141 Vgl. QUINE, *Set Theory* Einführung, deutsche Ausgabe S. 3 und Teil 3 Kap. 13 Nr. 42 S. 219–227.

142 Vgl. QUINE, *Set Theory* S. 3: „Klassen, die Elemente sein können, werden Mengen genannt. Die übrigen sind gelegentlich ‚eigentliche Klassen‘ genannt worden; ich nennen sie lieber *äußerste* Klassen (ultimate classes), in Anspielung darauf, dass sie ihrerseits nicht wieder Elemente von weiteren Klassen sein können“.

143 Genauer sind es „properties in abstraction from any differences which are not reflected in differences of instances“ (QUINE, *Mathematical Logic* S. 120f.)

F≫.[144] Wieso kann man diese Klasse nicht als Bezeichnung für ein reales Objekt, nämlich für die abstrakte Eigenschaft F ansehen? Der Grund dafür ist, dass es in QUINEs logischem System zu Widersprüchen führen würde, wenn man derartige Klassen als Werte von „gebundenen“ Variablen (d. h. von solchen, die zum Quantifizieren verwendet werden) zulässt, und nach QUINEs Ansicht heißt Sein, Wert einer Variablen zu sein („to be is to be the value of a variable“).[145] Doch wenn eine Quantifikation ausgeschlossen ist, heißt dies meines Erachtens nicht, dass die Objekte nicht existieren, sondern nur, dass sich die ontologische Eigenart dieser Objekte einer logisch einwandfreien Quantifikation widersetzt. QUINEs virtuelle Klassen können und sollten also ebenso wie seine realen Klassen als reale abstrakte Objekte (nämlich als Begriffe) verstanden werden.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Klassenauffassungen zwischen einer begriffsmäßigen Auffassung und einer Auffassung, wonach Klassen bloße Vielheiten oder Gesamtheiten von Seienden sind, hin– und herschwanken. In meinem obigen Klassenbegriff ist beides integriert: Unmengen sind reine Gesamtheiten, Mengen aber spezielle Begriffe.

Der *Mengenbegriff* geht ganz auf CANTOR zurück,[146] der sich Mengen als begrifflich-mentale Zusammenfassungen vorstellte. Echte Klassen dagegen, die sich nicht zu Einheiten zusammenfassen lassen, hat CANTOR aus der Mengenlehre ausgeschlossen. Auch in der klassischen, durch Ernst ZERMELO 1908 und Adolf Abraham FRAENKEL 1922 formulierten axiomatischen Mengenlehre, die man nach den Initialen von ZERMELO und FRAENKEL als **ZF**-Mengenlehre bezeichnet,[147] kommen keine umfassenderen Gesamtheiten als Mengen vor.

Eine fast ebenso weit verbreitete, mit ZF konkurrierende Mengenlehre, die mit Klassen arbeitet, wird nach den Initialen ihrer Erfinder John VON NEUMANN, Paul BERNAYS und Kurt GÖDEL als **NBG**-Mengenlehre bezeichnet. Erstmals hat VON NEUMANN in seinen Axiomensystemen von 1925 und 1928 eine Mengenlehre vorgestellt, in denen Gesamtheiten vorkommen, die „größer“ sind als Mengen. Für diese Gesamtheiten und die Mengen benutzte er aber noch nicht die gemeinsame Bezeichnung „Klassen“, sondern sprach von „Bereichen“.[148] Erst 1930 wurde dann der Klassenbegriff explizit von BERNAYS in die Mengenlehre eingeführt.[149] Im System von BERNAYS gibt es zu jeder Menge auch eine Klasse mit genau denselben Elementen. In dieser Form hat sich das System nicht allgemein durchgesetzt; die gewöhnlich akzeptierte Form von NBG formulierte GÖDEL 1940.[150] Nach GÖDEL gibt es eigentlich nur einen Grundbegriff, nämlich den der Klasse, und die Mengen stellen sich als ganz bestimmte Klassen heraus. Mengen sind die „kleineren“ Klassen, und sie zeichnen sich gegenüber Nichtmengen dadurch aus, dass sie als Elemente anderer Klassen auftreten können. Diese Charakteristik trifft auch auf die Klassen und Mengen zu, die ich oben definiert habe.

---

144 Vgl. QUINE, *Set Theory* S. 12.

145 QUINE, *On what there is* S. 15; deutsche Ausgabe S. 22.

146 Siehe S. 71.

147 Vgl. ZERMELO, *Grundlagen der Mengenlehre* und *Grenzzahlen und Mengenbereiche* sowie FRAENKEL, *Cantor-Zermelosche Mengenlehre* und schließlich FRAENKEL, *Mengenlehre* § 16 S. 271–312.

148 Vgl. NEUMANN, *Eine Axiomatisierung* § 4 S. 45 und NEUMANN, *Die Axiomatisierung* II.2 S. 354.

149 Nach FELGNER [HG], *Mengenlehre* Einleitung S. 5 stellte Bernays „sein System bereits 1930 in seinen Vorlesungen in Göttingen vor“. Er publizierte es in sieben Teilen von 1937 bis 1954 unter dem Titel *A System of Axiomatic Set Theory* in *The Journal of Symbolic Logic* (siehe Literaturverzeichnis).

150 GÖDEL, *Consistency* S. 3–7, Werke Band 2 S. 35–39.

5.3 Extensionalitäts- und Komprehensionsaxiom

Es lassen sich nun auf der Grundlage meiner Klassen– und Mengendefinition die beiden wichtigsten Axiome der Klassenlehre, nämlich das Extensionalitäts– und das Komprehensionsaxiom, einsichtig machen. Das fundamentalste Klassenaxiom ist das Extensionalitätsaxiom:[151]

5.3.1 Extensionalitätsaxiom *Verschiedene Klassen haben nicht genau dieselben Elemente.*

Plausibilitätsbetrachtung. Sei A und B jeweils eine Bezeichnung für eine Klasse. Zu zeigen ist, dass A und B nicht zugleich dieselben Elemente haben und dennoch verschieden sein können. Hierzu setzen wir voraus, dass A und B dieselben Elemente haben, und müssen zeigen, dass dann $A = B$ ist. Folgende Fälle kommen in Betracht:

(i) A bezeichnet ebenso wie B eine Unmenge,
(ii) A bezeichnet ebenso wie B eine Menge,
(iii) A bezeichnet ein Menge und B eine Unmenge,
(iv) A bezeichnet eine Unmenge und B eine Menge.

Dass A und B „genau dieselben Elemente haben“ hat in diesen Fällen folgende Bedeutung:
• Im Fall (i) bedeutet es, dass sie aus genau denselben Individuen bestehen. Da nun aber eine Vielheit *nichts anderes* ist als die Summe ihrer Bestandteile, kann es keine verschiedenen Vielheiten mit den gleichen Individuen als Bestandteilen geben. Daher gilt $A = B$.
• Im Fall (ii) bedeutet es, dass sie genau dieselbe Gesamtheit von Individuen direkt beinhalten. Da nun aber Mengen Denkformen sind, die außer einer reinen Gesamtheit von Individuen *nichts anderes* direkt beinhalten, gibt es keine verschiedenen Mengen, welche dieselbe Gesamtheit von Individuen direkt beinhalten. Daher muss auch jetzt $A = B$ sein.
• In den Fällen (iii) und (iv) bedeutet es, dass diejenige der beiden Klassen, die eine Menge ist, genau diejenigen Individuen beinhaltet, aus denen sich die andere zusammensetzt. Aber dann wären die Individuen einer Unmenge der direkte Inhalt einer Menge, was der Definition der Unmenge (5.2.4 S. 74) widerspricht. So können Fälle (iii) und (iv) gar nicht eintreten. □

Während über das Extensionalitätsaxiom Einigkeit besteht, scheiden sich die Geister, wenn es um das *Komprehensionsaxiom* geht, welches festlegt, unter welchen Umständen eine vorliegende Gesamtheit von Objekten in einer Menge oder Klasse zusammengefasst ist (oder: zusammengefasst werden kann). Für eine „realistische“ Mengenlehre bietet sich das folgende Komprehensionsaxiom an, welches schlicht besagt, dass *beliebige* Gesamtheiten von Individuen *stets* eine Klasse bilden:

5.3.2 Komprehensionsaxiom (nicht-formale Version)

> *Zu jeder Gesamtheit von (null, einem oder mehreren) ausgewählten Individuen existiert mindestens eine Klasse, die genau die ausgewählten Individuen enthält.*

Plausibilitätsbetrachtung. Eine Gesamtheit ist entweder konsistent: Dann existiert eine ihre Individuen beinhaltende Menge. Oder sie ist inkonsistent: Dann bildet sie eine Unmenge. In beiden Fällen haben wir eine Klasse, deren Elemente genau die Individuen der Gesamtheit sind. □

[151] Es wurde (für Mengen) erstmals von Zermelo als „Axiom I“ seiner *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* ausgesprochen. Zermelo nannte es „Axiom der Bestimmtheit“. Bernays formulierte zwei Extensionalitätsaxiome, eines für Klassen und eines für Mengen, die er explizit „Axioms of Extensionality“ nannte (vgl. Bernays, *Axiomatic set theory* Teil 1 S. 67). Gödel schließlich, der Mengen als spezielle Klassen betrachtete, formuliert ein einziges Axiom im Sinn des hier genannten (vgl. Gödel, *Consistency* Axiom A3 S. 3, Werke Band 2 S. 35).

Bemerkung. Für die formale Mengenlehre, in der Gesamtheiten nur durch einen sprachlichen Ausdruck gegeben sein können, muss man das Axiom wie folgt abwandeln: *Für jede Eigenschaftsbeschreibung („Formel“) existiert mindestens eine Klasse, die genau diejenigen Individuen enthält, auf welche die Beschreibung zutrifft.*[152]

Das folgende Theorem fasst das Extensionalitäts– und das Komprehensionsaxiom zusammen:

5.3.3 Komprehensionstheorem für Klassen (nicht-formale Version) *Zu jeder Gesamtheit von Individuen existiert genau eine Klasse, welche diese Individuen enthält.*

Beweis. Nach dem Komprehensionsaxiom 5.3.2 existiert *mindestens eine* solche Klasse, und nach dem Extensionalitätsaxiom 5.3.1 *nicht mehr als eine.* □

Als eine erste **Anwendung** des Komprehensionstheorems können wir die folgenden allgemeinen Klassenbezeichnungen einführen, zu denen auch die oben schon benutzten Bezeichnungen $\{x\}$ und $\{x, y\}$ für ein– und zweielementige Mengen gehören:

5.3.4 Erklärung (aufzählende Klassenbezeichnung) Setzen wir zwischen geschweifte Klammern $\{\}$ eine Aufzählung von Objektbezeichnungen, die im Fall mehrerer Bezeichnungen durch Kommata voneinander getrennt sind, so heißt der so entstehende Zeichenverband ein *aufzählender Klassenterm.* Diesen benutzen wir als Bezeichnung für die (nach dem Komprehensionssatz existierende und eindeutig bestimmte) Klasse, die genau die aufgezählten *Individuen* als Elemente hat.

Man beachte, dass Klassen *nur Individuen* als Elemente haben können, weshalb wir die eventuell vorhandenen Nichtindividuen unter den aufgezählten Objekten einfach ignorieren: Die Hinzufügung oder Entfernung von Bezeichnungen für Nichtindividuen verändert die Bedeutung des Klassenterms nicht. Auch ändert sich seine Bedeutung nicht, wenn die Reihenfolge der aufgezählten Objekte vertauscht oder ein schon aufgezähltes Objekt wiederholt wird. Für beliebige Objektbezeichnungen x, y gilt also beispielsweise $\{x, x\} = \{x\}$ und $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Beispiele.

(1) $\{\}$ bezeichnet die Klasse mit null Elementen, ist also eine Bezeichnung für die leere Menge $\emptyset$. Da $\mathbb{D}$ als Unmenge kein Individuum ist, bezeichnet auch $\{\mathbb{D}\}$ die leere Menge.

(2) Bezeichnet x ein Individuum, so bezeichnet $\{x\}$ die Einermenge, die nur x enthält. Bezeichnen x, y Individuen, so bezeichnet $\{x, y\}$ die Menge, deren einzige Elemente x und y sind (das ist im Fall $x \neq y$ eine Zweiermenge). Bezeichnen x, y, z Individuen, so bezeichnet $\{x, y, z\}$ die genau diese Individuen enthaltende Klasse usw.

Die Geschichte des Komprehensionsaxioms ist eng verknüpft mit den so genannten „Paradoxien“ oder „Antinomien“ der Mengenlehre und mit der darauf beruhenden Grundlagenkrise. Sie beginnt mit Frege, der im ersten Band seiner *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) als fünftes „Grundgesetz“ ein Axiom anführte, welches voraussetzt, dass es *zu jedem Begriff eine Menge gibt, welcher genau die Instanzen des Begriffs angehören.* Anders gesagt:

> *Zu jeder beliebigen Eigenschaft existiert eine Menge, die genau diejenigen Objekte enthält, welche diese Eigenschaft haben.*[153]

[152] Siehe die Formulierung 5.9.10 S. 118; siehe auch S. 375.

Dieser verfehlte Grundsatz wird heute das „naive“ Komprehensionsaxiom genannt. Die Existenz inkonsistenter Vielheiten war FREGE noch unbekannt, und so war er, wie er selbst sagt, „auf's Höchste überrascht“, als ihm RUSSELL 1902 brieflich einen Begriff mitteilte, zu dem es keine entsprechende Menge gibt:[154] Es existiert keine Menge Ru, deren Elemente die Mengen X sind, die sich nicht selbst enthalten (für die also $X \notin X$ gilt). Diese „RUSSELLsche Menge“ Ru wäre (wenn sie existiert) dadurch charakterisiert, dass für jede Menge X

$X \in \mathsf{Ru}$ dann und nur dann gilt, wenn $X \notin X$,

was ein vollkommen klares Kriterium zu sein scheint, das für jede beliebige Menge X klärt, ob sie Element von Ru ist oder nicht. Da es aber für *jede* Menge X gelten soll, muss es auch für Ru selbst in der Rolle von X gelten: Dann aber besagt es, dass

$\mathsf{Ru} \in \mathsf{Ru}$ dann und nur dann gilt, wenn $\mathsf{Ru} \notin \mathsf{Ru}$,

was absurd ist.[155] Es existiert also zu dem Begriff „Menge, die sich nicht selbst enthält“ keine Menge, deren Elemente genau die Instanzen dieses Begriffs sind.[156] Ein anderes Gegenbeispiel zum FREGEschen Komprehensionsaxiom ist der Begriff „Individuum“, denn die alle Instanzen dieses Begriffs enthaltende Klasse ist keine Menge, sondern die Unmenge $\mathbb{D}$. In seinem Antwortbrief an RUSSELL bekannte FREGE, ihm scheine nun „die einzig mögliche Grundlage der Arithmetik überhaupt zu versinken“.[157] Von diesem Schlag hat er sich nicht mehr erholt. Ein in seinen letzten Lebensjahren 1924/25 geplanter „Neuer Versuch zur Grundlegung der Arithmetik“ blieb unvollendet.[158]

Die Tatsache, dass die „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“ nicht existiert, ist als „RUSSELLsches Paradoxon“ in die Geschichte eingegangen.[159] Dieses Paradoxon schien „die Axt an die Wurzel der CANTORschen Mengenlehre zu legen“[160] und markiert den Beginn der neuzeitlichen mathematischen Grundlagenkrise. Unmittelbar nach der Entdeckung dieses Paradoxons wurden noch weitere Paradoxien bekannt,[161] und dies führte in den ersten Jahrzehnten

---

153 Vgl. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik* Band 1 § 20 S. 36a; siehe dort auch die „Zusammenstellung der Grundgesetze“ in § 47 auf S. 61. FREGE nennt dieses Gesetz das „Grundgesetz der Werteverläufe“ (Band 1 Vorwort S. VII), denn explizit redet FREGE weder von Mengen noch von Klassen, sondern von „Werteverläufen“. Darunter versteht er Begriffsumfänge (Band 1 § 3 S. 8), und Begriffsumfänge wiederum sind für ihn Klassen (Band 2 Nachwort S. 253), die selbst Instanzen von Begriffen sein können (Band 1 § 2 S. 7): das sind in unserer Terminologie Mengen. FREGEs fünftes Grundgesetz besagt nun, dass zwei Begriffe, die dieselben Instanzen haben, auch dieselben Werteverläufe haben. Dies setzt voraus, dass jeder Begriff einen „Werteverlauf“ hat, es also stets eine Menge gibt, welche die Instanzen des Begriffs enthält.

154 Vgl. RUSSELLs Brief an FREGE vom 16. Juni 1902 (gedruckt in FREGE, *Briefwechsel* S. 211f) und FREGEs Reaktion in seinem Brief an RUSSELL vom 22. Juni 1902 (ebd. S. 212–215).

155 Die Entdeckung des Widerspruchs fällt in das Jahr 1901, denn in einem Brief an FREGE (vom 24. Juni 1902, siehe FREGE, *Briefwechsel* S. 215–217), bemerkte RUSSELL, dass er schon „seit einem Jahr“ darüber nachgedacht hatte. In seinem Brief an FREGE vom 16. Juni 1902 (FREGE, *Briefwechsel* S. 211f) spricht er etwas unklar vom „Prädikat, ein Prädikat zu sein, welches von sich selbst nicht prädiziert werden kann“ und davon, dass es „keine Klasse (als Ganzes) derjenigen Klassen, die als Ganze sich selbst nicht angehören“ gibt. Präziser beschrieb RUSSELL seine Entdeckung 1903 in *The Principles of Mathematics* (Kap. 10 § 101 S. 102), wo der „RUSSELLsche Widerspruch“ zum ersten Mal veröffentlicht wurde. Für „Menge“ schrieb er hier „class as one“. Vgl. auch RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica* Einl. S. 77, deutsche Ausgabe S. 110f.

156 Wie wir sehen werden, gibt es aber eine entsprechende *Un*menge (siehe Theorem 5.10.8 auf S. 121).

157 FREGEs Brief an RUSSELL vom 22. Juni 1902.

158 Hierzu hat FREGE nur Skizzen hinterlassen (vgl. FREGE, *Nachgelassene Schriften* S. 298–302).

159 Die Formulierung „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“ wurde anscheinend erstmals 1908 von GRELLING benutzt (vgl. GRELLING, *Paradoxien* S. 303). RUSSELL selbst vermied den Ausdruck „Menge“, er redet von „class“ oder „class as one“ (siehe Fußnote 155).

160 SCHMIDT, *Mengenlehre* S. 25.

161 Siehe Abschnitt 5.6. Sieben von ihnen werden besprochen in den *Principia Mathematica* von RUSSELL und WHITEHEAD (Einl. S. 60f, deutsche Ausgabe S. 87–89); acht von ihnen zählt RAMSEY auf (*Foundations* S. 145).

des 20. Jahrhunderts zu einem geistigen Ringen mit der Mengenlehre und der mit ihr verbundenen Konzeption der aktual unendlichen Mengen. Während die radikalste Partei, der *Intuitionismus* unter der Führung von Brouwer, die Cantorsche Mengenlehre und die mit ihr verbundene Unendlichkeitskonzeption ganz verwarf, versuchten die *Formalisten* um Hilbert formal an unendlichen Mengen festzuhalten, ohne deren tatsächliche Existenz zu behaupten, und die *Logizisten* um Russell wollten eine logisch revidierte widerspruchsfreie Mengenlehre im realistischen Sinne beibehalten.

Die einzigartige Einsicht, die sich für eine realistische Ontologie aus dem „Russellschen Paradoxon“ ergibt, ist nun einfach die, dass die in Abbildung 5.1 (S. 72) dargestellte „naive“ Ontologie, die dem naiven Komprehensionsaxiom entspricht, falsch ist und demzufolge Abbildung 5.2 S. 72 bzw. 5.3 S. 74 der Wahrheit entspricht. Anders gesagt: Man muss die tatsächliche Existenz von Unmengen akzeptieren.[162] Für das „Komprehensionsaxiom für Mengen“ heißt dies, dass Begriffe, denen Mengen entsprechen, hinsichtlich ihres Umfangs *begrenzt* sein müssen: sog. „uferlose“ Mengenbildungen sind auszuschließen. In der Art, wie dies geschieht, unterscheiden sich nun die verschiedenen „nicht-naiven“ Komprehensionsaxiome, die auch das wesentliche Unterscheidungsmerkmal der verschiedenen modernen Systeme der Mengen– oder Klassenlehre sind. Es ist hier der passende Ort, diese Systeme mit ihrem jeweiligen Komprehensionsaxiom kurz vorzustellen.

Das älteste System ist die auf Russell zurückgehende **Typentheorie**.[163] Hiernach wird das Universum in sog. Typen eingeteilt. Den untersten Typus haben die Einzeldinge, den nächst höheren Typus haben Klassen, deren Elemente Individuen sind, darüber kommen Klassen von Klassen von Individuen usw; alle diese Typen werden nummeriert. Es wird gefordert, dass jede Klasse einen solchen Typus hat, und dass ihre Elemente genau dem vorhergehenden Typus angehören. Das zugehörige Komprehensionsaxiom lautet nun vereinfacht:

> *Zu jeder Eigenschaft, die sich auf Objekte ein und desselben Typus erstreckt (und nur zu solchen Eigenschaften) existiert eine Menge, deren Elemente genau diejenigen Objekte sind, auf welche die Eigenschaft zutrifft.*[164]

Von einer Menge, die alle sich selbst nicht enthaltenden Mengen enthält, kann nun nicht mehr die Rede sein, denn diese müsste Elemente haben, die verschiedenen (sogar allen) Typen angehören. Eine Universalklasse, die alle Mengen schlechthin umfasst, gibt es aus demselben Grund auch nicht. Alles ist von unten nach oben hin „übersichtlich“ aufgebaut, und so ist das System gegen Widersprüche gut abgesichert. Es ist jedoch zu restriktiv, und intuitiv kaum plausibel: Wieso sollen Objekte verschiedener Typen nicht in einer Menge oder Klasse vereint sein können? So haben die meisten

---

[162] Diese Einsicht hatte Cantor erstaunlicherweise bereits 1899, also vor der Veröffentlichung des Russellschen Paradoxons, klar ausgesprochen, indem er zwischen konsistenten und inkonsistenten Vielheiten unterschied (vgl. Fußnote 113 auf S. 73).

[163] Ansatzweise wurde diese von Russell bereits 1903 in den *Principles of Mathematics* (Appendix B § 497–499 S. 523–528) und 1908 in *Mathematical Logic as based on the Theory of Types* entwickelt und schließlich von Russell und Whitehead in die *Principia Mathematica* (1910/11) inkorporiert.

[164] Nur dem wesentlichen Inhalt, nicht der Form nach, gibt dieser Satz die Russellsche Annahme wieder. In Russells Originalversion heißt es einfach: „Every propositional function must determine a class“ (*Principia Mathematica* I S. 76), wobei „class“ hier für „Menge“ steht. Dies wäre genau das naive Komprehensionsaxiom, würde man unter „propositional function“ eine *beliebige* Begriffs– oder Eigenschaftsbeschreibung verstehen. Jedoch hat Russell neben der genannten Hierarchie von Typen für Klassen noch eine solche für Relationen, und eine dritte für Satzfunktionen oder Eigenschaftsbeschreibungen („propositional functions“) errichtet. Das Ganze ist sogar noch komplizierter, weil Russell für Satzfunktionen ein und desselben Typs noch solche verschiedener Ordnung eingeführt hat. Insgesamt ergibt sich dadurch ein kompliziertes, baumartiges Gesamtgebilde der Typenhierarchie, weshalb man von einer *verzweigten Typentheorie* spricht. Im Gegensatz hierzu steht die *reine* oder *vereinfachte* Form der Typentheorie, die von Leon Chwistek und Frank Plumpton Ramsey in den Jahren von 1921–1926 entwickelt wurde (vgl. Chwistek, *Hypothesen der Mengenlehre* S. 439–440 mit Fußnote 5 auf S. 440 sowie Ramsey, *Foundations* S. 165; siehe auch S. 97–98).

Mathematiker sich zu einer axiomatischen Mengenlehre entschlossen, in welcher typenfreie Axiome eine weitgehend freie Mengenbildung ermöglichen. Ein anderer Ausweg wäre eine sog. *kumulative* Typentheorie, in welcher eine Klasse eines bestimmten Typs nicht nur die Objekte der direkt vorhergehenden Stufe, sondern auch Objekte aller anderen tiefer gelegenen Stufen als Element haben kann. Solcherart sind die „Stufen" in der Mengenlehre von Dieter Klaua, ähnlich die „type levels" bei Dana Scott.[165]

Von den typenfreien Systemen der Mengenlehre bespreche ich nun zuerst ein etwas exotisches System, weil dieses in manchen Zügen noch an die Typentheorie erinnert: die **NF-Mengenlehre** von Quine, benannt nach seinem Artikel *New Foundations* aus dem Jahre 1937. Quine geht (wie vor ihm bereits Russell und Frege) davon aus, dass Eigenschaftsbeschreibungen nur durch ganz bestimmte Formeln einer logischen Kunstsprache geschehen dürfen. Die einzig zulässigen Formeln sind bei Quine sehr einfach aufgebaut: Man bildet zunächst aus Variablen $x, y, z, \ldots$, die für Individuen stehen können, Elementformeln $x \in y$. Sodann darf man mit schon gebildeten Formeln A und B stets eine Formel der alternativen Verneinung (≪nicht: A oder B≫) oder der universellen Quantifikation (≪für alle x gilt A≫) bilden und erhält dadurch kompliziertere Formeln. Eine so gebildete Formel nennt Quine nun *stratifiziert*, wenn es möglich ist, allen in ihr vorkommenden Variablen natürliche Zahlen zuzuordnen, derart dass Folgendes gilt: *Wann immer in der Formel eine Elementformel $x \in y$ vorkommt, soll die y zugeordnete Zahl um genau eins größer sein als die x zugeordnete.*[166] Das Komprehensionsaxiom von NF besagt nun:

> *Zu jeder mit einer stratifizierten Formel formulierbaren Eigenschaft gibt es eine Menge, deren Elemente diejenigen Objekte sind, auf welche die Eigenschaft zutrifft.*

Die Stratifizierungsforderung erinnert an die Typentheorie, weil sie die Variablen in eine Rangordnung setzt; dies verhindert die Bildung der Russellschen Menge. Auf der anderen Seite lässt NF die Bildung extrem vieler Mengen M zu, die durch Russells Typentheorie ausgeschlossen waren, darunter sogar Mengen M, für die $M \in M$ gilt.[167] Aber wenn NF widerspruchsfrei sein sollte (was nicht bewiesen ist), so zeigt schon die Existenz von derartigen Mengen, dass es keine intuitive Einsicht in die Mengentheorie ist, die das Komprehensionsaxiom von NF rechtfertigen könnte.[168]

Das Komprehensionsaxiom der „klassischen", auf Zermelo und Fraenkel zurückgehenden **ZF-Mengenlehre**[169] wurde erstmals 1908 von Zermelo unter dem Namen „Aussonderungsaxiom" veröffentlicht. In ihm verwendet Zermelo den Begriff einer „Klassenaussage, die für alle Elemente einer Menge definit ist", worunter er eine Formulierung versteht, die für jedes Element der Menge in eindeutiger Weise entweder zutrifft oder nicht:

> *Ist M eine Menge, so gibt es zu jeder Klassenaussage, die für alle Elemente von M definit ist, eine Teilmenge von M, deren Elemente genau diejenigen Elemente von M sind, auf welche die Klassenaussage zutrifft.*[170]

---

165 Vgl. Klaua, *Mengenlehre* und Scott, *Axiomatizing Set Theory*. Ideen von Scott werden auch von Potter, *Sets* aufgegriffen und in Ebbinghaus, *Mengenlehre* Kap. X § 3 S. 177–186 besprochen.

166 Beispielsweise ist also die Formel ≪nicht: $x \in y$ oder $y \in z$≫ stratifiziert: Man ordne x die Zahl 1, y die Zahl 2 und z die Zahl 3 zu. Dagegen ist ≪nicht: $x \in y$ oder $y \in x$≫ nicht stratifiziert, denn wegen $x \in y$ müsste man y eine höhere Zahl als x zuordnen, wegen $y \in x$ aber auch y eine höhere als x, was sich widerspricht. Auch die Formel ≪$x \in x$≫ ist natürlich nicht stratifiziert.

167 Zum Beispiel ergibt sich die Existenz einer „Allklasse V", „zu der absolut alles, einschließlich V selbst, gehört." (Quine, *New Foundations* S. 92, deutsche Ausgabe S. 91). Die Klasse V, die nach unserem System der Unmenge $\mathbb{D}$ entspricht, ist bei Quine also Element von V, und somit eine Menge.

168 Vgl. Fraenkel et al., *Foundations* S. 164: „there is no mental image of set theory which leads to this axiom and lends it credibility."

169 Siehe die in Fußnote 147 auf S. 79 angegebene Literatur.

Das Axiom besagt, dass man mittels einer „definiten“ Aussage aus einer schon gegebenen Menge M eine weitere „aussondern“ kann, die dann einen Teil der Elemente von M enthält und deshalb „Teilmenge“ von M genannt wird. Der Begriff „definit“ wurde später dahingehend präzisiert, dass man als „definit“ nur Formeln einer logischen Kunstsprache zuließ (wofür sich etwa die Formeln eignen, die ich bei der Besprechung von QUINEs NF beschrieben habe). Viel einfacher ist es jedoch, den Grundgedanken ZERMELOs ganz ohne Bezug auf Formeln auszusprechen. ZERMELO hat dies in seinem revidierten Axiomensystem von 1930 getan, wo er neben eine „sprachlogische“ Formulierung des Axioms folgende alternative Fassung stellte:

> *Jedem Teil einer Menge entspricht selbst eine Menge, welche alle Elemente dieses Teiles enthält.*[171]

Dieses Komprehensionsaxiom heißt auch das *Teilmengenaxiom*. Ich werde es übernehmen (siehe Axiom 5.10.5 S. 121), da es sehr plausibel ist: Es spiegelt sich darin die in Satz 5.2.7 S. 75 ausgesprochene Einsicht wieder, dass Mengen die „kleineren“ Klassen sind. Meines Erachtens ist hiermit *für Mengen* das „beste“ Komprehensionsaxiom gefunden.

Was nun aber ein Komprehensionsaxiom *für die Klassenbildung* betrifft, so kommt ein solches in der ZF-Mengenlehre nicht vor. Aus ZF entwickelten sich jedoch zwei klassische Systeme, in denen echte Klassen zugelassen werden. Das älteste von ihnen ist die nach John VON NEUMANN, Paul BERNAYS und Kurt GÖDEL benannte **NBG-Mengenlehre**, die auf Arbeiten dieser drei Mathematiker aus den Jahren 1925–1954 basiert.[172] Das andere wird nach John Leroy KELLEY und Anthony Perry MORSE als **KM-Mengenlehre** bezeichnet; es fand 1955 seinen klassischen Ausdruck im Appendix von KELLEYs Buch *General Topology* und wurde inzwischen von MORSE erheblich weiterentwickelt.[173] Eine dritte, exotische Form einer Mengenlehre mit echten Klassen ist das System, das QUINE in seinem Lehrbuch *Mathematical Logic* entwickelte (1940, revidierte Ausgabe 1951); es wird nach diesem Lehrbuch als **ML-Mengenlehre** bezeichnet und muss von QUINEs älterer NF-Mengenlehre unterschieden werden. Während für NBG ein „prädikative“ Komprehensionsaxiom für Klassen gilt, gilt für KM und ML ein „imprädikatives“ Komprehensionsaxiom:[174] Eine Beschreibung heißt *imprädikativ*, wenn in ihr auf die Gesamtheit aller Klassen Bezug genommen wird,[175] andernfalls heißt sie *prädikativ*. Von POINCARÉ und RUSSELL wurde der Gebrauch von imprädikativen Formeln für die Klassenbeschreibung als mögliche Quelle von Paradoxien verdächtigt.[176] Das „prädikative“ Komprehensionsaxiom von NBG lässt daher zur Klassenbildung nur prädikative Beschreibungen zu, während das „imprädikative“ von KM und ML in dieser Beziehung keine Einschränkungen gelten lässt. Die Axiome können wir so umschreiben:

> *Zu jeder prädikativen Beschreibung* (NBG) *bzw. zu jeder Beschreibung überhaupt* (KM und ML) *existiert eine Klasse, die genau diejenigen Individuen enthält, auf welche die Beschreibung zutrifft.*

---

170 Vgl. ZERMELO, *Grundlagen der Mengenlehre* S. 263, Axiom III. Ich habe ZERMELOs Formulierung etwas vereinfacht und an den heutigen Sprachgebrauch angepasst.

171 Vgl. ZERMELO, *Grenzzahlen und Mengenbereiche* S. 30, „Axiom der Aussonderung“.

172 Siehe S. 79.

173 Vgl. KELLEY, *General Topology* Appendix S. 250–281 und MORSE, *Theory of Sets*. Angeregt wurde das Komprehensionsaxiom dieser Theorie bereits 1940 durch QUINEs *Mathematical Logic* (Nr. 202 S. 162 in der revidierten Ausgabe), so dass man früher auch von QM-Mengenlehre (für QUINE und MORSE) sprach.

174 Vgl. FRAENKEL et al., *Foundations* S. 123 und 138.

175 Dies ist z. B. der Fall, wenn die Redewendung „für alle Klassen X gilt“ oder „es gibt eine Klasse X, so dass gilt“ in der Beschreibung vorkommt. Eingehender werden wir imprädikative Beschreibungen auf S. 98–99 diskutieren.

176 Siehe Fußnote 230 auf S. 98 und FRAENKEL et al., *Foundations* § 10 S. 193–200.

Es ist offensichtlich, dass in KM und ML mehr Klassen gebildet werden können als in NBG. Vom Standpunkt einer realistischen Mengenlehre, wie sie hier entwickelt werden soll, gibt es nun definitiv keinen Grund, imprädikative Beschreibungen als gefährlich anzusehen. Denn wenn die Individuen eine reale Existenz unabhängig vom menschlichen Denken haben, so gilt das auch für alle Vielheiten von Individuen und damit auch für alle Klassen. Ist demnach die Gesamtheit der Klassen eine feststehende, so kann man eine Klasse selbstverständlich auch mit Bezug auf diese vorgegebene Gesamtheit aller Klassen definieren. Man kann sogar sagen:

> *Jede Auswahl von Individuen schlechthin, möge sie nun durch prädikative oder imprädikative Beschreibung oder auch ganz ohne sprachliche Formulierung* (etwa durch eine Operation des betrachtenden Subjekts wie wirkliches oder mentales „Herausgreifen") *zustandekommen, setzt sich immer zu einer Klasse zusammen.*

Das ist der Inhalt meines oben formulierten Komprehensionsaxioms 5.3.2, das also offensichtlich noch weitergeht als alle vorgenannten Komprehensionsaxiome.[177] Es sagt für Klassen das Maximale aus, was in dieser Richtung überhaupt gesagt werden kann, ähnlich wie das ZERMELOsche Teilmengenaxiom das weitestgehende Komprehensionsaxiom für Mengen ist. Man kann meines Erachtens diese maximalen Versionen ohne Furcht vor Widersprüchen benutzen, da hier ein anschaulich ganz klarer Befund vorliegt. Dagegen wird man vielleicht mit Berufung auf das RUSSELLsche Paradoxon einwenden, dass die Anschauung uns irreführen kann. Diesbezüglich sollte man aber unterscheiden zwischen vollkommen klaren Ideen, welche sich uns nach Art der wahren logischen Grundgesetze als unwiderlegbar präsentieren – hier halte ich einen Irrtum für ausgeschlossen – und weniger klaren Anschauungen, die eher den Charakter von sich aufdrängenden Vermutungen haben. Die irrige Anschauung, die durch das RUSSELLsche Paradoxon zerschlagen wurde, gehört eindeutig zur zweiten Kategorie. Dies hat auch FREGE gewusst, und es ist sehr bezeichnend, wie er den verminderten Grad der Evidenz beschrieben hat, die er für sein fünftes Grundgesetz in Anspruch nahm. „Ich habe mir nie verhehlt, dass es nicht so einleuchtend ist, wie die anderen, und wie es eigentlich von einem logischen Gesetz verlangt werden muss", schrieb er im Nachwort zum Band II seiner *Grundgesetze der Arithmetik*. „Und so habe ich denn", heißt es weiter, „im Vorwort zum ersten Bande S. VII auf diese Schwäche hingewiesen". Tatsächlich findet man an der bezeichneten Stelle des 1893 verfassten ersten Bandes – zehn Jahre *vor* RUSSELLs Entdeckung – die folgenden, fast prophetisch anmutenden Worte: „Ein Streit kann ... nur um mein Grundgesetz der Werteverläufe (V) entbrennen, das von Logikern vielleicht noch nicht eigens ausgesprochen ist, obwohl man danach denkt ... Ich halte es für rein logisch. Jedenfalls ist hiermit die Stelle bezeichnet, wo die Entscheidung fallen muss."

[177] Es ist in dieser Form natürlich kein *formal-logisches* Axiom mehr; im Rahmen der formalen Logik ist das Komprehensionsaxiom von KM das allgemeinste.

5.4 Endgültige Festlegung des Objektbereichs

5.4.1 Erklärung

- *Urelemente* sollen diejenigen Individuen heißen, die keine Klassen (und somit keine Mengen) sind. Beispiele hierfür sind Punkte und Personen.
- *Klassentheoretische Objekte* sollen die Klassen und ihre Elemente heißen: also Klassen und Individuen. Offenbar kann man diese Objekte vollständig und ohne Überlappung einteilen in Urelemente, Mengen und Unmengen.
- *Externe Objekte* sollen alle Objekte heißen, die keine klassentheoretischen Objekten sind. Dazu gehören zunächst diejenigen unter den „Gesamtheiten von Individuen", die keine Klassen oder Individuen sind: nämlich das Nichts und die konsistenten Vielheiten. Extern sind außerdem alle widersprüchlichen Objekte.[178]

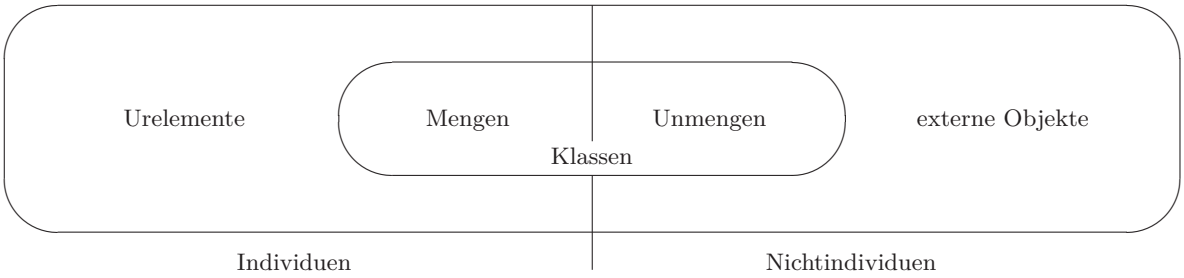


Abbildung 5.4: Gesamtübersicht über die Objekte

Der Ausdruck *Urelemente* für Individuen, die keine Mengen sind, stammt von Zermelo.[179] Sei den 1920er Jahren arbeiten die meisten Mengentheoretiker ohne Urelemente, die durch ein sog. *Reinheitsaxiom* ausgeschlossen werden.[180] Man hat dann eine „reine" Mengenlehre, in der alle Dinge Mengen und eventuell Unmengen, jedenfalls aber Klassen sind. Diese Tradition wird besonders im Lehrbuch von Jürgen Schmidt vehement verteidigt.[181] Für eine nicht nur am „praktischen" Bedarf von Mathematik und Logik orientierte Mengenlehre, die möglichst allgemein sein will, ist jedoch der Ausschluss von Urelementen vollkommen unnatürlich, weshalb unter anderem in den Lehrbüchern von Klaua, Oberschelp und Potter die Urelemente überlebt haben bzw. rehabilitiert wurden.[182] Wie viele Urelemente gibt es? Bezeichnet man für jede Menge M mit M^* den wahren Sachverhalt, dass M eine Menge ist, so ist M^* offenbar ein Urelement, wobei für verschiedene Mengen M und N auch die entsprechenden Urelemente M^* und N^* verschieden sind. Infolgedessen gibt es mindestens

[178] Ein weiteres Beispiel für externe Objekte sind die auf S. 56 in der Bemerkung nach Definition 4.5.4 erwähnten Objekte, die „zu subjektiv" sind, um kommunikabel zu sein. Diese werden wir zur Erklärung des semantischen Hintergrundes des Auswahlaxioms noch einmal benötigen (Fußnote 383 auf S. 156).

[179] Zermelo, *Grenzzahlen und Mengenbereiche* S. 35.

[180] Als Erster scheint Paul Finsler im Jahre 1920 auf die Idee gekommen zu sein, ein System der „reinen Mengen" *ohne* Urelemente zu betrachten (vgl. Finsler, *Grundlegung der Mengenlehre* S. 689f Fußnote 8a und Bernays, *Axiomatic set theory* Teil 1 S. 66 Fußnote 7). 1922 hatte dann Fraenkel an Zermelos Axiomen kritisiert, dass unter den betrachteten Dinge der Mengentheorie „sich auch solche nichtmathematischer und überhaupt nichtbegrifflicher Herkunft befinden" können. Er forderte deren Ausschluss durch ein *Beschränktheitsaxiom* (Fraenkel, *Cantor-Zermelosche Mengenlehre* S. 52f).

[181] Schmidt, *Mengenlehre* S. 36–40.

[182] Vgl. Klaua, *Mengenlehre* S. 14f und 344f, Oberschelp, *Allgemeine Mengenlehre* S. 28 und Potter, *Sets* S. 71. Potter bemerkt a.a.O. etwas spöttisch, die Theorie der „reinen" Mengen sei „zum Studium des Vakuums geeignet", aber „für jede natürliche Konzeption der Mathematik ungeeignet".

ebenso viele Urelemente wie es Mengen gibt, und die Klasse $\mathbb{U}$ aller Urelemente muss ebenso wie die Klasse $\mathbb{M}$ aller Mengen eine Unmenge sein:[183]

Die Klasse $\mathbb{U}$ aller Urelemente ist eine Unmenge.[184] (5.2)

Ich ersetze nun den bisherigen Objektbegriff (Erklärung 5.2.1) durch folgenden endgültigen:

5.4.2 Erklärung (Endgültige Festlegung des Objektbegriffs) Unter *Objekten* verstehen wir von jetzt an nur noch die klassentheoretischen Objekte, also Individuen und Klassen.

Mithin schließen wir die externen Objekte aus dem Rahmen der Mengenlehre aus. Zu erwägen wäre, ob man nicht *ein* externes Objekt, nach unserer neuen Objektdefinition also ein *Nichtobjekt*, als ein „Ersatzobjekt zur Vermeidung undefinierter Terme“ verwenden könnte. Um nämlich Ausdrücken wie $x + y$ stets eine Bedeutung zu sichern, führt man oft ein Objekt $\underline{\perp}$ ein, welches alle Ausdrücke bezeichnen sollen, die ansonsten „sinnlos“ wären: dieses Objekt $\underline{\perp}$ nennt man das „Ersatzobjekt“ oder den „Joker“.[185] Demzufolge wäre z. B. „rot + grün“ kein unsinniger Ausdruck, sondern eine Bezeichnung für $\underline{\perp}$. Insbesondere benötigen wir den Joker für Kennzeichnungen der Form ≪dasjenige (bzw. ein) x, für das … gilt≫: Wenn es nämlich nicht genau ein (bzw. gar kein solches) x gibt, soll eine solche Kennzeichnung stets den Joker bezeichnen. Als Ersatzobjekt empfiehlt sich natürlich ein solches, das gewissermaßen ganz „aus dem Rahmen“ gewöhnlicher Untersuchungen fällt. Dennoch hätte es Nachteile, hierfür wirklich ein externes Objekt zu nehmen, weil man in der Logik so etwas wie die Klasse aller vorkommenden Denotate bilden möchte, was nicht möglich wäre, wenn eines dieser Denotate extern wäre. Mit Oberschelp kann man daher folgenden Kompromiss eingehen:

5.4.3 Erklärung Als Ersatzobjekt $\underline{\perp}$ zur Vermeidung undefinierter Kennzeichnungen nehmen wir zwar ein echtes Objekt, das aber kein Individuum ist, d. h. wir nehmen als $\underline{\perp}$ eine Unmenge. Um uns hier eindeutig festzulegen, nehmen wir als $\underline{\perp}$ die Unmenge $\mathbb{D}$.

So gibt es also keine wirklich „undefinierten“ Ausdrücke mehr. Wir nennen aber alle Ausdrücke, die $\underline{\perp}$ bezeichnen, *nicht-wohldefiniert*, im Gegensatz zu *wohldefinierten* Ausdrücken, die dadurch ausgezeichnet sind, dass sie etwas anderes als $\underline{\perp}$ bezeichnen.

---

[183] Denn angenommen, $\mathbb{U}$ wäre konsistent, so erhielten wir nach dem Ersetzungsprinzip 5.2.8 S. 76 wieder eine konsistente Vielheit, wenn wir sämtliche Urelemente M^*, die einer Menge M entsprechen, durch die entsprechende Menge M ersetzen. Dadurch aber erhalten wir eine Vielheit, welche alle Mengen (und zusätzlich die Urelemente, die nicht von der Form M^* sind) umfasst. Nach dem Teilprinzip 5.2.7 S. 75 müsste dann also auch die Vielheit $\mathbb{M}$ aller Mengen konsistent sein, was falsch ist. Also war die Annahme falsch, und $\mathbb{U}$ ist inkonsistent.

[184] Später werden wir sehen, dass $\mathbb{U}$ zusammen mit $\mathbb{M}$ sogar zu den „Maximalklassen“ gehört, den größten Unmengen überhaupt, die in gewisser Weise „genauso groß“ wie ganz $\mathbb{D}$ sind (Axiom 5.15.20 S. 205).

[185] Vgl. Oberschelp, *Allgemeine Mengenlehre* S. 34f.

5.5 Eine alternative Klassenlehre mit Begriffen als Klassen

Aus den obigen Ausführungen folgt, dass *Unmengen nicht Elemente anderer Objekte sein können*[186] und darum in QUINEs Terminologie „äußerste Klassen“ darstellen.[187] Das scheint zu bedeuten, dass man Unmengen nicht zu einer Gesamtheit zusammenfassen kann: und zwar nicht einmal endlich viele von ihnen, noch nicht einmal zwei. Man muss FRAENKEL, BAR-HILLEL und LEVY recht geben, dass dies eine „wirklich eigenartige Situation“ ist.[188] Ein von diesen Mengentheoretikern vorgeschlagener Ausweg ist es nun, neue Objekte, so genannte „Hyperklassen“ einzuführen, welche Unmengen (und generell beliebige Klassen) als Elemente haben können. Man muss dann allerdings, um ein neues „RUSSELLsches Paradoxon“ zu verhindern, gewisse Hyperklassen zulassen, die keine Elemente anderer Hyperklassen sind. Diese könnte man dann wieder als Elemente von Hyper-Hyperklassen ansehen usw. Eine solche Konzeption liegt dem „erweiterten Axiomensystem“ der Mengenlehre von KLAUA zugrunde.[189] Dasselbe gilt für das erweiterte System von ACKERMANN, wo es für jede natürliche Zahl n „Mengen n-ter Art“ gibt. Mengen 1-ter Art sind die gewöhnlichen Mengen, und von dieser Art sind, wie ACKERMANN betont, bereits „alle wichtigen Mengen“. Die Mengen 2-ter Art entsprechen offenbar den gewöhnlichen Klassen, diejenigen 3-ter Art den Hyperklassen usw.[190] Eine derartige Hierarchie hatte auch bereits ZERMELO 1930 konzipiert, die bei ihm aus verschiedenen „Modellen“ der Mengenlehre mit immer umfassenderen Objektbereichen besteht: „was in einem Modell als ‚ultrafinite Un– und Übermenge‘ erscheint, ist im nächsthöheren bereits eine vollgültige ‚Menge‘ ... und bildet den Grundstein zum Aufbau eines neuen Bereichs“.[191]

Vom Standpunkt einer allumfassend konzipierten realistischen Mengenlehre gibt es jedoch hier ein Problem. Woher nimmt man die Hyperklassen, um sie zu den Objekten „hinzuzufügen“? Ideale Kandidaten für Hyperklassen wären natürlich „Vielheiten von Vielheiten“, also Vielheiten, deren *Bestandteile* andere Vielheiten sind. Aber solche existieren nach dem in der Ontologie behandelten Vielheitsaxiom nicht (4.5.6 S. 57). Die einzigen nicht-widersprüchlichen externen Objekte, die man problemlos in eine mathematische Theorie aufnehmen könnte, scheinen die *konsistenten Vielheiten* zu sein.[192] Doch gibt es nur so viele konsistente Vielheiten, wie es mehrelementige Mengen gibt. Und das ist zu wenig, wenn *jede* Auswahl von Mengen und Unmengen in einer Hyperklasse vereint sein soll – was eine nahe liegende Forderung analog zum Komprehensionsaxiom für Klassen wäre.

Der offensichtliche „Objektmangel“ zeigt jedoch, dass hier Unmögliches verlangt wird. Statt Unmengen Elemente von Hyperklassen sein zu lassen, sollte man daher erwägen, ob sie nicht Elemente von anderen Unmengen oder gar von Individuen sein können. Es gibt alternative Mengenlehren, die für solche Möglichkeiten offen sind. So können in der Klassenlehre von MADDY Unmengen Elemente anderer Unmengen sein,[193] und in der „Mengenlehre über Klassen“ von OBERSCHELP[194] nehmen Unmengen gar die Stelle von Urelementen ein und können demnach Elemente von Mengen sein. Es fehlt jedoch bei den genannten Autoren eine Begründung, die leicht nachvollziehbar wäre und darum allgemeine Plausibilität beanspruchen könnte: OBERSCHELP stützt seine Mengenlehre über Klassen auf ein Komprehensionsaxiom, das der Stratifizierungsforderung QUINEs (siehe S. 84) ähnlich ist, wofür mir keine intuitive Rechtfertigung bekannt ist. MADDY glaubt, dass es zum wahren Wesen

[186] Nach Erklärung 5.2.10 kommen als Elemente nur Individuen in Frage.

[187] Siehe S. 78.

[188] „a rather peculiar matter“ (FRAENKEL et al., *Foundations* S. 142).

[189] Vgl. KLAUA, *Mengenlehre* S. 319–345, besonders S. 328.

[190] ACKERMANN, *Axiomatik* S. 344f.

[191] ZERMELO, *Grenzzahlen und Mengenbereiche* S. 47.

[192] Die widersprüchlichen und auch die aufgrund ihrer Subjektivität nicht kommunikablen Objekte (siehe Fußnote 178 auf S. 87) dürften hierzu kaum geeignet sein.

[193] Vgl. MADDY, *Proper Classes*.

[194] Vgl. OBERSCHELP, *Set theory over classes* und OBERSCHELP, *Klassen als Urelemente*.

der Unmengen (proper classes) gehört, dass sie potentielle Gebilde sind und dass nicht für jedes Objekt feststeht, ob es Element der Unmenge ist; daher benutzt MADDY eine dreiwertige Logik, was nicht leicht nachvollziehbar ist.

Doch gibt es meines Erachtens eine intuitiv klare „begriffsartige“ Klassenauffassung, wonach Unmengen Elemente begriffsartiger Klassen sein können.[195] Ich gehe von der Beobachtung aus, dass es offensichtlich möglich ist, mehrere Unmengen als klar voneinander abgegrenzte Einheiten im Blick zu haben, also offenbar *nicht* durch einen widersprüchlichen Denkakt. Wenn etwa von „allen Objekten“ die Rede ist, haben wir Individuen und Unmengen gewissermaßen zugleich im Blick, also ein Etwas, was alle diese Objekte umfasst, als wäre es ein aus ihnen zusammengesetztes Ganzes. Ebenso haben wir ein genau die Unmengen umfassendes Etwas im Blick, wenn wir von „allen Unmengen“ reden. Und wenn von den „Unmengen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{M}$“ die Rede ist, scheinen wir ein Etwas im Blick zu haben, das $\mathbb{D}$ und $\mathbb{M}$ als Quasi-Bestandteile umfasst.

Dieses Etwas ist jeweils ein *Begriff*, und zwar im Fall der Rede von „allen Objekten“ der Begriff ≪Objekt≫, im Fall der Rede von „allen Unmengen“ der Begriff ≪Unmenge≫ und im Fall der Rede von „$\mathbb{D}$ und $\mathbb{M}$“ der Begriff, des ≪Etwas, das $\mathbb{D}$ oder $\mathbb{M}$ ist≫. Einen Begriff aber können wir generell als eine Art Klammer betrachten, die alle zugehörigen Instanzen zusammenfasst, und sofern wir die Bedeutung des Begriffs klar erfassen, ist er stets ein Individuum, auch wenn Unmengen als seine Instanzen auftreten. Man kann sagen, dass der Begriff seine Instanzen beinhaltet, jedoch geschieht dies auf eine ganz andere Weise als eine Vorstellung die in ihr gegenwärtigen Objekte beinhaltet. Während nämlich beim Vorstellen die Objekte „herbeigedacht“ werden, entsteht der Begriff durch Abstraktion, d. h. durch „Hinwegdenken“ gewisser Merkmale seiner Instanzen, so lange bis nur noch eine abstrakte Einheit vorliegt. Es führt darum zu keinem Widerspruch, dass ein Begriff eine Unmenge beinhalten kann, weil er die Unmenge ja nicht *vorstellungsmäßig* beinhaltet. Ein Begriff B existiert immer, wenn mindestens ein Objekt x existiert, aus dem B durch Abstraktion hervorgehen kann, und dabei ist es gleichgültig, von wie vielen Objekten außer x *ebenfalls* eine Abstraktion zu B führt. B existiert gewissermaßen *kraft des einen Objekts* x und fasst dann auch all die anderen Instanzen zusammen, soviel es auch sein mögen. Wir können daher eine Unmenge dadurch indirekt in einer widerspruchsfreien Vorstellung haben, dass wir als Repräsentanten der Unmenge einen entsprechenden Begriff betrachten.

Folglich könnten Unmengen problemlos Elemente von Klassen sein, *wenn* wir uns entscheiden, die Elementformel $A \in B$ anders zu definieren, als es oben geschehen ist: nämlich als Abkürzung für ≪A ist Instanz des Begriffs B≫. Klassen wären dann Begriffe. Wenn man nun das Extensionalitätsaxiom in einer solchen Klassenlehre beibehalten will (also möchte, dass niemals verschiedene Klassen dieselben Elemente haben), darf man aber nicht *alle* Begriffe als Klassen zulassen, denn verschiedene Begriffe können ja „umfangsgleich“ sein, d. h. genau dieselben Instanzen haben. So haben die beiden Begriffe ≪Polygon mit drei Seiten≫ und ≪Polygon mit drei Winkeln≫ genau dieselben Instanzen: nämlich die Dreiecke. Dennoch sind sie verschieden, weil sie verschiedene abstrakte Eigenschaften darstellen, die für Dreiecke charakteristisch sind. Man kann also nicht *alle* derartigen Begriffe zu Klassen machen, sondern muss unter umfangsgleichen Begriffen je einen auswählen. Hierbei dürfte im Allgemeinen nichts anderes übrig bleiben, als *willkürlich* vorzugehen, also von umfangsgleichen Begriffen $B_1, B_2, \ldots$ stets einfach *irgendeinen* zu wählen.[196] Man erhält dann ein System von Begriffen, in dem keine Pluralität umfangsgleicher Begriffe mehr vorkommt. Diese Begriffe also könnte man als Klassen nehmen. Ich werde jedoch diese begriffsartigen Klassen nicht *anstelle* der schon

[195] Einige dieser begriffsartigen oder „konzeptionellen“ Klassen werde ich deshalb in einer erweiterten Mengenlehre (siehe Abschnitt 5.7) den bisherigen Klassen hinzufügen.

[196] Die sich auf den ersten Blick anbietende Lösung, bei Begriffen $B_1, B_2, \ldots$, welche dieselben Instanzen haben, *noch weiter zu abstrahieren*, solange bis man einen noch abstrakteren Begriff $\mathfrak{B}$ erhält, welcher das allen diesen Begriffen $B_1, B_2, \ldots$ Gemeinsame darstellt, scheidet aus. Denn wenn es überhaupt ein solches $\mathfrak{B}$ gibt, sind die Instanzen von $\mathfrak{B}$ dann *die Begriffe* $B_1, B_2, \ldots$ *selbst* und *nicht mehr ihre Instanzen*.

eingeführten Klassen verwenden, sondern (in Abschnitt 5.5) *ergänzend* zu den bisherigen Klassen gewisse Begriffe als „konzeptionelle Klassen“ hinzufügen.

Wichtig ist nun, dass in einer rein begriffsartigen Klassenlehre unser Komprehensionsaxiom nicht mehr gilt: Es existiert nicht zu jeder Auswahl von Individuen ein widerspruchsfreier Begriff, der genau diese Individuen als Instanzen hat. Zum Beispiel gibt es *keinen* widerspruchsfreien Begriff, der genau diejenigen Begriffe als Instanzen hat, die nicht Instanzen von sich selbst sind. Diese dem Russell-Paradoxon analoge Tatsache bezeichne ich als das „Begriffs-Paradoxon“:

5.5.1 Begriffs-Paradoxon *Der Begriff* $\mathbb{R}\mathsf{u}$ *des ≪Begriffs, der nicht Instanz von sich selbst ist≫ ist widersprüchlich.*

Beweis. Wäre $\mathbb{R}\mathsf{u}$ widerspruchsfrei, so müsste feststehen, ob $\mathbb{R}\mathsf{u}$ selbst zu den Instanzen von $\mathbb{R}\mathsf{u}$ gehört oder nicht:

- Wenn nun $\mathbb{R}\mathsf{u} \in \mathbb{R}\mathsf{u}$ als wahr angenommen wird, gehört $\mathbb{R}\mathsf{u}$ nach Definition *nicht* zu den Instanzen von $\mathbb{R}\mathsf{u}$, also folgt, dass $\mathbb{R}\mathsf{u} \in \mathbb{R}\mathsf{u}$ falsch ist.

- Wenn aber $\mathbb{R}\mathsf{u} \in \mathbb{R}\mathsf{u}$ als falsch angenommen wird, gehört $\mathbb{R}\mathsf{u}$ zu den von $\mathbb{R}\mathsf{u}$ zusammengefassten Individuen, es folgt also, dass $\mathbb{R}\mathsf{u} \in \mathbb{R}\mathsf{u}$ wahr ist. □

Russell hat dieses Paradoxon in *The Principles of Mathematics* (1903) formuliert[197] und als bloße Variante des eigentlichen „Russellschen“ Paradoxons von der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, behandelt. Ein *Unterschied* zum eigentlichen Russellschen Paradoxon ist aber der, dass hier die *Widersprüchlichkeit* des Begriffs $\mathbb{R}\mathsf{u}$, also seine Nichtexistenz schlechthin abgeleitet wird, während für die Klasse Ru im Russellschen Paradoxon nur folgt, dass Ru nicht als *Individuum*, d. h. nicht als Menge existiert.[198] Für Ru bleibt also der Ausweg, eine Unmenge sein zu können, während $\mathbb{R}\mathsf{u}$ – viel radikaler – offenbar aus dem Bereich der Possibilien ganz ausgeschlossen und den Impossibilien zugeordnet werden muss. Bemerkenswert ist, dass trotz der Widersprüchlichkeit von $\mathbb{R}\mathsf{u}$ der Begriff $\mathbb{D}$, dessen Instanzen *alle* Individuen sind, nicht widersprüchlich zu sein scheint: Jedenfalls ist er von einer so einfachen Bauart, dass nicht vorstellbar ist, wo sich hier ein Widerspruch verbergen könnte. Wir haben also die merkwürdige Situation, dass der Begriff $\mathbb{R}\mathsf{u}$ widersprüchlich ist, obgleich er *weniger* Instanzen hat als der widerspruchsfreie Begriff $\mathbb{D}$. Bei der besagten Klassenkonzeption existieren also „große“ Klassen, aus denen man durch „Ausdünnung“ widersprüchliche „kleinere“ Klassen erzeugen kann.[199]

Dass sich der *Begriff* $\mathbb{R}\mathsf{u}$ des ≪Begriffs, der nicht Instanz von sich selbst ist≫ als widersprüchlich erwiesen hat, ist aber vor allem deshalb sehr seltsam, weil gemäß unserem Komprehensionsaxiom ja durchaus eine *Klasse C* existieren muss, die genau die Begriffe enthält, die nicht Instanz von sich selbst sind: Begriffe sind Individuen, und jede Auswahl von Individuen bildet eine Klasse. Bedenken wir nun, dass wir diese Klasse C ja geradezu durch den Begriff $\mathbb{R}\mathsf{u}$ *definieren*, weil wir sie anscheinend nur mittels $\mathbb{R}\mathsf{u}$ betrachten können, so haben wir die Paradoxie in ihrer vollen Schärfe vor Augen.

---

197 Kap. 10 § 101 S. 102. Russell benutzte allerdings eine andere Ausdrucksweise: Statt vom *Begriff* ≪Begriff, der nicht Instanz von sich selbst ist≫ sprach er vom *Prädikat* ≪not-predicable of oneself≫

198 Das hat Russell nicht weiter betont, wohl aber vermerkt. Denn im einen Fall lautet seine Schlussfolgerung: „‚not-predicable of oneself‘ ist not a predicate.“ Im anderen Fall lautet der Schluss: Die Mengen, die sich nicht selbst enthalten „do not form a class – or rather, that they do not form a class as one, *for the argument cannot show that they do not form a class as many*“ (Hervorhebung von mir). Man beachte die Unterscheidung zwischen ≪class as one≫ (= Menge) und ≪class as many≫ (= Vielheit, eventuell Unmenge).

199 Dieses Phänomen taucht auch in Quines begriffsartiger Klassenlehre auf (siehe S. 78–79). Im Hinblick darauf sprach Quine von der „Symmetrie“ seines Klassenuniversums: „the totality of elements is symmetrical between small and large“ (Quine, *Mathematical Logic* S. 165).

So scheint die Klasse C ein Beispiel für eine Klasse zu sein, die nur mittels eines widersprüchlichen Begriffs definiert werden kann: Jedenfalls ist nicht zu sehen, ob und wie man C durch einen *anderen* Begriff als $\mathbb{R}\mathsf{u}$ beschreiben könnte.[200] Demnach gehört $\mathbb{R}\mathsf{u}$ zu einer für die Ontologie interessanten Art von widersprüchlichen Begriffen, die zwar Impossibilien sind, aber dennoch zur Definition und Betrachtung widerspruchsfreier Objekte verwendet werden können oder gar müssen. Dass es solche Begriffe gibt, ist meines Erachtens auch die Lehre, die man aus den sog. „semantischen oder epistemologischen“ Paradoxien ziehen muss, die im Zusammenhang mit dem RUSSELLschen Paradoxon immer wieder diskutiert wurden. An dieser Stelle möchte ich daher genauer auf die Paradoxien der Logik und Mengenlehre eingehen. Dieses Thema ist nämlich für uns auch deshalb von herausragender Wichtigkeit, weil die meisten Paradoxien auf unserem Unvermögen basieren, das Unendliche adäquat zu begreifen.

[200] Man könnte denken, ≪Element von C≫ sei ein solcher. Aber das ist kein Begriff, sondern nur ein Name, solange wir für ≪C≫ nicht eine C charakterisierende Beschreibung einsetzen. Und gerade darum geht es ja, ob es eine solche Beschreibung unabhängig von $\mathbb{R}\mathsf{u}$ gibt. Wenn man die Elemente von C als Gesamtheit direkt vor Augen hat, also auf sie zeigen oder sie herausgreifen kann, so könnte man C charakterisieren als ≪diese Gesamtheit≫ (die ich hier vor Augen habe, bzw. herausgegriffen habe). Doch verrät das Hinweispronomen ≪dieser≫, dass hier ein subjektives Moment vorliegt, das nicht Bestandteil eines selbständigen, objektiv existierenden Begriffs sein kann.

5.6 Die Paradoxien der Logik und Mengenlehre

Paradoxien, d. h. gegen die Erwartung ausfallende Tatsachen, sind in der Philosophie stets Gegenstand wichtiger Auseinandersetzungen gewesen: Man denke nur an die Trugschlüsse der griechischen Sophisten,[201] die durch die aristotelische Logik überwunden wurden, oder an die heute noch diskutierten Paradoxien Zenons und Antinomien Kants, die uns noch beschäftigen werden.[202] Hier soll es um die fundamentalen Paradoxien der Logik und Mengenlehre gehen, von denen die meisten erst Anfang des 20. Jahrhunderts bekannt wurden.[203]

Man unterscheidet zwischen *echten Paradoxien* (die auch *Antinomien* heißen) und *Pseudoparadoxien*. Während letztere nur auf den ersten Blick überraschen, handelt es sich bei den echten Paradoxien um schwer auflösbare Rätsel, die zeigen, dass die (bis dahin) allgemein akzeptierten Denkregeln zu einem Widerspruch führen können:[204] Standardbeispiel hierfür ist das Russellsche Paradoxon von der Menge M alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Demgegenüber gehört das 1918 von Russell als Parallele zu diesem Paradoxon angegebene „Barbier-Paradoxon“[205] zu den Pseudoparadoxien:[206] Man stelle sich einen Barbier vor, der in einem Dorf alle und nur diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich selbst oder nicht? Er müsste es genau dann tun, wenn er es nicht tut. Des Rätsels Lösung, dass es einen solchen Barbier nicht gibt, weil der Vorsatz, wirklich *alle* und *nur* diejenigen zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren, einen Widerspruch enthält. Dies ist nicht weiter überraschend, denn dass manche Vorsätze sich bei genauerem Hinsehen als undurchführbar erweisen, kommt öfter vor; hier liegt es daran, dass man nicht bedacht hat, dass das Wort *alle* auch den Barbier selbst umfasst. Anders ist es bei der Russellschen Menge. Zwar muss man hier ganz analog schließen, dass eine solche Menge nicht existiert, doch wurde diese Nichtexistenz als ein „verwirrendes und ungewöhnliches Ergebnis“[207] empfunden, „einfach unerklärlich“,[208] weil gegen das durch Frege ausgesprochene, scheinbar „logische“ Prinzip der unbegrenzten Mengenbildung verstoßend.[209]

Frank Plumpton Ramsey (1903–1930) hat die Anfang des 20. Jahrhunderts diskutierten Paradoxien 1925 in zwei Gruppen eingeteilt: Die einen „implizieren ... Begriffe wie Klasse und Zahl, und zeigen, dass mit unserer Logik oder unserer Mathematik etwas nicht stimmt“.[210] Die anderen „implizieren alle einen psychologischen Begriff wie Bedeutung, Definition, Benennung oder Behauptung“.[211] Jene heißen „mathematisch-logische“, und diese „semantisch-epistemologische“ Paradoxien.

---

201 Einen humorvollen Einblick in die sophistischen Argumente bietet Platons Dialog *Euthydemos*.

202 Zu Zenon vgl. Abschnitt 5.27, zu Kant vgl. Abschnitt 11.1, zu anderen kosmologischen Unendlichkeits-Paradoxien vgl. Abschnitt 11.2. Hingewiesen sei hier außerdem auf geometrische und wahrscheinlichkeitstheoretische Paradoxien (siehe auf der nächsten Seite, S. 158–162, S. 234–238 und S. 696–697). Neben diesen Paradoxien, die alle mit dem Unendlichen zusammenhängen, gibt es auch solche, die auf unanschaulichen physikalischen Theorien beruhen (siehe S. 649–650, S. 673 und Fußnote 1587 auf S. 674).

203 Von den älteren Paradoxien gehören hierzu nur die „Gleichheit“ einer unendlichen Menge mit einem Teil ihrer selbst und das Lügner-Paradoxon, das auch in der modernen Grundlagendiskussion wieder aufgegriffen wurde (vgl. Rüstow, *Der Lügner* und Parsons, *Liar paradox*).

204 Vgl. Quine, *Paradox* S. 5: „An antinomy produces a self-contradiction by accepted ways of reasoning“.

205 Russell teilt es in *Logical Atomism* S. 261 mit und erklärt, diese Form seines Paradoxons sei ihm vorgeschlagen worden („I once had a form suggested to me“) – wann und von wem, sagt er nicht.

206 Die Bezeichnung „Pseudoparadoxon“ stammt von Curry, *Foundations* S. 4f.

207 Fraenkel et al., *Foundations* S. 6: „a disturbing and unfamiliar result“.

208 Curry, *Foundations* S. 5: „simply unexplicable“.

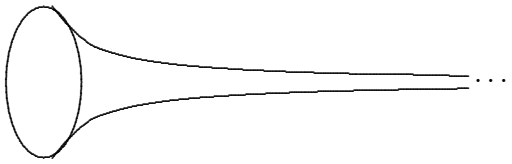
209 Vgl. Quine, *Paradox* S. 12. Andererseits darf man den Unterschied zwischen Antinomie und Pseudoparadoxon auch nicht übertreiben. Letztlich ist es nur ein gradueller Unterschied zwischen „leicht“ und „schwer“ aufzulösenden Widersprüchen.

210 Ramsey, *Foundations* S. 145; vgl. Ramsey, *Mathematical Logic* S 189.

211 Ramsey, *Mathematical Logic* S. 189; vgl. Ramsey, *Foundations* S 145f.

Die **mathematisch-logischen Paradoxien** beruhen letztlich alle darauf, dass unsere Vorstellung vom Unendlichen unvollkommen ist. An erster Stelle ist hier die schon seit dem Mittelalter beachtete charakteristische Eigenschaft des Unendlichen zu nennen, größenmäßig einem Teil von sich selbst zu gleichen (siehe S. 11–12), und damit zusammenhängend die Eigenschaft, dass das Wegnehmen gleich großer Mengen von gleich großen Mengen zu ungleich großen Mengen führen kann (siehe S. 258). Dies scheint gegen zwei altehrwürdige Axiome EUKLIDS zu verstoßen: *Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich*, und *das Ganze ist größer als der Teil*.[212] Beide Paradoxien lassen sich aber durch Unterscheidung zweier Arten von Größe auflösen, derart dass die Axiome für die eine Art gültig sind und für die andere nicht,[213] wobei wir die Größenart, für welche die Axiome *nicht* gelten, in der Anschauung nur unvollkommen erfassen.

Ähnliches gilt für *geometrische Paradoxien*, die wir hier zum Vergleich heranziehen: Der Anschein des Widerspruchs entsteht dadurch, dass wir es mit Objekten zu tun haben, die in irgendeiner Hinsicht unendlich sind, weshalb wir von ihnen keine klare Anschauung haben. Auch hier lässt sich der Widerspruch durch logische Unterscheidungen auflösen. Ein Beispiel ist „Gabriels Horn“: Evangelista TORRICELLI (1606–1747) war auf eine zunächst unglaubliche Tatsache gestoßen, als er den nebenstehenden unendlich lang gestreckten Körper betrachtete, den man „Torricellis Trompete“ oder das „Horn des Erzengels Gabriel“ nennt.



Das Rohr dieser unendlich langen Trompete wird nach rechts hin immer enger, und zwar beträgt, wann immer man x Längeneinheiten nach rechts geht, der dortige Durchmesser des Rohres $1/x$ Längeneinheiten. TORRICELLI erkannte, dass die *Oberfläche* der Trompete unendlich, ihr *Volumen* jedoch endlich ist.[214] Die Paradoxie sticht noch deutlicher hervor, wenn man sich Folgendes überlegt: Da die Oberfläche unendlich ist, sollte man erwarten, dass man unendlich viel Farbe benötigt, um sie vollständig anzustreichen. Andererseits kann man das *ganze* Innere der Trompete mit endlich viel Farbe ausfüllen, die deshalb offenbar auch ihre Oberfläche vollständig überdecken kann. Die Auflösung des Widerspruchs besteht darin, dass die Ausdrücke „endlich viel Farbe“ oder „unendlich viel Farbe“ hier doppeldeutig sind: Im einen Fall beziehen sich die Ausdrücke auf die farbige Fläche, im anderen auf das Volumen des Farbstoffes. Was hier unerwartet (aber nicht widersprüchlich) ist, ist also nur die Tatsache, dass endliche dreidimensionale Volumina einen unendlichen zweidimensionalen Rand haben können, weshalb theoretisch tatsächlich eine endliche Farbstoffmasse ausreicht, um damit eine unendlich große Fläche anzustreichen. Darin liegt jedenfalls *logisch* nichts Widersprüchliches, da Volumen und Fläche zwei unterschiedliche Begriffe sind.[215]

Schwerer aufzulösen sind die folgenden mengentheoretischen Paradoxien, bei denen die falsche Überzeugung, wir würden hier klar sehen, viel tiefer eingewurzelt ist. Sie haben gemeinsam, dass

---

212 Vgl. EUKLID, *Elemente* Buch 1 Axiome 3 und 8(9), Ausgabe Heiberg/Stamatis Band 1 S. 5–6, Ausgabe Thaer S. 3.

213 Zum ersten Paradoxon siehe Abschnitt 5.17, besonders S. 237, zum zweiten S. 258 mit Fußnote 614.

214 Vgl. TORRICELLI, *De solido hyperbolico* S. 93, 115f und 128. Der einfache Beweis kann mit Mitteln der Infinitesimalrechnung geführt werden (siehe GILLET, *Calculus* Example 4 S. 370). Nimmt man als Längeneinheit einen Meter, beträgt das Volumen des Horns genau π (d. h. ungefähr 3,14) Kubikmeter.

215 Beim Horn Gabriels handelt es sich um einen endlichen Körper, der sich ins Unendliche erstreckt. Ähnliche Paradoxien treten aber auch bei ringsum begrenzten Körpern auf, die dennoch von einer Oberfläche mit unendlichem Flächeninhalt umgeben sein können, und analog auch bei ringsum begrenzten Flächen, deren Grenzlinie dennoch unendlich ist. Hier kommt die Unendlichkeit durch eine „unendlich verwickelte“ Form der Grenzfläche bzw. Grenzlinie zustande. Nach Benoît MANDELBROT (* 1924) ordnet man derartigen Grenzflächen bzw. Grenzlinien eine Dimensionszahl zwischen 2 und 3 bzw. zwischen 1 und 2 zu und rechnet sie daher zu den sog. *Fraktalen*: Punktmengen mit „gebrochener Dimension“, deren Dimension *zwischen* zwei ganzen Zahlen liegt (vgl. MANDELBROT, *Fractal Geometry*). Weitere (und noch viel erstaunlichere) geometrische Paradoxien werde ich im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom auf S. 158–162 erörtern.

sich eine Vielheit oder Struktur wider Erwarten nicht zu einem Individuum zusammenfassen lässt, und die Lösung besteht generell darin, dass die Vielheit bzw. Struktur im Bereich der Unmengen existiert. Je nachdem, ob die Vielheit oder Struktur *direkt* oder nur *indirekt* als „unvorstellbar groß" erscheint, unterscheide ich zwei Arten dieser Paradoxien. Das bekannteste Beispiel der letztgenannten Art ist das RUSSELLsche Paradoxon: Es gibt keine ≪Menge aller Mengen M, für die nicht $M \in M$ gilt≫.[216] Beispiele für Paradoxien mit *direkt* als groß erscheinenden Vielheiten sind die Paradoxien von BURALI-FORTI (1897) und CANTOR (1899): die Tatsache, dass die Klasse der Ordinalzahlen bzw. Kardinalzahlen kein Maximum hat und anscheinend dennoch eines haben müsste. Den Widerspruch kann man auflösen, wenn man beachtet, dass die Klasse der Ordinal– bzw. Kardinalzahlen eine Unmenge bildet (genauer kann ich dies erst bei der Behandlung der Ordinal– und Kardinalzahlen erklären).[217] Als Hauptbeispiel aber sollte man hier das Theorem anführen, dass die Klasse $\mathbb{D}$ aller Dinge eine inkonsistente Vielheit ist; auch dieses Theorem könnte man mit Recht als CANTORsches Paradoxon bezeichnen, denn es geht auf den 1890 bewiesenen Satz von CANTOR zurück und wurde von CANTOR 1899 in einem Brief an DEDEKIND formell ausgesprochen.[218]

Bei den **semantisch-epistemologischen Paradoxien** handelt es sich vor allem um die Paradoxien von EPIMENIDES („Lügner"-Paradoxon), BERRY (mit dem Julius-KÖNIG- und RICHARD-Paradoxon als Varianten) und GRELLING (mit dem Russell-Myhill- und Begriffs-Paradoxon als Varianten).

---

216 Analog dazu ist die ebenfalls von RUSSELL angeführte Tatsache, dass es keine (konsistente) Relation gibt, die zwischen Relationen R und S genau dann besteht, wenn die Relation R nicht zwischen R selbst und S besteht (RUSSELL, *Theory of Types* S. 59f). QUINE hat eine unendliche Liste solcher dem RUSSELLschen Paradoxon analogen Paradoxien aufgestellt. Gibt man $x \in_2 x$ die Bedeutung ≪es gibt ein y, so dass $x \in y$ und $y \in x$ gilt≫; ferner $x \in_3 x$ die Bedeutung ≪es gibt ein y und ein z, so dass $x \in y, y \in z$ und $z \in x$ gilt≫ usw., so gibt es weder eine ≪Menge aller Mengen, für die nicht $x \in_2 x$ gilt≫, noch die ≪Menge aller Mengen, für die nicht $x \in_3 x$ gilt≫ usw. (vgl. QUINE, *Set Theory* S. 27 und QUINE, *Mathematical Logic* § 24 S. 131). Hierhin gehört auch die 1917 von MIRIMANOFF und 1953 erneut von SHEN YUTING präsentierte Paradoxie, dass es keine Menge gibt, welche sämtliche Mengen M enthält, die nicht am Ende einer unendlichen $\in$-Kette der Form $\ll \ldots x_3 \in x_2 \in x_1 \in M \gg$ stehen (vgl. MIRIMANOFF, *Les Antinomies* S. 43 und YUTING, *Paradox* S. 148). Mengen, die *nicht* am Ende einer unendlichen $\in$-Kette stehen, nennt man heute „wohlfundiert", MIRIMANOFF sprach von „ensembles ordinaires". Heute werden nicht-wohlfundierte Mengen meist durch das so genannte Fundierungsaxion von vornherein ausgeschlossen (siehe Abschnitt 5.19).

217 Zum Burali-Forti-Paradoxon siehe S. 197; zum CANTORschen Paradoxon siehe S. 320–321.

218 Brief vom 3. 8. 1899 (CANTOR, *Briefe* S. 407). – Das Burali-Forti-Paradoxon und das Cantor-Paradoxon wird mit einem gewissen Recht auch als erstes und zweites CANTORsches Paradoxon bezeichnet (siehe Fußnote 500 auf S. 197); demnach wäre dies das *dritte* CANTORsche Paradoxon. Zur Auflösung dieser Paradoxien hat RUSSELL 1906 drei verschiedene Ansätze diskutiert (vgl. RUSSELL, *Difficulties* S. 37–47). Sein *erster Lösungsansatz* ist die *Theorie der Größenbegrenzung* („theory of limitation of size"), wonach das, was für die Paradoxien verantwortlich ist, eine *übertriebene Größe* („excessive size") der beschriebenen Sache ist, die also vermieden werden muss. Wie wir gesehen haben, ist dieser Ansatz der Richtige für die Lösung der mathematisch-logischen Paradoxien, nur ist zu betonen, dass die „zu große" Entität keineswegs ein Nichts, sondern eine Unmenge ist. Die Schwierigkeit dieser Theorie sieht RUSSELL in der genauen Bestimmung dessen, was „zu groß" ist; er hält es auch für möglich, dass *alle* unendlichen Gesamtheiten sich als zu groß herausstellen könnten. RUSSELLS *zweiter Lösungsansatz*, der in einer begriffsartigen Klassenlehre interessant wird, ist die *Zick-Zack-Theorie* („zigzag theory"). Dieser zufolge liegt das Problem nicht in der Größe, sondern in einer Art *Verzwicktheit* („zigzagginess") der Klassendefinition. Als verzwickt erscheinen etwa Bedingungen wie $x \in x$ oder $x \notin x$, die als unzulässig verworfen werden müssen. Wenn dagegen eine einfache und geradlinige Definition vorliegt, existiert nach dieser Theorie immer eine entsprechende Klasse, z. B. hat die Beschreibung, *kein Mensch* zu sein, eine „exemplarische Einfachheit" und würde darum nach der Zick-Zack-Theorie eine Klasse bestimmen. Überhaupt müsste nach dieser Theorie, wann immer C eine Klasse ist, auch die Klasse aller *nicht* in C vorhandenen Dinge existieren, gleichgültig, wie groß diese Klasse auch sein mag. In einer Klassentheorie, in der die Klassen Begriffe wären, scheint mir dies der richtige Ansatz zu sein. Das Problem ist hier allerdings, ein intuitiv einsichtiges Prinzip zu finden, um zu entscheiden, welche Beschreibung als „verzwickt" gelten kann und welche nicht. RUSSELL fand hier „no guiding principle except the avoidance of contradictions" (RUSSELL, *Difficulties* S. 39). Letztlich entschied sich RUSSELL für einen *dritten Lösungsansatz*, den er *Nicht-Klassen-Theorie* („no-classes theory") nannte, in welcher die Existenz von Klassen als reale Objekte überhaupt geleugnet wird (siehe auch S. 78).

Das Lügner-Paradoxon wird dem zu den „sieben Weisen“ gerechneten Kreter EPIMENIDES (um 600 v. Chr.) zugeschrieben, dem der Spruch nachgesagt wird, dass „die Kreter immer lügen“.[219] Sagt EPIMENIDES nun hier die Wahrheit, so lügen die Kreter immer, also lügt er. Lügt er jedoch, so scheint er die Wahrheit zu bestätigen, dass Kreter immer lügen, er sagt also die Wahrheit. Eine einfachere Form des Paradoxons zeigt sich in dem Satz „Ich lüge“ – was genau dann gelogen ist, wenn es nicht gelogen ist. Wieder eine andere Form verbirgt sich in den beiden folgenden Sätzen

Satz 1: Der nächste Satz ist wahr. Satz 2: Der letzte Satz ist falsch.

Ist Satz 1 wahr, so laut seiner Aussage auch Satz 2, dann aber ist laut Aussage von Satz 2 der Satz 1 falsch. So folgt aus der Wahrheit von Satz 1 seine Falschheit, und genauso umgekehrt.[220]
Fazit: Das Lügner-Paradoxon zeigt in allen seinen Varianten, dass der Begriff der *Wahrheit* in seiner *weitesten* Fassung, in welcher *jede* beliebige syntaktisch korrekt gebildete Aussage einer natürlichen Sprache entweder wahr oder falsch sein sollte, widersprüchlich ist.[221]

Das 1908 veröffentlichte Paradoxon von GEORGE G. BERRY[222] geht von dem Prinzip aus, dass es zu jeder Eigenschaft E, die auf gewisse Zahlen zutrifft, stets eine *kleinste* Zahl mit dieser Eigenschaft gibt.[223] Z. B. ist 2 die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, „gerade“ zu sein, 100 die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, im Zehnersystem durch drei Ziffern darstellbar zu sein usw. BERRY betrachtet nun die Eigenschaft, *in der englischen Sprache nicht mit weniger als 19 Silben benannt werden zu können.* Die kleinste dieser Zahlen kann man nun aber als „the least integer not namable in fewer than nineteen syllables“ bezeichnen, was eine Benennung mit nur 18 Silben ist! Varianten dieses Paradoxons sind die Paradoxien von Julius KÖNIG und Jules RICHARD (beide 1905 entdeckt).[224]
Fazit: Das BERRYsche Paradoxon zeigt, dass der Begriff des *Benennbar-Seins* oder *Definierbar-Seins* bezüglich einer natürlichen Sprache in seiner weitesten Fassung, in welcher er jedes beliebige Objekt entweder als Instanz haben sollte oder nicht, widersprüchlich ist.

---

219 Im Titusbrief 1,2 sagt der Apostel PAULUS: „Einer von ihnen [den Kretern], ihr eigener Prophet, hat gesagt: ‚Die Kreter sind immer Lügner ...‘“. Dieser ungenannte Philosoph soll nach mehreren frühchristlichen Quellen der kretische Priester EPIMENIDES sein (DIELS, *Fragmente* Band 1 S. 31f). Auf den paradoxen Gehalt des einfachen Satzes „Ich lüge“ machte sodann der Dialektiker EUBULIDES VON MILET im 4. Jahrhundert v. Chr. aufmerksam (NESTLE, *Sokratiker* S. 173 Eubulides-Fragment 1; vgl. DIOGENES LAERTIUS, *Vitae* Buch 2 Kap. 10 § 108, Ausgabe Long S. 102 Zl. 23f, Ausgabe Reich Band 1 S. 127). Zu verschiedenen Formen des Paradoxons in der Tradition sowie zu Lösungsversuchen siehe BOCHEŃSKI, *Formale Logik* § 23, S. 150-153 sowie RÜSTOW, *Der Lügner*.

220 Shen YUTING hat 1955 gezeigt, dass sich ein solches Paradoxon in vielen weiteren Sätzen verbirgt, z. B. „was ich sage, kann nicht bewiesen werden“, „was ich sage, kann widerlegt werden“, „es kann bewiesen werden, dass das, was ich sage, widerlegt werden kann“ usw. (*Paradoxes* S. 119f).

221 RUSSELL sprach von einer „systematischen Mehrdeutigkeit“ von Wörtern wie „Wahrheit, Falschheit, Funktion, Eigenschaft, Klasse, Relation, Kardinalzahl, Ordinalzahl, Name, Definition“ (*Principia Mathematica* Einl. S. 64, deutsche Ausgabe S. 93). Nach GÖDEL brachte RUSSELL „die erstaunliche Tatsache ans Licht, dass unsere logischen Intuitionen (d. h. Intuitionen, die solche Begriffe betreffen wie: *Wahrheit*, *Konzept*, *Sein*, *Klasse* usw.) selbstwidersprüchlich sind“ (*Russell's Logic* S. 131, Werke Band 2 S. 124, deutsche Ausgabe S. X).

222 Es wurde von RUSSELL in *Theory of Types* veröffentlicht mit dem Hinweis: „This contradiction was suggested to me by Mr. G. G. Berry of the Bodleian Library“ (ebd. S. 60 mit Fußnote). Erwähnt wird der Bibliothekar BERRY bereits 1906 (siehe RUSSELL, *Difficulties* S. 36, zweite Fußnote) als Urheber eines Beweises.

223 Diese so genannte „Wohlordnungs-Eigenschaft“ lässt sich streng beweisen (siehe Theorem 5.16.36 S. 220).

224 Siehe KÖNIG, *Mengenlehre und Kontinuumsproblem* bzw. RICHARD, *Principes de mathématiques*. KÖNIG betrachtete die Reihe der CANTORschen transfiniten Ordinalzahlen, die jede vorstellbare Länge überschreitet, so dass es Ordinalzahlen geben muss, die sich nicht mehr durch endlich viele Worte bezeichnen lassen. Diese müssen aber irgendwo „beginnen“, d. h. es muss eine *kleinste* derartige Ordnungszahl geben. Und doch können wir diese mit endlich vielen Worten bezeichnen, z. B. als *die auf alle mit endlich vielen Worten benennbaren Ordinalzahlen folgende Ordinalzahl.* – RICHARD stellt sich vor, dass alle mit endlich vielen Worten benennbaren Zahlen in einer Liste $x_1, x_2, x_3 \ldots$ zusammengestellt sind. Sei dann z die Zahl mit einer Null vor dem Komma, die sich von der n-ten Zahl x_n in der Liste stets dadurch unterscheidet, dass ihre n-te Nachkommastelle die der n-ten Nachkommastelle von x_n folgende Ziffer ist (dabei gilt die Ziffer 0 als die der 9 folgende). Dieses z steht nicht in der Liste, und lässt sich dennoch mit endlich vielen Worten beschreiben, denn das haben wir ja gerade getan.

Das 1908 von Kurt Grelling gefundene Paradoxon[225] geht von der Tatsache aus, dass es Eigenschaftswörter gibt, die eine Eigenschaft bezeichnen, die auf sie selbst zutrifft. So ist das Wort „dreisilbig“ selbst dreisilbig, und das Wort „deutsch“ selbst deutsch. Solche Wörter nennt Grelling „autologisch“. Bei den meisten Wörtern ist dies nicht der Fall. So ist etwa das Wort „einsilbig“ nicht einsilbig. Solche Eigenschaftswörter, die also eine Eigenschaft ausdrücken, die auf diese selbst *nicht* zutrifft, nennt Grelling „heterologisch“. Nun stellt er die Frage: Ist das Eigenschaftswort „heterologisch“ selbst heterologisch?

- Wenn *ja*, darf die Eigenschaft, die es ausdrückt, *nicht* auf es selbst zutreffen.
  Also ist es dann *nicht* heterologisch.
- Wenn *nicht*, muss die Eigenschaft, die es ausdrückt, auf es selbst zutreffen.
  Also ist es dann *doch* heterologisch.

Das Wort „heterologisch“ ist also genau dann heterologisch, wenn es nicht heterologisch ist. Mit dem Grelling-Paradoxon ist das sog. *Russell-Myhill-Paradoxon* verwandt:[226] Hier geht es um *Klassen, deren Elemente Aussagen sind* („Aussagenklassen“). Ist X eine Aussagenklasse, so ist der Satz «jedes Element von X ist eine wahre Aussage» selbst eine Aussage, welche wir «die sich auf die Aussagenklasse X beziehende Wahr-Aussage» nennen können. Diese Aussage kann, aber muss nicht selbst in X liegen. Sei nun W die Aussagenklasse, deren Elemente genau diejenigen sich auf Aussagenklassen beziehenden Wahr-Aussagen sind, die selbst nicht in der Aussagenklasse liegen, auf welche sie sich beziehen. Nun betrachte man die Aussage «jedes Element von W ist wahr». Liegt diese in W oder nicht? Aus der Definition von W folgt, dass diese Aussage dann und nur dann Element von W ist, wenn sie kein Element von W ist. Wenn man Aussagenklassen als Begriffe ansieht, deren Instanzen Sachverhalte sind, erweist dieses Paradoxon ebenso wie das von Grelling und unser obiges *Begriffs-Paradoxon* (Satz 5.5.1) den Begriff «Instanz eines Begriffs» (und damit den Begriff des Begriffs selbst) in seiner weitesten Fassung als widersprüchlich.
Fazit: Der Begriff der Instanz eines Begriffs (oder der Zugehörigkeit, des Elementseins) ist widersprüchlich, wenn er so weit gefasst wird, dass auch für jedes den Begriff formulierende Wort (Grelling) oder für jeden den Begriff selbst involvierenden Sachverhalt (Russell-Myhill) oder schließlich für den Begriff selbst (Begriffs-Paradoxon) feststeht, ob dieses Wort bzw. dieser Sachverhalt bzw. dieser Begriff selbst Instanz des Begriffs ist.

Insgesamt haben also die semantisch-epistemologischen Paradoxien die Begriffe der Wahrheit, des Benennens und des (Instanzseins eines) Begriffs jeweils in ihrer weitesten Fassung als widersprüchlich erwiesen, also als Impossibilien, die dennoch in einer „gezähmten“, durch Einschränkung abgewandelten Form widerspruchsfreie und unentbehrliche Hilfsmittel der Logik sind. Dies dürfte eine ganz unvermutete Bestätigung für die selbständige Bedeutsamkeit und daher für den realen Status sein, den Impossibilien haben können (vgl. Abschnitt 4.2). Die Frage ist nun, welche Maßnahmen man zur notwendigen „Zähmung“ der widersprüchlichen Begriffe vornehmen soll. Man hat hierzu konkret zwei Mittel angewendet. Zunächst haben Russell und Whitehead ihre *Typentheorie* entwickelt.[227] Als das „gemeinsame Kennzeichen“ der Widersprüche sahen sie die „Selbstbezüglichkeit oder Rückbeziehung“[228] an. Diese Zirkeltrugschlüsse („vicious-circle fallacies“)[229] bekämpft die Typentheorie

[225] Vgl. Grelling, *Paradoxien* S. 307f.

[226] Wie das berühmtere „Russellsche“ Paradoxon wurde auch dieses 1902 von Russell gefunden und Frege brieflich mitgeteilt (Brief vom 29. 9. 1902, Frege, *Briefwechsel* S. 230). Es wurde dann im „Anhang B“ der Principles of Mathematics besprochen (§ 500 S. 527). 1958 wurde es von John Myhill wieder entdeckt (Myhill, *Problems*). Eine kurze und dennoch umfassende Information zum Thema ist zu finden bei Klement, *Russell-Myhill Paradox*.

[227] Siehe S. 83–84.

[228] Russell und Whitehead, *Principia Mathematica* Einl. S. 61, deutsche Ausgabe S. 89.

[229] Vgl. Russell und Whitehead, *Principia Mathematica* Einl. S. 37f, deutsche Ausgabe S. 55–57.

vor allem dadurch, dass sie sog. „imprädikative“ Definitionen[230] ausschließt: Definitionen, in denen ein Objekt mit Bezug auf eine Totalität definiert wird, der es selbst angehört.[231] Um derartige Definitionen zu vermeiden, wurden Klassen, Relationen und Satzfunktionen in eine komplizierte Typenhierarchie eingebunden.[232] Das alternative Mittel war die *Formalisierung*. Man kommt ganz ohne Typen aus, wenn man dem 1922 formulierten Vorschlag von Thoralf Skolem folgt[233] und eine nach übersichtlichen syntaktischen Regeln gebildete logische Kunstsprache verwendet, in der Begriffe wie „Wahrheit“, „Bedeutung“ usw. nicht vorkommen: Dann lassen sich nämlich die bisher bekannten Paradoxien gar nicht mehr formulieren. Beide Mittel haben sich bis heute als erfolgreiche Strategien zur Vermeidung von Paradoxien praktisch bewährt.

Vom Standpunkt einer realistischen Ontologie ist dennoch die Sachlage solange unbefriedigend, als die ergriffenen Mittel zur Paradoxien-Vermeidung den Beigeschmack einer ad-hoc-Lösung haben. Bei der formalisierten Logik ist das offensichtlich, denn durch die Wahl der logischen Kunstsprache werden die Ausdrucksmöglichkeiten willkürlich eingeschränkt. Aber auch die Typentheorie, basierend auf der radikalen Zurückweisung jeden Selbstbezugs, scheint *zu eng* zu sein. Grundsätzlich hat Gödel recht mit der Beobachtung, dass man Selbstbezüglichkeit in dreierlei Hinsicht zurückweisen kann, und dass Russell die Selbstbezüglichkeit in *jeder* dieser drei Hinsichten zurückweist:
(1) Keine Totalität darf Glieder enthalten, deren Definition auf die Totalität Bezug nimmt.
(2) Keine Totalität darf Glieder enthalten, welche die Totalität „umfassen“.
(3) Keine Totalität darf von ihren Gliedern „vorausgesetzt“ werden.[234]
Die dritte Vorschrift ist zweifellos berechtigt, da die Existenz einer Totalität natürlich die Existenz der Glieder „voraussetzt“, aber die Existenz eines Gliedes nicht diejenige der ganzen Totalität. Dagegen kann man mit Gödel von einem realistischen Standpunkt aus die Berechtigung von (1) und (2) in Frage stellen. Zum Beispiel wäre eine gegen Vorschrift (1) verstoßende „imprädikative“ Definition die Beschreibung eines Schülers als „der beste Schüler seiner Klasse“. Denn diese „Definition“ des Schülers nimmt ja Bezug auf eine Gesamtheit, welcher er selbst angehört. Was soll daran verkehrt sein? Solche Definitionen sind offensichtlich in vielen Fällen vollkommen harmlos und scheinen zudem für die Mathematik in ihrem heutigen Bestand unentbehrlich zu sein.[235] Vorschrift (2) erfordert den Ausschluss von Klassen, Eigenschaften und Sätzen, die „sich selbst als Konstituenten ihres Inhalts“ enthalten. Auch diesen Ausschluss erachtet Gödel nicht generell für notwendig.[236] So weist er darauf hin, dass es sinnvolle Sätze gibt, „die sich auf eine Totalität von Sätzen beziehen, zu der sie selbst gehören“, beispielsweise der Satz

> „Jeder Satz ... enthält mindestens ein Beziehungswort.“[237]

---

230 Diesen Ausdruck prägte Poincaré in *Les Mathématiques et la Logique* S. 307 und 316. Vgl. hierzu auch unsere Diskussion des Komprehensionsaxioms auf S. 85–86.

231 Als Beispiele für imprädikativ definierte Begriffe gab Skolem „Name“, „Begriff“, „Menge“ (im Cantorschen Sinn) und „endliche Definition“ an. (vgl. Skolem, *Grundlagendiskussionen* S. 80f). Siehe auch S. 85–86.

232 Siehe Fußnote 164 auf S. 83.

233 Vgl. Skolem, *Erfüllbarkeit* S. 59.

234 Die Ausführungen von Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* (Einl. S. 37f, deutsche Ausgabe S. 55–57) wurden von Gödel in *Russell's Logic* (S. 133, Werke Band 2 S. 125, deutsche Ausgabe S. XII) so zusammengefasst: „no totality can contain members definable only in terms of this totality, or members involving or presupposing this totality (vicious circle principle)“. Gödel erkennt darin drei Versionen des Prinzips: „corresponding to the phrases ‚definable only in terms of‘, ‚involving‘, and ‚presupposing‘, we have really three different principles“ (ebd. S. 135, Werke Band 2 S. 127, deutsche Ausgabe S. XIII).

235 Man benötigt sie z. B. bei der Einführung der reellen Zahlen: Vgl. Gödel, *Russell's Mathematical Logic* S. 135, Werke Band 2 S. 127, deutsche Ausgabe S. XIII: „the axioms imply the existence of real numbers definable in this formalism only by reference to all real numbers“.

236 Goedel spricht in *Russell's Mathematical Logic* (S. 139, Werke Band 2 S. 130, deutsche Ausgabe S. XVI) von Sätzen oder Eigenschaften, die sich selbst als Konstituenten ihres Inhalts oder Sinns enthalten und urteilt: „I don't think they contain any absurdity“.

237 Gödel, *Russell's Mathematical Logic* S. 140, Werke Band 2 S. 130, deutsche Ausgabe S. XVII.

Sind demnach die heutigen Lösungsversuche zu restriktiv, so kann man mit GÖDEL hoffen, eine angemessenere Methode der Begrenzung zu finden, bei der „jedes Konzept überall bedeutsam ist, außer für gewisse ‚singuläre Punkte' oder ‚Grenzpunkte', so dass die Paradoxien als etwas erscheinen würden, das der Teilung durch Null ähnelt." Es würden dann „die logischen Intuitionen ... korrekt bleiben bis auf gewisse geringfügige Korrekturen, d. h. sie könnten dann so betrachtet werden, als gäben sie ein im Wesentlichen korrektes, nur etwas ‚verzerrtes' Bild von der wirklichen Lage der Dinge."[238] Dieser GÖDELschen Perspektive folgend, möchte ich – in Ermangelung eines den Forderungen GÖDELs entsprechenden formalen Verfahrens – *überhaupt keine konkreten Vorkehrungen treffen, um selbstbezügliche Begriffe von vornherein auszuschließen*, abgesehen davon, dass aufgrund der Festlegung der Objekte in Definition 5.4.2 die widersprüchlichen Begriffe *und nur diese* ausgeschlossen sind.

[238] GÖDEL, *Russell's Mathematical Logic* S. 150, Werke Band 2 S. 138, deutsche Ausgabe S. XXVI: „It might even turn out that it is possible to assume every concept to be significant everywhere except for certain ‚singular points' or ‚limiting points', so that the paradoxes would appear as something analogous to dividing by zero. ... our logical intuitions would then remain correct up to certain minor corrections, i. e., they could then be considered to give an essentially correct, only somewhat ‚blurred', picture of the real state of affairs."

5.7 Elementar-allgemeine und erweiterte Mengentheorie

Ich unterscheide nun zwei realistische Mengenlehren. Die erste ist die hauptsächlich verfolgte, *elementar-allgemeine Mengenlehre*. Diese ist deshalb allgemein, weil sie

- als Axiome nur solche verwendet, die für Mengen (fast) allgemein anerkannt sind,
- von diesen „allgemein anerkannten“ Axiomen diejenigen weglässt, die eine einschränkende Wirkung haben (nämlich das Fundierungs– und das Reinheitsaxiom),
- bei den angenommenen Axiomen aber, für die mehrere Versionen vorliegen (Komprehensionsaxiom, Auswahlaxiom) immer die weitestmögliche Fassung verwendet.

Die zweite ist die *erweiterte* Mengenlehre, in welcher der Klassenbegriff dadurch erweitert wird, dass den bisherigen Klassen gewisse Individuen, die abstrakte Begriffe sind, als „konzeptionelle Klassen“ hinzugefügt werden.[239] Diese zweite Theorie ist für die mathematische Praxis nicht unbedingt notwendig, kann aber nützlich sein, weil sich gewisse Gedanken darin besser ausdrücken lassen. Wirklich benötigt wird sie allerdings, wenn man den logischen Rahmen der realistischen Mengenlehre beschreiben will (wie wir in Abschnitt 6.2 sehen werden). Darüber hinaus ist die erweiterte Mengenlehre natürlich auch für die Ontologie interessant, denn sie zeigt, wie Unmengen involvierende Gesamtheiten konzipiert werden können. Um zu vermeiden, dass es mehrere Klassen mit denselben Elementen gibt, dürfen als neue Klassen nur *solche* Begriffe gewählt werden, die widerspruchsfrei sind und *mindestens eine Unmenge als Instanz besitzen*. Bei diesen Begriffen handelt es sich um *Individuen, die keine Mengen sind*, also um gewisse *Urelemente*. Zu jedem solchen Begriff B denken wir uns nun aus der Klasse aller mit B umfangsgleichen Begriffe (diese existiert nach dem Komprehensionsaxiom) willkürlich je genau einen Begriff als „Repräsentanten“ jener Begriffe ausgewählt. Nach diesen Vorbereitungen bestimme ich:

5.7.1 Erklärung *Konzeptionelle Klassen* seien die ausgewählten Repräsentanten. Zu jedem widerspruchsfreien Begriff B, der mindestens eine Unmenge als Instanz hat, gibt es nun infolge dieser Erklärung also genau eine mit B umfangsgleiche konzeptionelle Klasse, nämlich den Repräsentanten der mit B umfangsgleichen Begriffe.

Um die neuen, konzeptionellen von den bisherigen Klassen zu unterscheiden, sollen die bisherigen auch *kombinatorische Klassen* heißen. Es soll aber das Wort *Klasse*, wenn es *ohne* Zusatz gebraucht wird, immer nur für die bisherigen Klassen stehen, so dass ich das Adjektiv „kombinatorisch“ nur in betonten Gegenüberstellungen der beiden Klassenarten verwende.

5.7.2 Erklärung *Kombinatorische Klassen* sind die bisherigen, durch Auswahl beliebiger Individuen zusammengestellten Klassen.

Es gibt nun eine Reihe fundamentaler Unterschiede zwischen konzeptionellen und den gewöhnlichen, kombinatorischen Klassen:

1. Konzeptionelle Klassen sind Individuen, kombinatorische können Unmengen sein.
2. Konzeptionelle Klassen können Unmengen enthalten, kombinatorische nur Individuen.
3. Nicht alle kombinatorischen Klassen (sondern nur die Mengen) können Elemente anderer kombinatorischer Klassen sein. Dagegen sind konzeptionelle Klassen Individuen und treten daher als Elemente sowohl von Mengen als auch von (kombinatorischen und konzeptionellen) Klassen auf.

[239] Natürlich sind diese Individuen auch in der elementar-allgemeinen Mengenlehre „vorhanden“, treten aber dort nicht *als Klassen* explizit in Erscheinung.

4. Es gibt mehr kombinatorische als konzeptionelle Klassen: Zu jeder konzeptionellen Klasse P ist $\{P\}$ eine kombinatorische Klasse, so dass es allein schon an *einelementigen* kombinatorischen Klassen ebenso viele gibt wie konzeptionelle Klassen.

5. Zu jeder Auswahl von Individuen existiert eine entsprechende kombinatorische Klasse (Komprehensionsaxiom), demgegenüber muss nicht einmal zu jeder beliebigen Auswahl von *Individuen* (geschweige denn von Objekten) ein entsprechender widerspruchsfreier Begriff existieren, der genau die ausgewählten Individuen als Instanzen hat,[240] und daher existiert zu manchen Auswahlen keine konzeptionelle Klasse.

In der erweiterten Theorie sollten kombinatorische und konzeptionelle Klassen unter einem gemeinsamen Namen zusammengefasst werden. Ich wähle hierzu den Namen *Kollektion*.[241]

5.7.3 Erklärung Eine *Kollektion* sei eine kombinatorische oder konzeptionelle Klasse.
Die *Elemente* einer Kollektion C seien
1. im Fall, dass C eine Menge ist, die von dem Erkenntnisakt C beinhalteten Individuen,
2. im Fall, dass C eine Unmenge ist, die Individuen, aus denen C besteht,
3. im Fall, dass C eine konzeptionelle Klasse ist, die Instanzen von C.

Für beliebige Objektbezeichnungen x, y verwenden wir «$x \in y$» bzw. «$x \notin y$» als Abkürzung für «es gilt bzw. gilt nicht, dass x Individuum, C Kollektion, und x Element von C ist».

Gilt in der elementaren Theorie $x \in y$, so gilt dies auch für die erweiterte Theorie, aber nicht immer umgekehrt. In der erweiterten Theorie gilt das folgende verallgemeinerte Extensionalitätsaxiom:

5.7.4 Extensionalitätsaxiom (erweiterte Theorie) *Es gibt keine verschiedenen Kollektionen, die genau dieselben Elemente haben.*

Beweis. Verschiedene kombinatorische Klassen können nach dem gewöhnlichen Extensionalitätsaxiom nicht dieselben Elemente haben. Verschiedene konzeptionelle Klassen können nicht dieselben Elemente haben, da sie andernfalls umfangsgleiche Begriffe wären, unter umfangsgleichen Begriffen aber gibt es nach unserer Bestimmung der konzeptionellen Klassen immer nur eine einzige konzeptionelle Klasse (siehe Definition 5.7.1). Eine kombinatorische und eine konzeptionelle Klasse schließlich haben deshalb niemals dieselben Elemente, da die konzeptionelle im Gegensatz zur kombinatorischen mindestens eine Unmenge als Element hat. □
Das Komprehensionsaxiom dagegen kann nicht entsprechend verallgemeinert werden:

5.7.5 Theorem (erweiterte Theorie) Es gibt *nicht* zu jeder Auswahl von Objekten eine Kollektion, die genau die ausgewählten Objekte als Elemente besitzt.

Beweis. Für die Auswahl aller Objekte X, für die $X \notin X$ gilt, gibt es keine Kollektion $\mathbb{R}\mathsf{u}$, die genau die ausgewählten Objekte enthält. Denn weil eine solche Kollektion *alle* Objekte X mit $X \notin X$ enthalten müsste, würde sie im Fall $\mathbb{R}\mathsf{u} \notin \mathbb{R}\mathsf{u}$ sich selbst enthalten (Widerspruch); und weil sie *nur* Objekte X mit $X \notin X$ enthalten dürfte, würde sie im Fall $\mathbb{R}\mathsf{u} \in \mathbb{R}\mathsf{u}$ sich selbst *nicht* enthalten (Widerspruch). Wir erhalten also in jedem Fall einen Widerspruch, so dass $\mathbb{R}\mathsf{u}$ nicht existieren kann. □

Solange man allerdings die Instanzen eines *widerspruchsfreien* Begriffs auswählt, gibt es immer eine Kollektion, deren Elemente die ausgewählten Objekte sind: Entweder enthält nämlich der Begriff

[240] Vgl. das Begriffs-Paradoxon 5.5.1 S. 91.

[241] Auch bei Michael Potter übersteigt der Begriff der Kollektion sowohl den der Menge wie auch den der Klasse: Alle Mengen und Klassen sind Kollektionen, aber es gibt Kollektionen, die weder Klassen noch Mengen sind (vgl. Potter, *Sets* Bemerkung 1 S. 68).

mindestens eine Unmenge oder nicht. Im ersten Fall aber haben wir ja eine konzeptionelle Klasse ausgewählt, die mit diesem Begriff umfangsgleich ist, also alle Instanzen dieses Begriffs als Elemente hat (5.7.1). Im zweiten Fall ist die Auswahl der Instanzen des Begriffs eine Auswahl von Individuen, und zu dieser Auswahl existiert nach dem gewöhnlichen Komprehensionsaxiom (5.3.2 S. 80) eine gewöhnliche Klasse, deren Elemente diese Instanzen sind. Die Frage ist also nur, woran man die *Widerspruchsfreiheit* eines Begriffs erkennt. Ein Anhaltspunkt dafür kann gemäß der RUSSELLschen Zick-Zack-Theorie (siehe Fußnote 218 auf S. 95) die „Einfachheit“ der Begriffsdefinition sein:

5.7.6 Einfachheitsprinzip (erweiterte Theorie) *Zu einem Begriff existiert eine konzeptionelle Klasse, deren Elemente die Instanzen des Begriffs sind, wenn die Definition des Begriffs einfach und klar verständlich ist, insbesondere keine Zirkularität erkennen lässt.*

Hiernach dürften folgende Annahmen gerechtfertigt sein: Ist x ein Objekt, so ist der Begriff „mit x identisch“, unter den nur x fällt, so einfach, dass kein Widerspruch zu befürchten ist. Dasselbe gilt für den Begriff „mit x oder mit y identisch“, wenn x, y Objekte sind, und allgemeiner für den Begriff „mit einem der aufgezählten Objekte identisch“, wenn eine Aufzählung $x, y, \ldots$ von Objekten vorliegt. Es existiert also zu jedem Objekt, auch zu jeder Unmenge, eine „Einerkollektion“, deren einziges Element dieses Objekt ist, und ebenso zu Objekten x, y die „Zweierkollektion“ mit x und y als Elementen und allgemein die Kollektion aller aufgezählten Objekte, wann immer solche aufgezählt werden. Diese Kollektionen sollen in der *erweiterten Theorie* mit $\{x\}$ bzw. $\{x, y\}$ bzw. $\{x, y, \ldots\}$ bezeichnet werden, auch wenn in der Aufzählung $x, y \ldots$ Unmengen vorkommen.

5.7.7 Erklärung (aufzählende Klassenbezeichnung in der erweiterten Theorie) Für Objektbezeichnungen x und y bezeichne in der erweiterten Theorie $\{x\}$ bzw. $\{x, y\}$ die Kollektion, deren einziges Element x bzw. deren einzige Elemente x und y sind. Für eine Objektaufzählung $x, y, \ldots$ bezeichne $\{x, y, \ldots\}$ die Kollektion, deren Elemente die aufgezählten Objekte sind.

Hier kann es zu abweichenden Bedeutungen der Ausdrücke in den beiden Theorien kommen: Ist etwa x eine Unmenge, so bezeichnet $\{x\}$ gemäß Erklärung 5.3.4 S. 81 in der elementaren Theorie die leere Menge, in der erweiterten Theorie aber die Kollektion, welche die Unmenge x enthält. Nach dem Einfachheitsprinzip sollte es auch zu den einfachen Begriffen «Objekt», «Unmenge» und «Klasse» und ebenso zu den noch zu definierenden Begriffen «Relation», «Funktion» und «Operation» eine entsprechende Kollektion geben. Für diese Kollektionen schlage ich folgende Bezeichnungen vor:

5.7.8 Erklärung $\mathbb{D}$ bzw. $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{K}$ bzw. $\mathbb{U}$ bzw. $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{F}$ bzw. $\mathbb{O}$ sei die dem Begriff «Objekt» bzw. «Kollektion» bzw. «(kombinatorische) Klasse» bzw. «Unmenge» bzw. «Relation» bzw. «Funktion» bzw. «Operation» entsprechende Kollektion, die alle Objekte bzw. alle Kollektionen bzw. alle (kombinatorischen) Klassen bzw. alle Unmengen usw. als Elemente enthält.

Es ist nicht notwendig, die erweiterte Theorie hier zu vertiefen. Wer dies tun will, muss jedenfalls vorsichtig verfahren, um sich nicht in Widersprüche zu verwickeln. Die Grundzüge der erweiterte Theorie mussten aber dargelegt werden, da sie eine Hintergrundtheorie bildet, deren Konzepte hin und wieder auch für das Verständnis und den Umgang mit der elementaren Theorie nützlich sind oder sogar vorausgesetzt werden müssen.[242]

[242] Siehe die Ausführungen über Objektbereiche von Variablen (S. 103–104), Paare (S. 129), konzeptionelle Relationen (S. 129 und S. 134–135), Funktionen (S. 136, S. 139 und S. 141), Operationen (S. 144 und S. 145), das Auswahlaxiom (S. 155, Fußnote 383 auf S. 156 und S. 162), die Gleichmächtigkeitsrelation (S. 164, S. 165 mit Fußnote 422), Äquivalenzrelationen und uneigentliche FREGEsche Zahlen oder Unmengenstufen (S. 167–171), Ordnungstheorie (S. 174, S. 187, S. 189, S. 196, S. 183 und Fußnote 502 auf S. 197), Zahlen (S. 211, S. 211–212, S. 225–226 und S. 343), $\in$-Ketten (S. 257), Kardinalzahlen (Fußnote 818 auf S. 321) und Semantik der Logik (S. 362–365).

5.8 Einstieg in die formale Theorie: die logische Ursprache

Bisher haben wir die fundamentalsten Begriffe und Tatsachen, auf denen die Mengenlehre aufbaut, *inhaltlich* erklärt. Die eigentliche Mengenlehre entwickelt sich nun mittels *formaler* Beweise aus diesen inhaltlich gerechtfertigten Voraussetzungen, die hierzu allerdings nochmals *formalisiert*, d. h. auf ein „formales Grundgerüst“ zugeschnitten werden müssen. Wir müssen daher auf einer höheren Ebene von neuem beginnen. Allerdings kann aus den auf S. 5–7 genannten Gründen die Logik in ihrer strengsten Form erst am *Ende* eines fortgeschrittenen mengentheoretischen Diskurses eingeführt werden (ich tue dies im folgenden Kapitel 6), so dass wir uns hier auf Methoden einer noch weitgehend dem inhaltsbestimmten Denken verpflichteten Logik stützen müssen.

Im Folgenden werde ich alle für eine lückenlose Absicherung der Mengenlehre notwendigen Beweise in der für einen Leser ohne Grundkenntnisse erforderlichen Ausführlichkeit darstellen. Dabei werde ich jedoch bestimmte Beweise in den Anhang (Kap. 7) auslagern: zum einen längere Beweise, die den Lesefluss stören würden, und zum anderen Beweise von Sätzen, die intuitiv klar zu sein scheinen, so dass beim ersten Lesen kein Bedürfnis besteht, einen Beweis dafür zu sehen. Zum *Verständnis* des Gesagten sind zudem die Beweise nicht erforderlich, sie könnten also generell übergangen werden. Ich beginne mit einigen Vorbemerkungen über logische Ausdrücke.

Grundlegendes zu logischen Ausdrücken

Terme und Formeln. Unter *Ausdrücken* wollen wir hier Zeichen oder Zeichenverbände verstehen,[243] deren Aufgabe es ist, eine bestimmte „semantische Funktion“ auszuüben, nämlich Objekte zu bezeichnen oder Sachverhalte zu beschreiben.[244] Ausdrücke, die Objekte bezeichnen sollen, heißen *Terme* und solche, die Sachverhalte beschreiben sollen, *Formeln*.[245]

Beispiele. «$\mathbb{D}$» und «$\{\emptyset\}$» sind Terme, während «$\mathbb{D} = \mathbb{D}$» und «$\mathbb{D} \neq \mathbb{D}$» Formeln sind.

Neben so genannten *geschlossenen* Ausdrücken, die ihre semantische Funktion *unmittelbar* ausüben (also unmittelbar ein Objekt bezeichnen oder einen Sachverhalt aussagen) benutzt man in der Logik auch *offene* Ausdrücke, die ihre Funktion erst dann ausüben, wenn man gewisse „Variablen interpretiert“ hat. Zum Verständnis der offenen Ausdrücke ist also zu klären, was man unter *Variablen* und ihrer *Interpretation* versteht.

Variablen und ihre Belegung bzw. Interpretation. Eine *Variable* ist ein Zeichen, dem man eine nichtleere Kollektion als *Objektbereich* zugeordnet hat, mit der Wirkung, dass das Zeichen „in unbestimmter Weise“ für die Objekte dieser Kollektion steht. Das soll heißen: Die Variable darf *vorübergehend* als Bezeichnung für ein beliebiges Objekt ihres Objektbereichs festgelegt werden, und eine solche Festlegung heißt eine *Belegung* oder *Interpretation* der Variablen. Als Objektbereich einer Variablen sind auch *konzeptionelle* Klassen zulassen. Insbesondere soll es erlaubt sein, als Objektbereich die Kollektion $\mathbb{D}$ aller Objekte überhaupt zu nehmen: Dann ist die Variable eine

[243] Genauer wollen wir unter *Zeichen* hier konkrete oder abstrakte Schriftzeichen verstehen, unter *Zeichenverbänden* ebenfalls diese Zeichen und zusätzlich beliebige Zusammenstellungen mehrerer solcher Zeichen, sei es, dass diese *nebeneinander* oder *übereinander* oder auch *ineinander* gestellt werden. – In der formalen Logik werden wir demgegenüber als Ausdrücke *Zeichenreihen* in einem ganz bestimmten Sinn verwenden (siehe S. 352–354).

[244] Man könnte Ausdrücke mit noch anderen semantischen Funktionen betrachten, zum Beispiel *Befehle* oder *Fragen*. Diese lassen wir hier jedoch außer Acht.

[245] Wichtig ist hier das Wort „sollen“, womit gemeint ist, dass der Ausdruck *standardmäßig* zunächst einmal für die entsprechende Funktion „vorgesehen“ ist. Wir werden nämlich im Verlauf dieses Abschnitts erlauben, auch entgegen dieser standardmäßigen Funktion mit Termen Sachverhalte zu beschreiben und umgekehrt mit Formeln Objekte zu bezeichnen.

allgemeine Objektvariable, die für jedes Objekt schlechthin stehen kann. Ist der Objektbereich einer Variablen die Kollektion $\mathbb{C}$ aller Klassen, spricht man von einer *Klassenvariablen* usw. Wir können nun die Einteilung der Ausdrücke in offene und geschlossene wie folgt erklären:

Offene und geschlossene Ausdrücke. Ausdrücke üben ihre Funktion entweder unmittelbar aus und heißen dann *geschlossen* (ein Term ist also geschlossen, wenn er unmittelbar ein Objekt bezeichnet; eine Formel ist geschlossen, wenn sie unmittelbar einen Sachverhalt beschreibt), oder sie üben ihre Funktion erst nach Interpretation von mindestens einer Variablen aus und heißen *offen*.

Insgesamt können wir nun vier Arten logischer Ausdrücke unterscheiden:[246]

1. *geschlossene Terme*, die unmittelbar ein Objekt bezeichnen
   (diese heißen auch *Kennzeichnungen*),

2. *geschlossene Formeln*, die unmittelbar einen Sachverhalt beschreiben
   (diese heißen auch *Aussagen*),

3. *offene Terme*, die ein Objekt erst nach Interpretation von Variablen bezeichnen
   (diese heißen auch *Kennzeichnungsformen*),

4. *offene Formeln*, die einen Sachverhalt erst nach Interpretation von Variablen beschreiben
   (diese heißen auch *Aussageformen*).

Besonders wichtig sind *Aussagen* (also geschlossene Formeln), die man mit Blick auf die Semantik in wahre und falsche unterteilen kann:

Wahre und falsche Aussagen. Je nachdem, ob der durch eine Aussage beschriebene Sachverhalt wahr oder falsch ist, bezeichnet man auch die Aussage als *wahr* bzw. *falsch*, und sagt, dass sie *gilt* bzw. *nicht gilt* oder *erfüllt* ist bzw. *nicht erfüllt* ist. Ist der Wahrheitswert des Sachverhalts der Wahrpunkt bzw. der Falschpunkt des logischen Universums (vgl. Abschnitt 4.4.3), bezeichnen wir diesen Wahrheitswert auch als den *Wahrheitswert* der Aussage.

Zu einem *offenen* Ausdruck α gibt es nach unserer Erklärung immer Variablen $x, y, \ldots$ mit der Eigenschaft, dass der Ausdruck seine semantische Funktion ausübt, sobald man diese Variablen interpretiert. Wenn diese Beziehung zwischen dem Ausdruck α und den Variablen $x, y \ldots$ besteht, soll α „nach Interpretation von $x, y \ldots$ geschlossen“ heißen:

Nach Interpretation von Variablen geschlossene Ausdrücke. Ein Ausdruck α heißt *nach Interpretation der Variablen $x, y, \ldots$ geschlossen*, wenn α *immer dann*, wenn man alle diese Variablen interpretiert, seine Funktion ausübt (also ein Objekt bezeichnet oder einen Sachverhalt beschreibt).

Beispiele.

(1) Die offene Formel $x = x$ ist nach Interpretation der Variablen x geschlossen, und

(2) der offene Term $\{x, y\}$ nach Interpretation von x und y (nicht aber von x allein).

(3) Die beiden genannten Ausdrücke sind auch nach Interpretation von x, y, z geschlossen (da z in ihnen nicht vorkommt, kann eine Interpretation von z an ihrer Bedeutung nichts ändern).

[246] Vgl. Klaua, *Mengenlehre* § 1 S. 21.

(4) Jede einzelne Variable x ist ebenfalls ein offener Term, und zwar ein solcher, der nach Interpretation von x geschlossen ist.

(5) Jeder Ausdruck *ohne* Variablen übt seine Funktion direkt aus, ist also „im absoluten Sinn“ geschlossen; also „nach Interpretation *von beliebigen Variablen*“.

(6) Interpretiert man *alle* Variablen, so übt *jeder* Ausdruck seine semantische Funktion aus. Daher ist ein beliebiger Ausdruck stets „nach Interpretation *aller* Variablen“ geschlossen.

Freie und gebundene Variablen. Auch in einem geschlossenen Ausdruck können Variablen vorkommen. So sind die Ausdrücke

≪für jedes x gilt: $x = x$≫,
≪es gibt (mindestens oder genau) ein x, so dass $x \neq \emptyset$≫,
≪dasjenige (oder das auserwählte) x, für das gilt: x ist eine Menge ohne Elemente≫,
≪die Klasse, die alle x enthält, für die gilt: $x \neq \emptyset$≫

geschlossen (die ersten beiden sind Aussagen, die letzten beiden Kennzeichnungen), *obgleich* in ihnen Exemplare der Variablen x vorkommen. Interpretiert man die Variable x (zum Beispiel als Bezeichnung für die Erde), so darf diese Interpretation auf die hier vorkommenden Exemplare von x *nicht* angewendet werden, was man daran erkennt, dass ein Einsetzen von „die Erde“ für x hier zu einer unsinnigen Zeichenreihe führen würde.[247] Solche Variablenexemplare heißen *gebunden* oder für eine Interpretation *nicht freigegeben*. Sie üben eine rein syntaktische Funktion aus, die man in der Alltagssprache durch *Pronomen* nachahmen kann.[248] Die Variablenexemplare dagegen, für die in einem Ausdruck eine Interpretation wirksam wird, heißen *frei*, so etwa die Exemplare von x und y in ≪$x = y$≫ und ≪$y = \emptyset$≫. Man erkennt sie daran, dass ein Einsetzen von Objektbezeichnungen für die Variablen zu sinnvollen Ausdrücken führt.[249]

Fusion von Termen und Formeln. Es ist vorteilhaft, wenn man Terme und Formeln in gewisser Hinsicht „gleich behandeln“ kann.[250] Wir erreichen dies in drei Schritten.[251]

1. Schritt. Zunächst verleihen wir allen Formeln neben ihrer Funktion, nach Interpretation aller freien Variablen einen Sachverhalt zu beschreiben, zusätzlich die Funktion, ein bestimmtes Objekt zu bezeichnen: und zwar soll jede falsche Formel die Menge $\emptyset$ und jede wahre Formel die Menge $\{\emptyset\}$ bezeichnen. Für $\emptyset$ bzw. $\{\emptyset\}$ schreibe ich in diesem Zusammenhang auch 0 bzw. 1 und nenne 0 den *Falschpunkt-Repräsentanten* und 1 den *Wahrpunkt-Repräsentanten*:

5.8.1 Erklärung Das Individuum $\emptyset$ ist der *Falschpunkt-Repräsentant* 0, das Individuum $\{\emptyset\}$ der *Wahrpunkt-Repräsentant* 1.

---

247 Man erhielte ≪für jedes *die Erde* gilt ...≫, ≪es gibt ein *die Erde* ...≫, ≪dasjenige *die Erde* ...≫, ≪die Klasse, die alle *die Erde* enthält, ...≫.

248 Mit Hilfe von Pronomen kann man daher die oben genannten Ausdrücke in der Alltagssprache durch bedeutungsgleiche *variablenfreie* Ausdrücke ersetzen, zum Beispiel durch folgenden: ≪Für jedes *Objekt* gilt: *dieses* ist mit *sich* identisch≫, ≪es gibt ein *Objekt*, so dass *dieses* von $\emptyset$ verschieden ist≫, ≪dasjenige *Objekt*, *welches* eine Menge ohne Elemente ist≫, ≪die Klasse, die alle *Individuen* enthält, *welche* von der leeren Menge verschieden sind≫.

249 Man kann zulassen, dass in einem Ausdruck von ein und derselben Variablen sowohl gebundene wie auch freie Exemplare vorkommen, z. B. ist in dem Ausdruck ≪$x \neq \emptyset$ und für alle x gilt $x = x$≫ das erste Exemplar von x frei, während die letzten drei Exemplare gebunden sind.

250 Die Idee einer solchen Gleichbehandlung geht auf Frege zurück (siehe S. 361–362).

251 Hier gehen wir im Gegensatz zur formalen Logik davon aus, dass Formeln und Terme schon gegeben sind, so dass wir sie durch die drei folgenden Schritte erst nachträglich zusammenführen. In der formalen Logik (Kap. 6) werden wir dagegen die Ausdrücke und ihre Bedeutung „künstlich“ aufbauen und von vornherein dafür sorgen, dass die Verhältnisse so sind, wie sie hier erst nach den drei nachfolgenden Bestimmungen erreicht werden.

2. Schritt. Wir verändern die Bedeutung der Formeln wie folgt: Anstelle des Sachverhalts, den eine Formel φ ursprünglich aussagt, lassen wir sie den Sachverhalt aussagen, „dass φ den Wahrpunkt-Repräsentanten bezeichnet". Dieser Sachverhalt ist genau dann wahr oder falsch, wenn auch der ursprünglich gemeinte Sachverhalt wahr oder falsch war. So können wir uns φ immer noch als den ursprünglichen Sachverhalt repräsentierend vorstellen.

3. Schritt. Jeden Term θ benutzen wir zur Aussage des Sachverhalts, «dass θ den Wahrpunkt-Repräsentanten bezeichnet». So ist θ wahr, wenn θ tatsächlich den Wahrpunkt-Repräsentanten bezeichnet, und falsch, wann immer θ den Falschpunkt-Repräsentanten *oder auch irgendein anderes Objekt bezeichnet*. So kann man jetzt die Bezeichnung $\mathbb{M}$ für die Klasse aller Mengen als „falsche Sachverhaltsbeschreibung" auffassen, weil $\mathbb{M}$ nicht den Wahrpunkt-Repräsentanten 1 bezeichnet.

Insgesamt haben wir nun erreicht, dass jeder Ausdruck sowohl ein Objekt bezeichnet als auch einen Sachverhalt beschreibt, so dass der *semantische* Unterschied zwischen Termen und Formeln aufgehoben ist: Jeder Term kann „formelartig" und jede Formel „termartig" gebraucht werden. Allerdings soll sich eine Formel stets *syntaktisch* von einem Term unterscheiden lassen,[252] und dieser Unterschied soll in folgender Weise auch weiterhin für die Bedeutung relevant sein: *Solange der Kontext nicht das Gegenteil erkennen lässt, sollen Terme stets als Objektbezeichnungen und Formeln stets als Sachverhaltsbeschreibungen* fungieren. Sagen wir aber, dass ein Ausdruck α „gilt", „wahr ist", „nicht erfüllt ist" oder ähnlich, so verwenden wir ihn als Sachverhaltsbeschreibung (gebrauchen ihn „formelartig"), *auch wenn er syntaktisch ein Term ist*. Sagen wir dagegen, dass α gleich einem β oder Element eines β ist oder ähnlich, so benutzen wir α und β als Objektbezeichnungen (gebrauchen sie „termartig"), *auch wenn sie syntaktisch Formeln sein sollten.*

Äquinotation und Äquivalenz. Mit dem *Äquinotationszeichen* $\equiv$ bilden wir für beliebige Ausdrücke α_1 und α_2 die *Äquinotationsformel*

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \qquad \text{[Lesart: } \alpha_1 \text{ äquinotant } \alpha_2\text{]},$$

die ausdrücken soll, dass α_1 und α_2 *nach jeder beliebigen Variableninterpretation* und *in jeder Situation, in der die gegebenenfalls vorausgesetzten Axiome und speziellen Voraussetzungen gelten*,[253] dasselbe Objekt bezeichnen. Diese Formel drückt etwas Ähnliches wie $\alpha_1 = \alpha_2$ aus, aber sie gehört zu der „über" Formeln redenden *Metasprache*. Diese ist von der sog. *Objektsprache* zu unterscheiden, welcher die betrachteten Ausdrücke α_1 und α_2 angehören, und zu der auch die Gleichung $\alpha_2 = \alpha_2$ gehört. Ein Unterschied zwischen $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ ist außerdem, dass $\varphi_1 = \varphi_2$ *für verschiedene Variableninterpretationen verschiedene Wahrheitswerte haben kann*, während $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ von der Interpretation unabhängig ist.[254] Analog verwendet man das *Äquivalenzzeichen* $\Leftrightarrow$ zur Bildung metasprachlicher Formeln: Für objektsprachliche Formeln φ_1 und φ_2 soll die *Äquivalenzformel*

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \qquad \text{[Lesart: } \varphi_1 \text{ äquivalent } \varphi_2\text{]}$$

in der Metasprache ausdrücken, dass die Ausdrücke φ_1 und φ_2 *nach jeder beliebigen Variableninterpretation* und *in jeder Situation, in der die gegebenenfalls vorausgesetzten Axiome und speziellen*

[252] Bei jedem Ausdruck der „Ursprache" gebe ich explizit an, ob es sich um einen Term oder eine Formel handelt, und bei den durch eine Definition eingeführten Ausdrücken soll der neu definierte Ausdruck immer dann als Term bzw. Formel gelten, wenn auch der definierende Ausdruck ein Term bzw. eine Formel war.

[253] Mit „in jeder Situation" ist genauer gemeint „in jedem Modell"; siehe hierzu S. 111–114.

[254] Zum Beispiel nehme man als φ_1 eine Variable x und als φ_2 eine andere Variable y. Man kann dann natürlich beide als Bezeichnung für dasselbe Objekt interpretieren und in *dieser* Interpretation gilt dann $x = y$, aber genauso kann man x und y verschiedene Objekte bezeichnen lassen. Dies zeigt, dass $x \equiv y$ falsch ist. Dagegen gilt $\{x\} = \{x, x\}$ in *jeder* Interpretation und unter allen Umständen, und darum ist auch $\{x\} \equiv \{x, x\}$ richtig.

Voraussetzungen gelten, stets beide wahr oder beide falsch sind, also denselben Wahrheitswert haben. Dagegen fassen wir $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ als eine objektsprachliche Formel auf, die derselben Sprache wie φ_1 und φ_2 angehört, und die Formel $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ ist *nach einer bestimmten Interpretation* genau dann wahr, wenn φ_1 und φ_2 *in dieser Interpretation* denselben Wahrheitswert haben. $\Leftrightarrow$ steht somit zu dem Zeichen $\leftrightarrow$ im selben Verhältnis wie $\equiv$ zu $=$.

Abkürzungen für Ausdrücke. Man kürzt Ausdrücke gern durch einzelne Buchstaben ab. Ich verwende hierfür vorzugsweise den Buchstaben α, eventuell mit Indizierung, also etwa $\alpha_1, \alpha', \alpha^*$, aber auch $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta', \theta^*$ (vor allen bei *Termen* oder termartig benutzten Formeln) und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi', \varphi^*$ (bei *Formeln* und formelartig benutzten Termen). Oft betrachtet man die Abhängigkeit der Bedeutung des Ausdrucks von der Interpretation bestimmter Variablen und erweitert dann die Abkürzung für den Ausdruck dadurch, dass man eine von Klammern umgebene Aufzählung der betrachteten Variablen anhängt. Steht also α für einen Ausdruck, so schreibt man für ihn auch

$$\alpha(x, y \dots)$$

wobei $x, y, \dots$ eine Aufzählung von Variablen ist. Man spricht von einer *Bezeichnung für den Ausdruck α mit Hervorhebung von Variablen.* Umgekehrt führt man oft von vornherein eine Bezeichnung $\alpha(x, y \dots)$ für Ausdrücke ein; dann bezeichnet auch der erste Buchstabe α allein diesen Ausdruck.

Einsetzungen für Variablen. Ist $\alpha(x_1, x_2, \dots)$ eine Bezeichnung für einen Ausdruck α mit Hervorhebung der Variablen $x_1, x_2, \dots$, und sind $c_1, c_2, \dots$ Kennzeichnungen, so soll

- $\alpha(c_1, x_2, \dots)$ oder genauer $\alpha(\frac{c_1}{x_1}, x_2, \dots)$ für einen Ausdruck stehen,
  der dieselbe Bedeutung hat wie $\alpha(x_1, x_2, \dots)$, sobald man x_1 als bedeutungsgleich mit c_1 interpretiert,[255]
- $\alpha(x_1, c_2, \dots)$ oder genauer $\alpha(x_1 \frac{c_2}{x_2}, \dots)$ für einen Ausdruck stehen,
  der dieselbe Bedeutung hat wie $\alpha(x_1, x_2, \dots)$, sobald man x_2 als bedeutungsgleich mit c_2 interpretiert,
- $\alpha(c_1, c_2, \dots)$ oder genauer $\alpha(\frac{c_1}{x_1}, \frac{c_2}{x_2}, \dots)$ für einen Ausdruck stehen,
  der dieselbe Bedeutung hat wie $\alpha(x_1, x_2, \dots)$, sobald man x_1 als bedeutungsgleich mit c_1 und zugleich x_2 als bedeutungsgleich mit c_2 interpretiert usw.

Beispiel. Sei $\varphi(x, y, z)$ als Bezeichnung für die Formel $\{x, y\} = \{y, z\}$ eingeführt. Dann hat

$\varphi(\emptyset, y, z)$ oder genauer $\varphi(\frac{\emptyset}{x}, y, z)$ dieselbe Bedeutung wie $\{\emptyset, y\} = \{y, z\}$,

$\varphi(x, \emptyset, z)$ oder genauer $\varphi(x, \frac{\emptyset}{y}, z)$ dieselbe Bedeutung wie $\{x, \emptyset\} = \{\emptyset, z\}$,

$\varphi(x, y, \emptyset)$ oder genauer $\varphi(x, y, \frac{\emptyset}{z})$ dieselbe Bedeutung wie $\{x, y\} = \{y, \emptyset\}$,

$\varphi(\emptyset, \emptyset, z)$ oder genauer $\varphi(\frac{\emptyset}{x}, \frac{\emptyset}{y}, z)$ dieselbe Bedeutung wie $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset, z\}$, usw.

[255] In der formalen Logik müssen wir $\alpha(c_1, x_2, \dots)$ als metasprachliche Bezeichnung *für einen ganz bestimmten Ausdruck einführen, der durch tatsächliche Manipulationen des mit $\alpha(x_1, x_2 \dots)$ bezeichneten Ausdrucks entsteht*, wobei wir dann Vorkehrungen treffen müssen, um die Komplikation der berüchtigten „Variablenkollision“ zu vermeiden (vgl. S. 375 mit Fußnote 46). Im Gegensatz dazu können wir uns auf dem hier eingenommenen weniger formalen Standpunkt damit begnügen, *direkt die Bedeutung anzugeben, die $\alpha(c_1, x_2, \dots)$ haben soll*, und die konkrete Formung eines solchen Ausdrucks dem Leser überlassen, der dies intuitiv meist richtig ausführen wird (so dass die besagte Komplikation gar nicht zur Sprache gebracht zu werden braucht).

Mit Hilfe dieser Begrifflichkeit können nun die beschreibenden Klassenterme eingeführt werden, die in der Mengenlehre als Standardbezeichnungen für Klassen dienen:

5.8.2 Erklärung (beschreibende Klassenbezeichnung) Sei $\varphi(x)$ ein nach Interpretation einer Variablen x geschlossener Ausdruck. Nach dem Komprehensionstheorem für Klassen (5.3.3 S. 81) gibt es genau eine Klasse, deren Elemente die Individuen a sind, für welche $\varphi(a)$ wahr ist.[256] Diese bezeichnet man mit

$\{x \mid \varphi(x)\}$ [Lesart: Klasse der x, für die $\varphi(x)$ gilt]

und nennt die Zeichenreihe $\{x \mid \varphi(x)\}$ einen *beschreibenden Klassenterm.*

Die Elemente von $\{x \mid \varphi(x)\}$ sind *genau die Individuen a, für die $\varphi(a)$ oder genauer $\varphi(\frac{a}{x})$ gilt.* Infolgedessen erhält man folgende „charakteristische Äquivalenz“ für die beschriebene Klasse:

5.8.3 Theorem *Für jedes Individuum a sind $a \in \{x \mid \varphi(x)\}$ und $\varphi(a)$ äquivalent.*
Das heißt: *a ist genau dann Element von $\{x \mid \varphi(x)\}$, wenn $\varphi(a)$ wahr ist.*

Beispiele.

(1) $\{x \mid x = x\}$ bezeichnet die Klasse aller Individuen a, für die $a = a$ gilt. Da dies alle Individuen überhaupt sind, ist $\{x \mid x = x\}$ eine neue Bezeichnung für $\mathbb{D}$.

(2) $\{x \mid x \neq x\}$ bezeichnet die Klasse aller Individuen a, für die $a \neq a$ gilt. Da dies *in keinem Fall* wahr ist, ist $\{x \mid x \neq x\}$ eine neue Bezeichnung für die leere Menge $\emptyset$.

(3) $\{x \mid x = a$ oder $x = b$ oder $x = c$ oder $\ldots\}$ ist eine neue Bezeichnung für $\{a, b, c \ldots\}$. So kann man die aufzählenden Klassenterme (5.3.4 S. 81) durch beschreibende ersetzen.

(4) $\{x \mid x$ ist Menge$\}$ ist eine Bezeichnung für die Klasse aller Mengen, $\{x \mid x$ ist Urelement$\}$ eine solche für die Klasse aller Urelemente. Überhaupt bezeichnet, wenn B ein Begriff ist, *der nur Individuen als Instanzen hat*, $\{x \mid x$ ist ein $B\}$ die Klasse, die alle Instanzen von B als Elemente hat – gleichgültig ob dies endlich oder unendlich viele sind.

(5) $\{x \mid x \in C\}$ ist, wann immer C eine Klasse bezeichnet, eine kompliziertere Bezeichnung für C, das heißt es gilt $C = \{x \mid x \in C\}$.

Dagegen gilt $C \neq \{x \mid x \in C\}$, wenn C *keine* Klasse ist. Denn dann bezeichnet $\{x \mid x \in C\}$ offenbar die leere Klasse, und als Klasse ist diese von der Nichtklasse C verschieden. Zusammen mit Beispiel (5) zeigt diese Überlegung:

5.8.4 Theorem *C ist dann und nur dann eine Klasse, wenn $C = \{x \mid x \in C\}$.*

Diesen inhaltlich begründeten Satz werden wir später als *formale* Definition einer Klasse verwenden.[257] Zuvor gilt es zu erläutern, was wir unter einer Definition verstehen.

Definitionen. Ist α ein Ausdruck und α_n ein „neuer“, bislang bedeutungsloser Zeichenverband (von einem oder mehreren Zeichen), so schreiben wir

$\alpha_n :\equiv \alpha$ [Lesart: α_n ist per Definition äquinotant mit α]

[256] $\varphi(a)$ steht für den Sachverhalt, den $\varphi(x)$ beschreibt, sobald man x als Bezeichnung für a interpretiert.

[257] Vgl. 5.9.1(3) S. 115.

um α_n als einen Ausdruck einzuführen (zu „definieren“), der bei jeder Variableninterpretation und in jeder Situation dasselbe Objekt bezeichnet wie α, und der ferner als Term oder Formel gelten soll, je nachdem, ob auch α ein Term oder eine Formel war. Ist φ eine Formel und φ_n eine neue Zeichenreihe, schreiben wir auch

$$\varphi_n :\Leftrightarrow \varphi \qquad \text{[Lesart: } \varphi_n \text{ ist per Definition äquivalent mit } \varphi\text{]},$$

anstelle von $\varphi_n :\equiv \varphi$. Nachdem $\alpha_n :\equiv \alpha$ bzw. $\varphi_n :\Leftrightarrow \varphi$ definiert wurde, gilt also in jeder Situation $\alpha_n \equiv \alpha$ (erst recht $\alpha_n = \alpha$) bzw. $\varphi_n \Leftrightarrow \varphi$ (erst recht $\varphi_n \leftrightarrow \varphi$).[258]

Diese *spracherweiternden oder eigentlichen Definitionen*, in denen neue Ausdrücke eingeführt und also die *Sprache* weiterentwickelt wird, sind streng genommen zu unterscheiden von Definitionen, die ich *schreibtechnisch* und *intern* nenne:

- Durch *schreibtechnische Definitionen* werden bloß neue Schreibweisen („Namen“) N für Ausdrücke A geschaffen, ohne dass diese Schreibweisen als neue Ausdrücke der Sprache betrachtet werden. Ich führe diese Namen verbal ein („Für A schreiben wir auch N“).
- Durch *interne Definitionen* werden bloß Variablen interpretiert. Im einfachsten Fall will man im Rahmen eines Satzes oder Beweises vorübergehend eine Variable x so belegen, dass sie dieselbe Bedeutung hat wie ein komplizierterer Ausdruck α; man gebraucht hierzu eine Wendung wie „sei x gleich α“ oder schreibt $x := \alpha$. Manchmal will man eine oder mehrere Variablen eines Ausdrucks τ so belegen, das dieser dieselbe Bedeutung bekommt wie ein komplizierterer Ausdruck α. Auch hierfür schreibt man $\tau := \alpha$.[259]

In konkreten Definitionen benutzt man meist Variablen für Ausdrücke, wodurch man unendlich viele Definitionen durch eine einzige Zeile aufstellen kann. Man benutzt dann ein „Definitionsschema“, das für viele einzelne Definitionen steht. So kann man etwa alle mit dem „Heiratssymbol“ $\bigcirc\!\!\bigcirc$ gebildeten Ausdrücke simultan definieren durch die Zeile:

$$\text{Für Frauen } f \text{ und Männer } m \text{ sei} \qquad f \bigcirc\!\!\bigcirc m \;:\Leftrightarrow\; f \text{ ist verheiratet mit } m,$$

womit die unendlich vielen Definitionen gemeint sind, die man erhält, wenn man für die Exemplare der Variablen f solche eines beliebigen Ausdrucks α_f einsetzt, und für jene von m solche eines beliebigen Ausdrucks α_m (der von α_f verschieden oder mit ihm identisch sein kann). Bezeichnet der für f eingesetzte Term α_f eine Frau und der für m eingesetzte α_m einen Mann, hat die Definition ihre natürliche Bedeutung, d. h. sie macht $\alpha_f \bigcirc\!\!\bigcirc \alpha_m$ zu einer *wahren Aussage*, falls die durch α_f und α_m bezeichneten Personen verheiratet sind, und sonst zu einer *falschen*. Wann immer aber α_f und α_m geschlossene Ausdrücke sind, die keine Frau bzw. keinen Mann bezeichnen, entsteht ebenfalls eine *falsche Aussage*. Setzt man schließlich einen offenen Term (z. B. eine Variable) für m oder f ein, erhält man eine *Aussageform*.

Die einem Definitionsschema eventuell vorgeschaltete Bedingung (wie hier «für Frauen f und Männer m») könnte man so auffassen, dass wenn diese nicht erfüllt ist, keine Definition vorgenommen wird. In diesem Sinn sollen Bedingungen aber nur dann verstanden werden, wenn sie *explizit auf Ausdrücke oder auf bestimmte Arten von Ausdrücken Bezug nehmen* (z. B. «für *Variablen* x und *Ausdrücke* α»).[260] Nehmen dagegen Bedingungen nicht explizit auf Ausdrücke Bezug, so sollen

[258] Zum Unterschied zwischen $\equiv$ und $=$ sowie zwischen $\Leftrightarrow$ und $\leftrightarrow$ siehe S. 106–107.

[259] Auch bei sog. *rekursiven Definitionen* (siehe S. 185) werden oft nur Variablen belegt; dann benutze ich das Zeichen $:=$ auch in Rekursionsgleichungen. Andererseits können rekursive Definitionen auch als eigentliche Definitionen gemeint sein (siehe S. 214).

[260] Eine derartige Bedingung muss benutzt werden, wenn neue Operatorausdrücke (siehe S. 112) eingeführt werden sollen, da bei deren Bildung Variablen mit Ausdrücken zusammengestellt werden müssen. Außerdem verwenden wir derartige Bedingungen in schreibtechnischen Definitionen.

sie lediglich den Zweck haben, den Leser darauf hinzuweisen, *welches die vorgesehenen Fälle sind, für welche man den neu definierten Ausdruck konzipiert hat*, in denen man ihn also einzusetzen gedenkt – ohne jedoch andere Fälle auszuschließen.

Als unmittelbare Vorbereitung für den Aufbau einer für die Mengenlehre geeigneten Ursprache führe ich nun zunächst die Begriffe der Teilklasse, der $\in$-Transitivität und des Modells ein:[261]

5.8.5 Erklärung Eine *Teilklasse* einer Klasse C ist eine Klasse, die keine nicht in C liegenden Elemente hat (so dass jedes ihrer Elemente in C liegt). Für «T ist Teilklasse von C» schreiben wir

$$T \subseteq C.$$

Beispiele. Zu den Teilklassen einer Klasse C gehören stets die leere Klasse und C selbst. Jede Klasse ist außerdem Teilklasse von $\mathbb{D}$.

5.8.6 Erklärung Eine Klasse C heißt $\in$*-transitiv*, falls immer dann, wenn eine nichtleere Menge M zu den Elementen von C gehört, auch sämtliche Elemente von M zu den Elementen von C gehören: wenn also aus $x \in M$ und $M \in C$ stets $x \in C$ folgt.

Beispiele. Sind a, b, c Urelemente, so ist die Klasse $\{a, \{b\}, c\}$ nicht $\in$-transitiv, weil sie die Menge $\{b\}$ als Element enthält, ohne deren Element b zu enthalten. Dagegen ist z. B. $\{a, \{b\}, b, c\}$ $\in$-transitiv, ebenso wie $\mathbb{D}$ und jede Klasse, die keine nichtleeren Mengen enthält.

5.8.7 Erklärung Eine *Grundklasse* oder ein *Modell*[262] ist eine $\in$-transitive Klasse $\mathbb{G}$, in welcher die Individuen $0(= \emptyset)$ und $1(= \{\emptyset\})$ liegen. Ist $\mathbb{G}$ ein Modell, so verstehen wir unter den $\mathbb{G}$-*Individuen* die Elemente von $\mathbb{G}$, unter den $\mathbb{G}$-*Klassen* die Teilklassen von $\mathbb{G}$ und unter den $\mathbb{G}$-*Objekten* die Elemente und die Teilklassen von $\mathbb{G}$ (x ist also ein $\mathbb{G}$-Objekt, wenn $x \in \mathbb{G}$ oder $x \subseteq G$ gilt).

Beispiele. Jedes Modell enthält die leere Klasse $\emptyset$ und die Klasse $\{\emptyset\}$, und da die Klasse $\mathbb{G}_{min} := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, die *nur* diese beiden Elemente enthält, offensichtlich $\in$-transitiv ist, ist $\mathbb{G}_{min}$ ein Modell, und zwar „das kleinste“.[263] Das „größte“ Modell ist die Klasse $\mathbb{D}$; die $\mathbb{D}$-Individuen sind die Individuen schlechthin, und die $\mathbb{D}$-Objekte sind die Objekte schlechthin. Für die Betrachtung von Modellen ist das folgenden Theorem grundlegend:

5.8.8 Theorem *Elemente und Teilklassen von $\mathbb{G}$-Objekten sind ebenfalls $\mathbb{G}$-Objekte. Jede Klasse, die Element oder Teilklasse eines $\mathbb{G}$-Objekts oder selbst ein $\mathbb{G}$-Objekt ist, ist eine Teilklasse von $\mathbb{G}$.*

Beweis. Zur ersten Behauptung: Sei x ein $\mathbb{G}$-Objekt, also $x \in \mathbb{G}$ oder $x \subseteq \mathbb{G}$, und sei u Element oder Teilklasse von x, also $x \in u$ oder $x \subseteq u$. Zu zeigen ist, dass u ein $\mathbb{G}$-Objekt ist. Es gibt vier Fälle:
Fall 1: $u \in x$ und $x \in \mathbb{G}$. Dann folgt $u \in \mathbb{G}$ aufgrund der $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$.
Fall 2: $u \in x$ und $x \subseteq \mathbb{G}$. Dann folgt $u \in \mathbb{G}$, weil wegen $x \subseteq \mathbb{G}$ jedes Element von x auch in $\mathbb{G}$ liegt.
Fall 3: $u \subseteq x$ und $x \in \mathbb{G}$. Dann folgt $u \subseteq \mathbb{G}$.[264]
Fall 4: $u \subseteq x$ und $x \subseteq \mathbb{G}$. Dann folgt $u \subseteq \mathbb{G}$.[265]
Es gilt also stets $u \in \mathbb{G}$ oder $u \subseteq \mathbb{G}$, so dass u in jedem Fall ein $\mathbb{G}$-Objekt ist.

---

261 Für beides gebe ich später auch formale Definitionen an: vgl. Definition 5.10.1 S. 120 und 5.14.1 S. 190.

262 In der formalen Logik wird der Modellbegriff ausgedehnt werden, derart dass es neben Grundklassen auch noch andere Modelle gibt (siehe Abschnitt 6.2).

263 Die $\mathbb{G}_{\text{min}}$-Individuen sind $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$, die $\mathbb{G}_{\text{min}}$-Objekte sind diese und zusätzlich $\{\{\emptyset\}\}$ und $\mathbb{G}_{\text{min}}$ selbst.

264 Denn wegen $u \subseteq x$ liegt jedes t aus u auch in x, und aus $t \in x$ und $x \in \mathbb{G}$ folgt per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$, dass t in $\mathbb{G}$ liegt. Insgesamt liegt also jedes t aus u auch in $\mathbb{G}$, weshalb $u \subseteq \mathbb{G}$ ist.

265 Denn jedes Element von u liegt wegen $u \subset x$ auch in x, und jedes dort liegende Individuum liegt wegen $x \subseteq \mathbb{G}$ auch in $\mathbb{G}$, also liegt insgesamt jedes Element von u in $\mathbb{G}$, weshalb $u \subseteq \mathbb{G}$ ist.

Zur zweiten Behauptung. Sei u zunächst eine Klasse, die Element oder Teilklasse eines $\mathbb{G}$-Objekts x ist. Ist zunächst u eine Teilklasse von x, so zeigen die eben behandelten Fälle (3) und (4), dass $u \subseteq \mathbb{G}$ gilt. Ist aber u ein Element von x, so zeigen die eben behandelten Fälle (1) und (2), dass $u \in \mathbb{G}$ ist. Dann liegt aber jedes Element x von u auch in $\mathbb{G}$ (aus $x \in u$ und $\in u \in \mathbb{G}$ folgt dann $x \in \mathbb{G}$ per $\in$-Transitivität), also gilt wieder $u \subseteq \mathbb{G}$. Ist schließlich u selbst ein $\mathbb{G}$-Objekt, so folgt die Behauptung aus dem eben Gesagten, da u dann Element oder Teilklasse des $\mathbb{G}$-Objekts $\mathbb{G}$ ist. □

Modelle $\mathbb{G}$ sind nun Bereiche, in denen Mengenlehre „im Kleinen“ betrieben werden kann. Alle Ausdrücke sollen nun bezogen auf jedes Modell (oder „in“ ihm) eine je eigene Bedeutung erhalten. Die folgenden Theoreme werden auf jeden Fall im Modell $\mathbb{D}$, oft aber zugleich auch in anderen Modellen gültig sein. Diese Verhältnisse werden genauer in Abschnitt 5.29 untersucht und in Abschnitt 5.31 ausgenutzt werden, um die Begriffe des Mengenuniversums und der unerreichbaren Kardinalzahl zu beleuchten. Im Modell $\mathbb{D}$ haben die Ausdrücke ihre natürliche und bisher betrachtete Bedeutung, und unser Hauptinteresse soll auch weiterhin dem gelten, was sie hier bezeichnen. $\mathbb{D}$ heißt daher das *Standardmodell* oder das *absolute Modell* der Mengenlehre und wird außerdem das *Hintergrundmodell* genannt, weil wir die Bedeutung der Ausdrücke in anderen Modellen stets mit Hilfe ihrer Bedeutung in $\mathbb{D}$ beschreiben, und stets mit dieser „absoluten“ Bedeutung vergleichen wollen. Ich beschreibe nun die „Ursprache“, von der ich in der Mengentheorie ausgehe, und die durch Definitionen laufend erweitert werden wird.

Grundlegung der logischen Ursprache

Die Ausdrücke unserer logischen „Ursprache“ sollen folgende sein.

1. Die *Variablen*. Variablen sollen alle Buchstaben mit oder ohne Indizes sein, solange ihnen keine feste Bedeutung gegeben wird.[266] Variablen sollen *Terme* sein. In jedem Modell $\mathbb{G}$ soll der *Objektbereich* jeder Variablen *genau die* $\mathbb{G}$*-Objekte umfassen*.[267]

2. Die *logischen Namen*. Namen sind einzelne Zeichen mit fester Bedeutung (hier in der nicht streng formalen Logik auch Zeichenverbände wie z. B. Wörter und Wortverbindungen mit fester Bedeutung, derart dass sich die Bedeutung nicht aus der Bedeutung von Teilen der Zeichenverbandes ergibt, sondern unmittelbar festgelegt werden muss).
Die Namen der Ursprache seien die drei folgenden: $\bot$, $\top$ und $\underline{\bot}$, die ich wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung *logische Namen* nenne. Die logischen Namen $\bot$ und $\top$ sollen *Formeln*, und $\underline{\bot}$ soll ein *Term* sein.

(2a) $\top$ soll in jedem Modell $\mathbb{G}$ den Wahrpunkt-Repräsentanten 1 bezeichnen,

(2b) $\bot$ soll in jedem Modell $\mathbb{G}$ den Wahrpunkt-Falschpunkt-Repräsentanten 0 bezeichnen,

(2c) $\underline{\bot}$ soll in jedem Modell $\mathbb{G}$ die Klasse $\mathbb{G}$ bezeichnen.

Die Erklärung 5.4.3 S. 88, dass $\underline{\bot}$ für $\mathbb{D}$ steht, gilt also nur im Standardmodell $\mathbb{D}$. Doch werden wir später sehen (Satz 5.5 S. 116), dass im Modell $\mathbb{G}$ der (definierte) Ausdruck $\ll\mathbb{D}\gg$ eine Bezeichnung für die Klasse $\mathbb{G}$ sein wird, und so gesehen gilt jene Erklärung auch hier.

3. Die *zusammengesetzten Ausdrücke mit logischen Funktoren*. Funktoren sind Zeichen, die sich mit einer festen Anzahl schon gebildeter Ausdrücke *beliebiger Art* in einer syntaktisch fest vorgeschriebenen Weise zu neuen Ausdrücken zusammenstellen lassen. Je nachdem, ob der mit einem Funktor zusammengestellte Ausdruck stets ein Term oder eine Formel ist, spricht man von einem *Termfunktor* oder *Formelfunktor*, und nach der Anzahl der Ausdrücke von einem *einstelligen*,

[266] In der formalen Logik (Kap. 6) werde ich als Variablen nur die Zeichen $\mathtt{x}\prime, \mathtt{x}\prime\prime, \mathtt{x}\prime\prime\prime, \ldots$ nehmen.

[267] Im Standardmodell $\mathbb{D}$ und *nur* hier umfasst dieser Objektbereich also *alle* Objekte schlechthin.

zweistelligen usw. Funktor. Die schon erwähnten *Namen* können dabei als *null-stellige* Funktoren aufgefasst werden, weil sie schon für sich allen (also mit *null* Ausdrücken zusammengestellt) einen Ausdruck bilden. Die Funktoren der Ursprache sollen neben den drei Namen die zehn Zeichen $-, \neg, \wedge, |, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow, =, \in$ sein, die als ein– und zweistellige Formelfunktoren dienen; zusammen mit den logischen Namen nenne ich sie wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung *logische Funktoren*.[268] Mit $-, \neg, \wedge, |, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow, =, \in$ und Ausdrücken α und β lassen sich folgende Ausdrücke bilden:

(3a) $-\alpha$ oder synonym ≪es gilt α≫,
(3b) $\neg\alpha$ oder synonym ≪nicht α≫ oder ≪α gilt nicht≫,
(3c) $\alpha \wedge \beta$ oder synonym ≪α und β≫ oder ≪α und β gelten beide≫,
(3d) $\alpha \mid \beta$ oder synonym ≪α schließt β aus≫ oder ≪α und β gelten nicht zugleich≫
(3e) $\alpha \vee \beta$ oder synonym ≪α oder β≫ oder ≪es gilt mindestens eines von beiden: α oder β≫,
(3f) $\alpha \dot{\vee} \beta$ oder synonym ≪entweder α oder β≪, oder ≪es gilt genau eines von beiden: α oder β“,
(3g) $\alpha \rightarrow \beta$ oder synonym ≪wenn α, dann β≫, oder ≪es ist nicht zugleich α wahr und β falsch≫,
(3h) $\alpha \leftrightarrow \beta$ oder synonym ≪α genau dann wenn β≫ oder ≪α und β haben denselben Wahrheitswert≫,
(3i) $\alpha = \beta$ oder synonym ≪a ist gleich b≫,
(3j) $\alpha \in \beta$ oder synonym ≪a ist Element von b≫.

Diese Ausdrücke sollen *Formeln* sein. Im Gegensatz zur formalen Logik lasse ich hier auch die angegebenen (und andere gleichartige) synonyme Ausdrücke zu, die auch im Text fast immer verwendet werden, so dass der Leser sich die Zeichen nicht merken muss. $\alpha = \beta$ sagt die unterschiedslose Identität der mit α und β bezeichneten Objekte aus und $\alpha \in \beta$ ist wie bisher im Sinne von Erklärung 5.2.10 S. 76 zu verstehen. Die Bedeutung der übrigen Ausdrücke ist durch die angegebenen synonymen Ausdrücke klar.[269] Diese Bestimmungen sollen in *jedem* Modell $\mathbb{G}$ gelten, und so kann ein zusammengesetzter Ausdruck nur dann verschiedene Bedeutungen in verschiedenen Modellen erlangen, wenn schon einer der involvierten Ausdrücke α oder β dort verschiedene Bedeutungen hat.

4. Die *zusammengesetzten Ausdrücke mit logischen Operatoren*. Operatoren sind Zeichen, die sich mit *mindestens einer Variablen* und weiteren schon gebildeten Ausdrücken beliebiger Art in einer syntaktisch fest vorgeschriebenen Weise zu neuen Ausdrücken zusammenstellen lassen. Die Operatoren der Ursprache sollen die sechs Zeichen $\bigwedge, \bigvee, \dot{\bigvee}, \imath, \boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\kappa}$ sein, die ich wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung *logische Operatoren* nenne.[270] Mit Variablen x und Ausdrücken α setzen sie sich zu den folgenden Operatorausdrücken zusammen:

---

[268] Als klassische logische Funktoren gelten nur $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$. Die fundamentale Bedeutung der Konstanten $\bot, \top, \underline{\bot}$ und der Zeichen $=, \in$ rechtfertigt es, diese ebenfalls unter die logischen Funktoren aufzunehmen. Der Funktor $-$ ist das Gegenstück der Negation $\neg$ und hat den Sinn, aus einem beliebigen Ausdruck eine Formel zu machen, ohne im Fall, dass der Ausdruck bereits eine Formel war, deren Wahrheitswert zu verändern. Das selten gebrauchte „ausschließende oder“ $\dot{\vee}$ (wofür es kein einheitliches Zeichen gibt) wurde als Gegenstück zu $\vee$ aufgenommen, und der Funktor $|$, der auch „nand“ (not and) oder *Shefferscher Strich* heißt, ist für eine logische „Ursprache“ deshalb interessant, weil man mit ihm theoretisch die übrigen Funktoren dieser Liste außer $=$ und $\in$ ersetzen könnte (vgl. Fußnoten 67 auf S. 382 und 61 auf S. 381).

[269] Zu unterstreichen ist die Unterscheidung des einschließenden und ausschließenden ≪oder≫ ($\vee$ bzw. $\dot{\vee}$) und die Bedeutung von ≪wenn … dann≫ ($\rightarrow$), welche durch den zweiten synonymen Ausdruck am klarsten beschrieben ist: $\alpha \rightarrow \beta$ ist nur falsch, wenn zugleich α wahr und β falsch ist, und sonst immer wahr. *Insbesondere ist $\alpha \rightarrow \beta$ immer wahr, wenn α falsch ist.*

[270] Als Operatoren der klassischen *Prädikatenlogik* gelten nur $\bigwedge$ und $\bigvee$, wofür man auch $\forall$ und $\exists$ schreibt. Sehr oft wird aber auch $\dot{\bigvee}$ benötigt, wofür man auch $\exists!$ schreibt. Der Operator $\imath$ wird in der *Kennzeichnungslogik* eingesetzt, $\boldsymbol{\kappa}$ aber (wofür es kein einheitliches Symbol gibt) in der *Klassenlogik*. Zu dem nur selten verwendeten Operator $\boldsymbol{\varepsilon}$ siehe die Diskussion des Auswahlaxioms (Abschnitt 5.11, bes. S. 155–156).

(4a)	$\bigwedge x\ \alpha$	oder synonym	$\bigwedge_x \alpha$	oder	«für jedes x gilt α» oder «für alle x gilt α»
(4b)	$\bigvee x\ \alpha$	oder synonym	$\bigvee_x \alpha$	oder	«es gibt (mindestens) ein x, so dass β gilt»,
(4c)	$\dot{\bigvee} x\ \alpha$	oder synonym	$\dot{\bigvee}_x \alpha$	oder	«es gibt genau ein x, so dass β gilt»,
(4d)	$\boldsymbol{\imath}\ x\ \beta$	oder synonym			«dasjenige x für das α gilt»,
(4e)	$\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \alpha$	oder synonym			«das ausgewählte x, für das α gilt» oder «ein x mit α»,
(4f)	$\boldsymbol{\kappa}\ x\ \alpha$	oder synonym	$\{x \mid \alpha\}$	oder	«die Klasse aller x, für die α gilt».

Die mit $\bigwedge, \bigvee, \dot{\bigvee}$ gebildeten Ausdrücke sollen *Formeln* sein, und die mit $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}$ gebildeten *Terme*. Die Bedeutung der mit $\bigwedge, \bigvee, \dot{\bigvee}$ gebildeten Ausdrücke in einem Modell $\mathbb{G}$ ist durch den angegebenen synonymen Ausdruck klar, *wenn man beachtet, dass der Objektbereich der Variablen x hier der Bereich der $\mathbb{G}$-Objekte ist*. Beispielsweise ist, wenn $\alpha(x)$ nach Interpretation von x geschlossen ist, $\bigwedge x\ \alpha(x)$ genau dann wahr, wenn $\alpha(c)$ für jedes $\mathbb{G}$-Objekt c wahr ist. Die Bedeutung von $\boldsymbol{\imath}\ x\ \alpha(x)$, $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \alpha(x)$ und $\boldsymbol{\kappa}\ x\ \alpha(x)$ ist schließlich in einem Modell $\mathbb{G}$ wie folgt festgelegt:

- $\boldsymbol{\imath}\ x\ \alpha(x)$ bezeichnet *das* $\mathbb{G}$-Objekt c, für das $\alpha(c)$ wahr ist, *falls es genau ein solches c gibt*, und bezeichnet *andernfalls* die Klasse $\mathbb{G}$, die im Modell $\mathbb{G}$ als Ersatzobjekt fungiert.
- $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \alpha(x)$ bezeichnet *ein* ausgewähltes $\mathbb{G}$-Objekt c, für das $\alpha(c)$ wahr ist, *falls es mindestens ein solches gibt*,[271] und bezeichnet *andernfalls* das Ersatzobjekt $\mathbb{G}$.
- $\boldsymbol{\kappa}\ x\ \alpha(x)$ oder $\{x \mid \alpha(x)\}$ bezeichnet die (gemäß Komprehensionstheorem 5.3.3 S. 81 existierende) Klasse, deren Elemente diejenigen $\mathbb{G}$-Individuen c sind, für die $\alpha(c)$ gilt. Da alle Elemente $\mathbb{G}$-Individuen sind, ist dies eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, d. h. eine $\mathbb{G}$-Klasse.

Man beachte, dass die Erklärung 5.8.2 des beschreibenden Klassenterms $\{x \mid \alpha(x)\}$ zunächst nur im Modell $\mathbb{D}$ gilt; versteht man jedoch unter «Individuen» nur die $\mathbb{G}$-Individuen, gibt jene Erklärung auch die hier beschriebene Bedeutung von $\{x \mid \alpha(x)\}$ im Modell $\mathbb{G}$ korrekt wieder.

Klammern und andere Maßnahmen zur Vermeidung mehrdeutiger Ausdrücke. Man kann nun nach obigen Regeln auch Ausdrücke bilden, die ohne zusätzliche Maßnahmen mehrdeutig wären. So kann man mit Ausdrücken α und β zunächst $\neg\alpha$ («nicht α») und dann $\neg\alpha \wedge \beta$ («nicht α und β») bilden, was sich nach dem bisher Gesagten entweder im Sinn von

(1) «es gilt *nicht*, dass α *und* β gilt»

oder im Sinn von

(2) «es gilt *nicht* α, *und* es gilt β»

deuten ließe. Im ersten Fall bezieht sich $\neg$ («nicht») auf $\alpha \wedge \beta$, im zweiten nur auf α. Umgekehrt bezieht sich $\wedge$ («und») im ersten Fall auf α und β, im zweiten aber auf $\neg\alpha$ und β. Um Eindeutigkeit herzustellen, muss man also gewisse Zeichenreihen zu Sinneinheiten zusammenfassen. Am einfachsten ist es, das Zusammengehörige *einzukreisen*: wenn man also (1) meint, $\neg\boxed{\alpha \wedge \beta}$ zu schreiben, und wenn man (2) meint, $\boxed{\neg\alpha} \wedge \beta$. Aus schreibtechnischen Gründen benutzt man statt der Kreise *Klammern*, schreibt also $\neg(\alpha \wedge \beta)$ für (1) und $(\neg\alpha) \wedge \beta$ für (2). Eine zweite Möglichkeit ist

[271] Wie später erläutert wird (siehe S. 155–156; vorher werden die Ausdrücke $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \alpha(x)$ nicht benutzt), denken wir uns zu jeder Auswahl von Objekten, *zu der mindestens ein Objekt c gehört*, ein solches c ein für allemal ausgewählt. Es soll nun $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \alpha$ im Falle, dass es mindestens ein $\mathbb{G}$-Objekt c gibt, für das $\varphi(c)$ wahr ist, das „ausgewählte“ unter diesen c bezeichnen.

es, verschieden große *Abstände* oder *Lücken* zu verwenden: die zusammengehörigen Teile sind dann die enger zusammengestellten. Zur Verdeutlichung setzt man dabei manchmal noch Punkte in die Lücken. Für (1) wäre also $\neg\ \ A \wedge \beta$ oder $\neg.\alpha \wedge \beta$ zu schreiben, für (2) $\neg\alpha\ \ \wedge\ \ \beta$ oder $\neg\alpha. \wedge .\beta$. Eine dritte Möglichkeit, bei der man ganz ohne Klammern und Abstände auskommt, ist der Gebrauch der sog. *polnischen Syntax*: Man setzt die mit einem Funktor zusammenzustellenden Ausdrücken alle *rechts* neben den Funktor, schreibt also z. B. $\wedge\alpha\beta$ statt $\alpha \wedge \beta$. Für (1) wäre dann $\wedge\neg\alpha\beta$ zu schreiben, für (2) dagegen $\neg\wedge\alpha\beta$. Diese raffinierte, aber künstlich wirkende Methode wird nur in der streng formalen Logik verwendet. Eine vierte Möglichkeit besteht schließlich im Gebrauch einer *ausführlicheren alltagssprachlichen Wiedergabe*, wie unsere eindeutigen Formulierungen (1) und (2) ja zeigen. Ich werde im Folgenden mit Klammern, Abständen und alltagssprachlicher Umschreibung gleichermaßen arbeiten, und als *letzte Bestimmung für die Aufstellung von Ausdrücken* einfach verlangen, dass auf *irgendeine* dieser Arten Eindeutigkeit hergestellt werden muss.

Damit ist die Ursprache abschließend beschrieben. Alle ihre Ausdrücke setzten sich aus Variablen, Funktoren (darunter die Namen), Operatoren sowie Hilfszeichen (etwa Klammern) zusammen. Die Funktoren und Operatoren fasse ich als *Konstanten* zusammen, und zwar nenne ich die oben genannten wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung *logische* Konstanten.

Die sich aus der Ursprache entwickelnde Sprache wird über die ursprachlichen Konstanten hinaus noch weitere Konstanten bekommen, die ihr fortwährend durch (eigentliche) Definition hinzugefügt werden: neue Namen, Funktoren und Operatoren. Diese Konstanten heißen *definierte Konstanten*, und ihnen stehen die ursprachlich gegebenen als *Grundkonstanten* gegenüber.[272]

Aus den obigen Bestimmungen ergibt sich nun ohne weiteres das folgende einfache „Metatheorem“ über die Bedeutung von Ausdrücken in einem beliebigen Modell $\mathbb{G}$ (als *Metatheoreme* bezeichne ich Aussagen, die nicht „in“ Modellen gelten, sondern Verhältnisse „zwischen“ Modellen oder Beziehungen zwischen Ausdrücken und Modellen beschreiben):

5.8.9 Metatheorem *Jeder geschlossene Ausdruck bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ ein $\mathbb{G}$-Objekt.*

Beweis. Jeder Ausdruck ist entweder eine Formel oder ein Term. Nun bezeichnet eine geschlossene *Formel* nach unserer Festlegung auf S. 105–106 stets eines der Individuen 0 oder 1, die beide nach Erklärung 5.8.7 S. 110 in $\mathbb{G}$ liegen, also $\mathbb{G}$-Objekte sind. Die *Terme* der Ursprache aber sind die Namen $\top, \bot, \underline{\bot}$ sowie die $\boldsymbol{\imath}$–, $\boldsymbol{\varepsilon}$–, und $\boldsymbol{\kappa}$-Terme. Die Namen $\top, \bot, \underline{\bot}$ bezeichnen nach unserer Erklärung auf S. 111 in $\mathbb{G}$ die Objekte 0, 1 und $\mathbb{G}$, also in jedem Fall ein Element oder eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ (man beachte, dass $\mathbb{G}$ eine Teilklasse von sich selbst ist) und somit (gemäß Erklärung 5.8.7) ein $\mathbb{G}$-Objekt. Die geschlossenen $\boldsymbol{\imath}$- und $\boldsymbol{\varepsilon}$-Terme aber bezeichnen nach unserer Erklärung auf der vorherigen Seite in $\mathbb{G}$ ebenfalls stets $\mathbb{G}$-Objekte, und die geschlossenen $\boldsymbol{\kappa}$- oder Klassenterme bezeichnen, wie dort ebenfalls erklärt wurde, in $\mathbb{G}$ stets $\mathbb{G}$-Klassen, also ebenfalls $\mathbb{G}$-Objekte. So bezeichnet jeder geschlossene Ausdruck der Ursprache in $\mathbb{G}$ ein $\mathbb{G}$-Objekt, und da die definierten Ausdrücke der sich entwickelnden Sprache stets nur neue Schreibweisen für ursprachliche Ausdrücke sind, bezeichnen auch diese definierten Ausdrücke, wenn sie geschlossen sind, in $\mathbb{G}$ stets $\mathbb{G}$-Objekte. □

[272] Die übliche Bezeichnung dieser Konstanten als „Grundbegriffe“ sollte man vermeiden, weil Konstanten keine „Begriffe“ sind. Grundbegriffe wären eher die Denotate, für welche die Grundkonstanten stehen (siehe S. 364–365). Aber auch die Denotate einer Konstanten müssen nicht immer Begriffe sein.

5.9 Erste Definitionen und Axiome

Die formale Theorie entwickelt sich aus den Axiomen und Grundkonstanten allein durch *Definitionen* und logisch abgeleitete *Theoreme*.[273] Die *Definitionen* beziehen sich simultan auf alle Modelle und die *Theoreme* gelten in allen Modellen, in denen auch die jeweiligen Axiome erfüllt sind. Weitergehende *inhaltliche* Überlegungen werden von jetzt an nur zur Rechtfertigung von Axiomen angewendet, und diese Überlegungen beziehen sich immer auf das Standardmodell.

Zunächst erfolgen einige **schreibtechnische Definitionen**. Für Variablen $x, y, z, \ldots$, Ausdrücke $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, und zweistellige Funktoren $f_1, f_2, f_3, \ldots$ wird Folgendes vereinbart.

$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3$ oder «es gilt α_1 oder α_2 oder α_3» steht für $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \alpha_3$,
$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4$ oder «es gilt α_1 oder α_2 oder α_3 oder α_4» steht für $((\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \alpha_3) \vee \alpha_4$,
usw. Dies ist genau dann wahr, wenn *mindestens einer* der genannten Ausdrücke gilt.

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ oder «es gilt α_1 und α_2 und α_3» steht für $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3$,
$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4$ oder «es gilt α_1 und α_2 und α_3 und α_4» steht für $((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3) \wedge \alpha_4$,
usw. Dies ist genau dann wahr, wenn *zugleich alle* der genannten Ausdrücke gelten.

$\alpha_1 f_1 \alpha_2 f_2 \alpha_3$ steht für $\alpha_1 f_1 \alpha_2 \ \wedge\ \alpha_2 f_2 \alpha_3$,
$\alpha_1 f_1 \alpha_2 f_2 \alpha_3 f_3 \alpha_4$ steht für $\alpha_1 f_1 \alpha_2 \ \wedge\ \alpha_2 f_2 \alpha_3 \ \wedge\ \alpha_3 f_3 \alpha_4$, usw.
Zum Beispiel steht $\alpha_1 \in \alpha_2 \in \alpha_3 = \alpha_4$ für $\alpha_1 \in \alpha_2 \ \wedge\ \alpha_2 \in \alpha_3 \ \wedge\ \alpha_3 = \alpha_4$.

$\bigwedge xy\alpha$ oder $\bigwedge\limits_{xy} \alpha$ steht für $\bigwedge x \bigwedge y\ \alpha$, $\bigwedge xyz\alpha$ oder $\bigwedge\limits_{xzy} \alpha$ steht für $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ \alpha$, usw.
Diese Formeln werden gelesen: «für alle $x, y, \ldots$ gilt α».

$\bigvee xy\alpha$ oder $\bigvee\limits_{xy} \alpha$ steht für $\bigvee x \bigvee y\ \alpha$, $\bigvee xyz\alpha$ oder $\bigvee\limits_{xzy} \alpha$ steht für $\bigvee x \bigvee y \bigvee z\ \alpha$, usw.
Diese Formeln werden gelesen: «es gibt $x, y, \ldots$, so dass α gilt».

Durchstreichung von Funktoren ersetzt die Negation, z. B. steht $\alpha_1 \neq \alpha_2$ für $\neg(\alpha_1 = \alpha_2)$.

Nun folgen die ersten eigentlichen Definitionen, mit denen die wichtigsten bisher inhaltlich erläuterten Begriffe im Rahmen der formalen Theorie rekonstruiert werden:

5.9.1 Definitionen

(0) a (ist) *Objekt* $:\Leftrightarrow$ es gibt ein x, so dass $x = a$.

(1) $\mathbb{D} :\equiv \{x \mid x = x\}$. $\emptyset :\equiv \{x \mid x \neq x\}$. $\{\} :\equiv \emptyset$.
$\{a\} :\equiv \{x \mid x = a\}$, $\{a, b, \ldots\} :\equiv \{x \mid x = a$ oder $x = b$ oder $\ldots\}$, usw.

(2) a (ist) *Individuum* $:\Leftrightarrow$ $a \in \mathbb{D}$.

(3) a (ist) *Klasse* $:\Leftrightarrow$ $a = \{x \mid x \in a\}$.

(4) a (ist) *Unmenge* $:\Leftrightarrow$ $a \notin \mathbb{D}$.

(5) a (ist) *Menge* $:\Leftrightarrow$ a ist Individuum und a ist Klasse

(6) a (ist) *Urelement* $:\Leftrightarrow$ a ist Individuum und a ist keine Klasse.

(7) $\mathbb{M} :\equiv \{x \mid x$ ist Menge$\}$. $\mathbb{U} :\equiv \{x \mid x$ ist Urelement$\}$.

Bemerkung. Für a ist ebenso wie für b ein beliebiger Ausdruck zu setzen und für x eine Variable, die in diesen Ausdrücken nicht frei vorkommt. Entsprechendes gilt auch für alle künftigen Definitionen.

[273] Zu den *Theoremen* oder *Sätzen* gehören auch die *Lemmata* (Hilfssätze) und *Korollare* (Folgerungssätze).

Die obigen Definitionen geben offenbar die früher inhaltlich erklärten Begriffe korrekt wieder.[274] Sie führen zudem $\mathbb{D}, \mathbb{M}, \mathbb{U}$ als neue Namen und «ist Objekt», «ist Individuum» usw. als einstellige Funktoren der „entwickelten Sprache“ ein. Für spätere Zwecke[275] hält das folgende Metatheorem fest, was die neuen Begriffe in beliebigen Modellen $\mathbb{G}$ bedeuten:

5.9.2 Metatheorem Für Modelle $\mathbb{G}$ gilt:

Die «Objekte» des Modells $\mathbb{G}$ sind die Elemente und Teilklassen von $\mathbb{G}$: die $\mathbb{G}$-Objekte. (5.3)

Die «Elemente» eines $\mathbb{G}$-Objekts sind in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselben. (5.4)

«$\mathbb{D}$» bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ die Grundklasse $\mathbb{G}$. (5.5)

«$\emptyset$» bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ genau wie im Standardmodell $\mathbb{D}$ die leere Klasse. (5.6)

«$\{a, b, \ldots\}$» bezeichnet in beiden Modellen dasselbe, wenn $a, b, \ldots$ in $\mathbb{G}$ liegen.[276] (5.7)

Die «Individuen» in $\mathbb{G}$ sind die Elemente von $\mathbb{G}$: die $\mathbb{G}$-Individuen. (5.8)

Die «Klassen» in $\mathbb{G}$ sind die Teilklassen von $\mathbb{G}$: die $\mathbb{G}$-Klassen. (5.9)

Die «Unmengen» in $\mathbb{G}$ sind die Teilklassen von $\mathbb{G}$, die nicht Elemente von $\mathbb{G}$ sind. (5.10)

Die «Mengen» in $\mathbb{G}$ sind die Mengen, die Elemente von $\mathbb{G}$ sind. (5.11)

Die «Urelemente» in $\mathbb{G}$ sind die Urelemente, die Elemente von $\mathbb{G}$ sind. (5.12)

Beweis. Siehe Anhang S. 386–387. □

Eingeschränkte Operator-Ausdrücke. Die bisher eingeführten Allformeln $\bigwedge x\alpha$ («für alle x gilt α») wandelt man häufig ab, indem man sie „einschränkt“: z. B. sagt man «für alle *Klassen* x gilt α» oder «für alle *Individuen* x gilt α», oder, wenn C eine Klasse bezeichnet:

«für alle *Elemente* x *von* C gilt α», wofür man auch $\bigwedge\limits_{x \in C} \alpha$ schreibt.

Diese „eingeschränkten“ Allformeln lassen sich als Abkürzungen für gewöhnliche Allformeln definieren: Mit «für alle *Klassen* x gilt α» ist beispielsweise gemeint «für alle x gilt: *wenn* x Klasse ist, *dann* gilt α»; insbesondere bedeutet

$\bigwedge\limits_{x \in C} \alpha$ dasselbe wie $\bigwedge x(x \in C \to \alpha)$, d. h. «für alle x gilt: *wenn* $x \in C$, *dann* gilt α».

Ebenso benutzt man statt der unbeschränkten Existenzformeln $\bigvee x\alpha$ bzw. $\dot{\bigvee} x\alpha$ («es gibt ein bzw. genau ein x, so dass α gilt») eingeschränkte Formeln, z. B.

«es gibt ein bzw. genau ein *Element* x *von* C, so dass α», kurz $\bigvee\limits_{x \in C} \alpha$ bzw. $\dot{\bigvee}\limits_{x \in C} \alpha$.

---

274 *Definition 0* ist im Standardmodell eine korrekte Beschreibung für Objekte, weil x dort allgemeine Objektvariable ist. *Definition 1* beschreibt wegen Beispiel (1) und (2) S. 108 korrekt die Klassen $\mathbb{D}$, $\emptyset$ und $\{a, b, \ldots\}$. Da die Klasse $\mathbb{D}$ der Individuen korrekt beschrieben ist, beschreibt *Definition 2* korrekt die Individuen. *Definition 3* ist wegen Kriterium 5.8.4 eine korrekte Beschreibung für die Klassen. Nach der Beschreibung der Objekte in Abschnitt 5.4 und dem Ausschluss der externen Objekte (Erklärung 5.4.2 S. 88) sind Unmengen genau die Nichtindividuen; weil also die Individuen nach Definition 3 korrekt als Elemente von $\mathbb{D}$ beschreiben, sind die Unmengen die Nichtelemente von $\mathbb{D}$ und *Definition 4* ist korrekt. Aufgrund von Erklärung 5.2.2 S. 70 und 5.2.9 S. 76 ist jede Menge zugleich Individuum und Klasse. Umgekehrt muss eine Klasse (d. h. wegen 5.2.9 eine Menge oder Unmenge), die ein Individuum ist, eine Menge sein (weil Unmengen keine Individuen sind). Mithin sind Mengen durch *Definition 5* korrekt beschrieben. *Definition 6* ist die direkte Wiedergabe unserer Erklärung der Urelemente 5.4.2 S. 88 und *Definition 7* beschreibt wegen Beispiel (4) S. 108 korrekt die Klassen $\mathbb{M}$ und $\mathbb{U}$.

275 Nämlich für die Betrachtung der Universen am Ende von Anschnitt 5.29.

276 «a», «b», … sollen genau genommen Ausdrücke sein, die sowohl in $\mathbb{G}$ wie auch im Standardmodell dieselben Objekte bezeichnen, und zwar Elemente von $\mathbb{G}$. Zum Beispiel kann man für «a», «b», … Variablen nehmen, welche man in beiden Modellen als Bezeichnungen für Elemente von $\mathbb{G}$ interpretiert.

Auch diese eingeschränkten Formeln lassen sich als Abkürzungen für unbeschränkte Formeln definieren: «es gibt eine bzw. genau eine *Klasse* x, für die α gilt» steht für «es gibt ein bzw. genau ein x, so dass gilt: x ist Klasse *und* α»; insbesondere bedeutet

$\bigvee_{x\in C}\alpha$ dasselbe wie $\bigvee x(x \in C \wedge \alpha)$, d. h. «es gibt ein x, so dass $x \in C$ und α gilt» bzw.

$\dot{\bigvee}_{x\in C}\alpha$ dasselbe wie $\dot{\bigvee} x(x \in C \wedge \alpha)$, d. h. «es gibt genau ein x, so dass $x \in C$ und α gilt».

Bei den Formeln $\bigwedge_{x\in C}\alpha$ («für jedes Element von C gilt α») kann es vorkommen, dass C die leere Klasse ist. Es ist alltagssprachlich nicht ersichtlich, ob man dies als wahre oder falsche Aussage zu bewerten hat, da es gar kein Element von C gibt. Aufgrund der obigen Erklärung ist jedoch «für jedes Element von $\emptyset$ gilt α» zu verstehen im Sinne von «für jedes x gilt: *wenn* $x \in \emptyset$ gilt, *dann* gilt α». Nun haben wir aber den Funktor-Ausdruck «*wenn* $x \in \emptyset$ gilt, *dann* gilt α» als synonym mit «es ist nicht zugleich α wahr und β falsch» erklärt (3g S. 112), und dies ist sicher immer dann richtig, wenn α falsch ist. Weil also $x \in \emptyset$ für jedes x falsch ist, ist «*wenn* $x \in \emptyset$ gilt, *dann* gilt α» für jedes x wahr. Also ist «für jedes Element von $\emptyset$ gilt α» wahr. Wir halten dies als Lemma fest:

5.9.3 Leerklassen-Lemma *Die Formel* $\bigwedge_{x\in\emptyset}\alpha$ *oder ausführlich «Für jedes Element der leeren Klasse gilt* α*» ist für jeden geschlossenen Ausdruck* α *eine wahre Aussage.*

Bevor ich nun die drei bisher schon inhaltlich besprochenen Axiome[277] in eine formal verwertbare Form bringe, setze ich an den Anfang der formalen Theorie ein anderes Axiom, das „Rahmenaxiom", welches die wichtigsten objekttheoretischen Grundaussagen zusammenfasst:

5.9.4 Erstes Axiom der Mengenlehre: Rahmenaxiom

(1) $\bot$ *und* $\top$ *sind verschiedene Individuen,* $\underline{\bot}$ *ist Unmenge,* $\bot = \emptyset$, $\top = \{\emptyset\}$ *und* $\underline{\bot} = \mathbb{D}$.

(2) *Jede Unmenge ist eine Klasse.*

(3) *Wenn* $x \in y$ *gilt, so ist* x *ein Individuum und* y *eine Klasse.*[278]

Eine **Plausibilitätsbetrachtung** für das Rahmenaxiom ist nicht notwendig, denn seine Gültigkeit im Standardmodell ergibt sich unmittelbar aus den inhaltlichen Erklärungen der Begriffe.[279] Darüber hinaus lässt sich mittels Satz 5.9.2 sogar zeigen, dass das Rahmenaxiom *in allen Modellen gilt.* Zum Beweis siehe Anhang S. 387–388. □

Das Extensionalitätsaxiom könnte nun eigentlich schon so, wie wir es in 5.3.1 S. 80 formuliert haben, übernommen werden. Ich gebe ihm hier eine etwas formalere Fassung:

---

[277] Siehe 5.2.3 S. 73, 5.3.1 S. 80 und 5.3.2 S. 80.

[278] Da nach Definition 5.9.1(2) und (4) *Individuen* als Elemente von $\mathbb{D}$ und *Unmengen* als Nichtelemente von $\mathbb{D}$ charakterisiert sind, kann das Rahmenaxiom wie folgt in die logische Symbolsprache übertragen werden:

$$\Big(\emptyset = \bot \in \mathbb{D}\Big) \wedge \Big(\bot \neq \top = \{\emptyset\} \in \mathbb{D}\Big) \wedge \Big(\mathbb{D} = \underline{\bot} \notin \mathbb{D}\Big) \wedge$$
$$\Big(\bigwedge_U \big(U \notin \mathbb{D} \ \rightarrow\ U \text{ Klasse}\big)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{xy} \big(x \in y \ \rightarrow\ x \in \mathbb{D} \ \wedge\ y \text{ Klasse}\big)\Big).$$

In dieser voll symbolisierten Form zitiere ich die Axiome nur im Logikkapitel auf S. 375–376, während ich hier für Axiome (und Theoreme) eine alltagssprachliche Version vorziehe.

[279] Aus 5.8.1 S. 105 in Verbindung mit Festlegungen (2a) und (2b) S. 111 folgt, dass $\top = 0 = \emptyset$ und $\bot = 1 = \{\emptyset\}$. Nach 5.2.3 S. 73 ist die Klasse $\emptyset$ eine Menge, also ein Individuum, und somit ist nach 5.2.3 S. 73 auch die Klasse $\{\emptyset\}$ ein Individuum. Diese Klassen sind verschieden, da die eine ein Element hat, die andere nicht. $\underline{\bot}$ ist nach 5.4.3 S. 88 die Unmenge $\mathbb{D}$. Nach 5.2.9 S. 76 sind alle Unmengen Klassen, und gemäß der Definition 5.2.10 der Elementformel kann $x \in y$ nur dann wahr sein, wenn x ein Individuum und y eine Klasse ist.

5.9.5 Zweites Axiom der Mengenlehre: Extensionalitätsaxiom *Haben Klassen A und B dieselben Elemente, d. h. gilt $x \in A$ für jedes x genau dann, wenn $x \in B$, folgt $A = B$.*

Bemerkung. Dieses Axiom gilt ebenso wie das Rahmenaxiom *in allen Modellen*.[280] Zusammen mit dem Rahmenaxiom ergibt sich aus diesem Axiom sofort die folgende Verschärfung:

5.9.6 Korollar *Haben die Klassen A und B dieselben Individuen als Elemente, d. h. gilt $x \in A$ für jedes Individuum x genau dann, wenn $x \in B$, folgt $A = B$.*

Beweis. Wegen Axiom 5.9.4(3) können Nichtindividuen keine Elemente von Klassen sein; folglich haben Klassen mit denselben Individuen als Elementen schlechthin dieselben Elemente. Daher folgt dann aus Axiom 5.9.5 ihre Gleichheit. □ Das nun folgende Komprehensionsaxiom muss gegenüber seiner nicht-formalen Version 5.3.2 S. 80 wesentlich verändert werden:

5.9.7 Drittes Axiom der Mengenlehre: Komprehensionsaxiom Sei x eine Variable und $\varphi(x)$ ein nach Interpretation von x geschlossener Ausdruck. *Dann gibt es eine Klasse C, deren Elemente genau die Individuen a sind, für die $\varphi(a)$ gilt. Ein solches C ist $\{x \mid \varphi(x)\}$.* Kurz: *$\{x \mid \varphi(x)\}$ ist eine Klasse, und für Individuen a gilt $a \in \{x \mid \varphi(x)\}$ genau dann, wenn $\varphi(a)$.*

Bemerkung. Auch dieses Axiom gilt *in allen Modellen*.[281] Erst durch dieses Axiom ergibt sich formal, dass die Terme $\{x \mid \varphi(x)\}$ immer Klassen bezeichnen, so dass wir mit Blick auf die Definitionen 5.9.1 nun auch in der formalen Theorie $\mathbb{D}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{U}$ und $\emptyset$ und $\{a, b, \ldots\}$ als Klassen ansehen dürfen:

5.9.8 Korollar *$\mathbb{D}, \mathbb{M}, \mathbb{U}$ und $\emptyset$ und $\{a, b, \ldots\}$ sind Klassen.*

Das Komprehensionsaxiom gibt uns auch (in Verbindung mit 5.9.4(3), wonach keine Nichtindividuen als Elemente einer Klasse auftreten können) Aufschluss darüber, welches die Elemente der Klasse $\{x \mid \varphi(x)\}$ sind: es sind *genau* die Individuen a, für die $\varphi(a)$ gilt:

5.9.9 Korollar *Die Elemente von $\{x \mid \varphi(x)\}$ sind genau die Individuen a für die $\varphi(a)$ gilt.*

Auch das Komprehensionstheorem 5.3.3 S. 81 ersetzen wir nun durch eine formale Version:

5.9.10 Komprehensionstheorem für Klassen (formale Version) Sei x Variable und $\varphi(x)$ nach Interpretation von x geschlossen. Dann gilt: *$\{x \mid \varphi(x)\}$ ist die einzige Klasse mit der Eigenschaft, dass für Individuen a gilt: $a \in \{x \mid \varphi(x)\}$ gilt genau dann, wenn $\varphi(a)$.*

Beweis. Nach dem Komprehensionsaxiom ist $\{x \mid \varphi(x)\}$ eine solche Klasse. Ist A ebenfalls eine solche, so haben A und $\{x \mid \varphi(x)\}$ dieselben Individuen als Elemente, weshalb die beiden Klassen nach Korollar 5.9.6 S. 118 identisch sind. Also ist $\{x \mid \varphi(x)\}$ die einzige solche Klasse. □
Mit genau demselben Argument lässt sich auch Korollar 5.9.9 verschärfen zu:

---

[280] Im Modell $\mathbb{G}$ besagt es, dass verschiedene Klassen A und B (des Modells), welche von den Objekten (des Modells) genau dieselben als Elemente enthalten, gleich sind. Das ist richtig, denn solche A und B sind im Standardmodell (nach Satz 5.9 S. 116) Teilklassen von $\mathbb{G}$ und haben daher keine *außerhalb* von $\mathbb{G}$ gelegenen Elemente, während sie von den Elementen von $\mathbb{G}$ (die nach Satz 5.3 S. 116 zu den Objekten des Modells gehören), nach Voraussetzung genau dieselben Elemente haben. So haben sie schlechthin dieselben Elemente und sind deshalb nach dem im Standardmodell gültigen Extensionalitätsaxiom 5.3.1 S. 80 gleich.

[281] In einem Modell $\mathbb{G}$ bezeichnet $\{x \mid \varphi(x)\}$ die Klasse aller Elemente a von $\mathbb{G}$, für welche $\varphi(a)$ gilt, insbesondere ist dies eine Klasse, die höchstens Elemente von $\mathbb{G}$ enthält, also eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ und nach Satz 5.9 S. 116 eine Klasse (des Modells). Und wann immer a ein Individuum des Modells, d. h. nach 5.8 S. 116 ein Element von $\mathbb{G}$ ist, so ist a genau dann Element dieser Klasse, wenn $\varphi(a)$ gilt. – Übrigens gilt in jedem Modell $\mathbb{G}$ auch das *nicht-formale* Komprehensionsaxiom. Hierzu ist zu zeigen, dass es zu jeder Auswahl von $\mathbb{G}$-Individuen (Elementen von $\mathbb{G}$) mindestens eine $\mathbb{G}$-Klasse (Teilklasse von $\mathbb{G}$) gibt, die genau die ausgewählten $\mathbb{G}$-Individuen enthält. In der Tat folgt aus dem nicht-formalen Komprehensionsaxiom der allgemeinen Mengenlehre, dass es eine Klasse gibt, die diese $\mathbb{G}$-Individuen enthält, und diese ist, weil sie nur Elemente von $\mathbb{G}$ enthält, eine Teilklasse von $\mathbb{G}$.

5.9.11 Korollar $\{x \mid \varphi(x)\}$ *ist die einzige Klasse, deren Elemente die Individuen a sind, für die $\varphi(a)$ gilt.*

Beweis. Man erhält den Beweis, wenn man im Beweis des Komprehensionstheorems „Komprehensionsaxiom“ durch „Korollar 5.9.9“ ersetzt. □ Mittels dieses Korollars folgt nun ohne weiteres aus der Definition 5.9.1 der Klassen $\mathbb{D}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{U}$, $\emptyset$ und $\{a, b, \ldots\}$:

5.9.12 Korollar *Die Klasse $\mathbb{D}$ enthält genau die Individuen als Elemente, $\mathbb{M}$ genau die Mengen, $\mathbb{U}$ genau die Urelemente, $\emptyset$ gar keine Objekte und $\{a, b, \ldots\}$ die Individuen unter den Objekten $a, b, \ldots$ Jede dieser Klassen ist die einzige, welche die genannten Objekte enthält.*

Bemerkung. Somit nennt man $\mathbb{D}$ zu Recht „die“ Klasse aller Individuen, $\mathbb{M}$ „die“ Klasse aller Mengen, $\mathbb{U}$ „die“ Klasse aller Urelemente usw.

Das Axiom der Elementarmengen (5.2.3 S. 73) schließlich ersetzen wir durch die folgenden zwei Axiome und das nachfolgende Korollar.

5.9.13 Viertes Axiom der Mengenlehre: Nullmengenaxiom $\emptyset$ *ist eine Menge.*

Bemerkung. Genau genommen folgt dieses Axiom schon aus unserem Rahmenaxiom,[282] und *gilt somit wie dieses in allen Modellen.* Es verdient aber eigens herausgehoben zu werden.

5.9.14 Fünftes Axiom der Mengenlehre: Paarmengenaxiom *Für Individuen a und b ist $\{a, b\}$ eine Menge.*

Bemerkung. Im Standardmodell ist das Paarmengenaxiom durch die inhaltlichen Überlegungen zum Axiom der Elementarmengen (siehe 5.2.3 S. 73) plausibel gemacht worden. Das Paarmengenaxiom ist nun aber ein solches, das *nicht* mehr in allen Modellen gültig ist,[283] und dies trifft auch auf alle noch folgenden Axiome außer dem Auswahlaxiom zu. Während also alles bisher Gesagte in allen Modellen gilt, treffen wir durch die Aufstellung von Axiom 5.9.14 eine engere Auswahl unter den Modellen und statuieren alles weitere (beginnend mit dem folgenden Korollar) nur noch für diese Auswahl von Modellen (in denen das neue Axiom gilt). Entsprechendes gilt bei jedem neuen Axiom, das wir aufstellen.

Der im Axiom der Elementarmengen ausgesprochene Sachverhalt, dass für Individuen x auch die Einermenge $\{x\}$ eine Menge ist, braucht nun nicht mehr als Axiom aufgestellt zu werden, da sich dieser Sachverhalt aus 5.9.14 beweisen lässt:

5.9.15 Korollar *Für Individuen a ist $\{a\}$ eine Menge.*

Beweis. Wenn a ein Individuum ist, so ist es formal auch wahr, dass a und a Individuen sind, also ist nach Axiom 5.9.14 $\{a, a\}$ eine Menge. Diese aber ist mit $\{a\}$ identisch.[284] □

---

[282] Beweis: Das Rahmenaxiom enthält ja die Aussage, dass $\top$ ein Individuum und mit $\emptyset$ identisch ist. Mithin ist $\emptyset$ ein Individuum, zugleich aber nach Korollar 5.9.8 eine Klasse. So ist $\emptyset$ zugleich Klasse und Individuum, also nach Definition 5.9.1(5) eine Menge. □

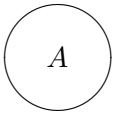
[283] Ein Gegenbeispiel ist die Grundklasse $\mathbb{G}_{\min}$, die als Elemente nur die beiden Mengen $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ hat. Diese sind (als Elemente von $\mathbb{G}_{\min}$) im Modell $\mathbb{G}_{\min}$ Individuen, doch $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ist die Klasse $\mathbb{G}_{\min}$ selbst, die im Modell $\mathbb{G}_{\min}$ nicht als Menge, sondern als die Unmenge $\ll\mathbb{D}\gg$ fungiert (vgl. Satz 5.5 S. 116 und Aussage (1) des Rahmenaxioms 5.9.4 S. 117).

[284] Nach Korollar 5.9.12 ist nämlich a das einzige Element sowohl von $\{a, a\}$ wie auch von $\{a\}$, also folgt nach dem Extensionalitätsaxiom, dass $\{a\}$ mit $\{a, a\}$ identisch ist.

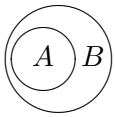
5.10 Die konstruktiven Mengenaxiome

Die hier zu behandelnden Axiome beschreiben, wie man aus gegebenen Mengen neue Mengen erhält. Da die üblichen in der Mathematik vorgenommenen Konstruktionen gemäß diesen Axiomen vorgenommen werden, ist sichergestellt, dass man nicht unversehens in den Bereich der Unmengen gerät. Für uns ist die Absicherung dieser Axiome auch deshalb von Bedeutung, weil damit zugleich sichergestellt ist, dass die von den Mengentheoretikern bereits im Bereich der Mengen konstruierten gewaltigen Unendlichkeiten tatsächlich als Possibilien existieren.

Zur Veranschaulichung von Klassen werden im Folgenden *Venn-Diagramme* verwendet, die 1880 von John Venn eingeführt wurden.[285] Ein Venn-Diagramm ist eine Fläche, zum Beispiel ein Kreis, den man als Veranschaulichung einer Klasse ansieht. Die Elemente dieser Klasse stellt man sich als in der Fläche liegende Punkte vor. Manchmal schreibt man den Namen der Klasse in oder neben den Kreis. Ein Venn-Diagramm einer Klasse A kann etwa so aussehen:



5.10.1 Definition A heißt *Teilklasse* von B, wenn A und B Klassen sind und jedes Element von A auch ein Element von B ist, wie es nebenstehendes Venn-Diagramm veranschaulicht. Wir schreiben dann $A \subseteq B$.[286]
Ist die Teilklasse A von B eine Menge, so heißt sie auch *Teilmenge* von B.



5.10.2 Theorem Für jede Klasse A gilt:

$A \subseteq A$ *(Jede Klasse ist Teilklasse von sich selbst).* (5.13)

$\emptyset \subseteq A$ *(Die leere Menge ist Teilmenge jeder Klasse).* (5.14)

Beweis. Zu (5.13). Jedes Element von A ist Element von A.
Zu (5.14). Jedes Element von $\emptyset$ ist Element von A, denn aufgrund des Leerklassen-Lemmas 5.9.3 ist eine Aussage der Form «für jedes Element der leeren Klasse gilt: ...» stets wahr. □

5.10.3 Definition

A heißt *Oberklasse* von B, wenn B eine Teilklasse von A ist,
A heißt *echte Teilklasse* von B, wenn A eine *von B verschiedene* Teilklasse von B ist,
A heißt *echte Oberklasse* von B, wenn A eine *von B verschiedene* Oberklasse von B ist.
$A \subset B$ steht für «A und B sind Klassen und A ist echte Teilklasse von B»,
$A \supseteq B$ steht für «A und B sind Klassen und A ist Oberklasse von B»,
$A \supset B$ steht für «A und B sind Klassen und A ist echte Oberklasse von B».[287]
Eine *Menge*, die echte Teilklasse bzw. Oberklasse bzw. echte Oberklasse einer Klasse ist, heißt auch *echte Teilmenge* bzw. *Obermenge* bzw. *echte Obermenge* dieser Klasse.

Nun lässt sich das folgende wichtige Kriterium für die Gleichheit von Klassen formulieren:

[285] Vgl. Venn, *Representations*. Venn hat die *Eulerschen Diagramme* der Propositionslogik weiterentwickelt.
[286] Formale Definition: $A \subseteq B \;:\Leftrightarrow\; A$ Klasse $\wedge$ B Klasse $\wedge \bigwedge_{x \in A} x \in B$.
[287] Formale Definitionen: $A \subset B \;:\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge A \neq B$, $\quad A \supseteq B \;:\Leftrightarrow\; B \subseteq A \quad A \supset B \;:\Leftrightarrow\; A \supseteq B \wedge A \neq B$.

5.10.4 Gleichheitssatz für Klassen Für Klasse A und B gilt:

(1a) *Sie sind identisch genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben,*
(1b) das heißt genau dann, *wenn der Wahrheitswert von $x \in A$ und $x \in B$ stets derselbe ist,*
(1c) das heißt genau dann, *wenn für beliebiges x stets $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ gilt.*
(1d) das heißt genau dann, *wenn aus $x \in A$ stets $x \in B$ folgt und aus $x \in B$ stets $x \in A$.*
(2) *Sie sind identisch genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt.*

Beweis. Wenn die Klassen identisch sind, muss alles, was für A gilt, auch für B gelten. Also haben A und B genau dieselben Elemente. Dass umgekehrt Klassen, wenn sie dieselben Elemente haben, identisch sind, ist die Aussage des Extensionalitätsaxioms (siehe 5.9.5 S. 118). Die Formulierungen (1a), (1b), (1c) und (1d) sind nur verschiedene gleichwertige Formulierungen, die ausdrücken, dass A und B dieselben Elemente haben. (2) aber drückt dies ebenfalls aus, was man unmittelbar durch den Vergleich mit (1d) erkennt.[288] □

Unser Teilprinzip (oben 5.2.7 S. 75) können wir nun zu einem entsprechenden Axiom umformulieren, welches das *Teilmengenaxiom* oder *Komprehensionsaxiom für Mengen* heißt:[289]

5.10.5 Sechstes Axiom der Mengenlehre: Teilmengenaxiom *Jede Teilklasse einer Menge ist eine Menge.*

Plausibilitätsbetrachtung. Dies folgt sofort aus dem Teilprinzip (5.2.7 S. 75). □

5.10.6 Korollar *Jede Oberklasse einer Unmenge ist eine Unmenge.*

Beweis. Sei B eine Oberklasse der Unmenge A. Dann ist A eine Teilklasse von B. Angenommen, B ist *keine* Unmenge, so ist B eine Menge und aus dem Teilmengenaxiom folgt, dass auch die Teilklasse A von B eine Menge ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch und B muss eine Unmenge sein. □

Die Unmengen Ru, $\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$

Wir können nun zeigen, dass und wie wir das Russellsche Paradoxon (siehe S. 82) überwunden haben. Zunächst definieren wir die Russellsche Klasse wie folgt

5.10.7 Definition Die *Russell-Klasse* Ru ist die Klasse, deren Elemente diejenigen Individuen sind, die nicht Element von sich selbst sind.[290]

Mittels eines späteren Axioms werden wir formal feststellen, dass $x \notin x$ stets wahr ist (siehe Korollar 5.19.8 S. 257). Daher enthält Ru *alle* Individuen schlechthin, so dass $\mathsf{Ru} = \mathbb{D}$ ist. Dieses Wissen brauchen wir für das Folgende aber nicht vorauszusetzen. Die Überlegungen Russells (siehe S. 82) zeigen in unserem System nicht, das die Klasse Ru nicht existiert (ihre Existenz ist vielmehr durch das Komprehensionsaxiom 5.9.7 S. 118 sichergestellt), sondern dass Ru keine Menge sein kann:

5.10.8 Ausweg aus dem Russellschen Paradoxon Ru *ist eine Unmenge.*

---

288 Wenn man in (2) die beiden „Teilklassenformeln“ $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ durch das ersetzt, wofür sie gemäß Definition 5.10.1 stehen, erhält man:

Jedes Element von A ist ein solches von B und jedes von B ein solches von A,

das heißt aus $x \in A$ muss $x \in B$ folgen und aus $x \in B$ wieder $x \in A$.

289 Zur Geschichte und den Hintergründen dieses Axioms siehe die Ausführungen nach dem Komprehensionsaxiom für Klassen (5.3.2 S. 80).

290 Formale Definition: $\mathsf{Ru} :\equiv \{x \mid x \notin x\}$.

Beweis. Aus der Definition von Ru ergibt sich für jedes *Individuum* a:

$a \in \mathsf{Ru}$ gilt genau dann, wenn $a \notin a$.

Wäre nun Ru ein *Individuum*, könnte Ru hier die Rolle von a einnehmen, d. h. es wäre $\mathsf{Ru} \in \mathsf{Ru}$ genau dann, wenn $\mathsf{Ru} \notin \mathsf{Ru}$, was absurd ist. So ist Ru *kein* Individuum und daher keine Menge. Andererseits ist Ru wegen 5.9.7 S. 118 aber eine Klasse, und somit insgesamt eine Unmenge.□

Wir müssen nun auch die schon durch das „Verfahren zur Konstruktion von Unmengen“ (5.2.5 S. 75) begründeten Sätze, dass es sich bei den Klassen $\mathbb{D}$ aller Individuen und $\mathbb{M}$ aller Mengen um Unmengen handelt, aus den Axiomen ableiten. Als Vorbereitung hierfür zeige ich, dass man zu jeder Menge M ein „Außenindividuum“ auswählen kann: ein Individuum, das kein Element von M ist. Hierzu definiere ich zunächst ein Objekt, welches ich «das Außenindividuum von M» nenne und beweise dann aus den Axiomen, dass es tatsächlich nicht in M liegt:

5.10.9 Definition Das *Außenindividuum* $\mathfrak{a}(M)$ einer Menge M sei die Klasse, welche diejenigen Individuen enthält, die (a) sich nicht selbst enthalten und (b) in M enthalten sind.[291]

Bemerkung. Setzen wir voraus, dass kein Objekt Element von sich selbst ist, so ist $\mathfrak{a}(M)$ dasselbe wie M, weil dann beide Klassen genau dieselben Elemente enthalten. Auch ist dann $M \notin M$ und somit $\mathfrak{a}(M)$ ein nicht in M enthaltenes Individuum. Doch lässt sich für den Satz, dass kein Objekt sich selbst enthält, aus den bisherigen Axiomen kein formaler Beweis erbringen. Somit müssen wir in der formalen Theorie noch offen lassen, ob $x \in x$ möglich ist oder nicht,[292] und können nur sagen, dass $\mathfrak{a}(M)$ eine (vielleicht echte) Teilklasse von M ist. Es lässt sich trotzdem formal zeigen, dass $\mathfrak{a}(M)$ nicht in M enthalten ist. Das folgende Lemma bereitet diesen Beweis vor:

5.10.10 Lemma *Für jede Menge M gilt $\mathfrak{a}(M) \notin \mathfrak{a}(M)$.*

Beweis. Alle x, die in $\mathfrak{a}(M)$ liegen, erfüllen nach Definition die beiden Bedingungen, dass

(1) $x \notin x$ und (2) $x \in M$

gilt. Für $\mathfrak{a}(M)$ in der Rolle von x würden diese Bedingungen also lauten: (1) $\mathfrak{a}(M) \notin \mathfrak{a}(M)$ und (2) $\mathfrak{a}(M) \in M$. Angenommen also, $\mathfrak{a}(M)$ liegt in $\mathfrak{a}(M)$, so ist einerseits $\mathfrak{a}(M) \in \mathfrak{a}(M)$ (nach Annahme), andererseits aber $\mathfrak{a}(M) \notin \mathfrak{a}(M)$, weil dies für $\mathfrak{a}(M)$ die Bedingung (1) für die Mitgliedschaft in $\mathfrak{a}(M)$ ist. So ergibt sich ein Widerspruch, und es muss die Annahme verworfen werden. □
Mit diesem Lemma lässt sich nun zeigen, dass $\mathfrak{a}(M)$ ein Außenindividuum von M ist:

5.10.11 Theorem *Für jede Menge M ist $\mathfrak{a}(M)$ ein nicht in M liegendes Individuum.*

Beweis. $\mathfrak{a}(M)$ ist nach Definition eine Klasse, die gewisse Elemente x von M (für die zusätzlich $x \notin x$ gilt) enthält. Es handelt es sich daher um eine Teilklasse der Menge M, also per Teilmengenaxiom um eine *Menge*, also um ein *Individuum*. So bleibt nur zu zeigen, dass $\mathfrak{a}(M) \notin M$ gilt. Angenommen, $\mathfrak{a}(M) \in M$ wäre wahr. Nun gilt aber nach Lemma 5.10.10 auch, dass $\mathfrak{a}(M) \notin \mathfrak{a}(M)$. Insgesamt wäre also richtig, dass $\mathfrak{a}(M) \notin \mathfrak{a}(M)$ und $\mathfrak{a}(M) \in M$. Damit würde aber $\mathfrak{a}(M)$ die beiden Bedingungen für das Elementsein in $\mathfrak{a}(M)$ erfüllen, somit wäre $\mathfrak{a}(M) \in \mathfrak{a}(M)$, im Widerspruch zu Lemma 5.10.10. Mithin muss die Annahme verworfen werden, und es folgt $\mathfrak{a}(M) \notin M$. □

[291] Formale Definition: $\mathfrak{a}(M) :\equiv \{x \mid x \notin x \ \wedge \ x \in M\}$.

[292] Die Unmöglichkeit von $x \in x$ werden wir erst später mit Hilfe des *Antizirkularitätsaxioms* sicherstellen (siehe Abschnitt 5.19 mit Korollar 5.19.8 S. 257).

Bemerkung. Später wird sich zeigen, dass es zu jeder Menge M nicht nur *ein* Außenindividuum, sondern «unendlich viele» gibt, und zwar sogar so viele, dass die Klasse dieser Individuen selbst eine Unmenge ist (siehe Korollar 5.15.13 S. 203 mit nachfolgender Bemerkung).

Mit Theorem 5.10.11 lässt sich nun streng beweisen, dass $\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$ keine Mengen sind:

5.10.12 Theorem *$\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$ sind Unmengen.*

Beweis. Angenommen $\mathbb{M}$ wäre eine Menge, so wäre einerseits $\mathfrak{a}(\mathbb{M})$ eine außerhalb von $\mathbb{M}$ liegende Menge (nach Theorem 5.10.11), andererseits aber müsste $\mathfrak{a}(\mathbb{M})$ (als Menge) in $\mathbb{M}$ liegen. Somit führt die Annahme zum Widerspruch und ist falsch. $\mathbb{M}$ ist also eine Unmenge. Als Oberklasse von $\mathbb{M}$ ist dann wegen Theorem 5.10.6 auch $\mathbb{D}$ eine Unmenge. □

Mengenklassen und Potenzklassen

5.10.13 Definition Eine *Mengenklasse* ist eine Teilklasse der Klasse $\mathbb{M}$ aller Mengen, oder anders gesagt: ein Klasse, deren sämtliche Elemente Mengen sind.[293]

Ist eine Mengenklasse selbst eine Menge, sprechen wir von einer *Mengenmenge*. Man nennt Mengenklassen auch *Mengensysteme* und Mengenmengen *konsistente Mengensysteme*.

Mengenklassen werden meist mit Frakturbuchstaben (wie $\mathfrak{M}$) bezeichnet, die in ihnen enthaltenen Mengen mit gewöhnlichen Großbuchstaben (wie M), und die Elemente dieser Mengen mit Kleinbuchstaben (wie m). Hiervon unterscheide man noch $\mathbb{M}$, die Klasse aller Mengen.

Beispiele. Wegen $\emptyset \subseteq \mathbb{M}$ ist die leere Menge $\emptyset$ eine Mengenklasse. Diese „kleinste“ Mengenklasse nennt man auch die *leeren Mengenklasse*. Wegen $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}$ ist auch die Klasse $\mathbb{M}$ aller Mengen eine Mengenklasse, nämlich offenbar „die größte“. Mengenklassen *enthalten* Mengen, müssen aber, wie das Beispiel $\mathbb{M}$ zeigt, keineswegs selbst Mengen *sein*. Eine spezielle Mengenklasse ist nun jeder Klasse C zugeordnet: die so genannte *Potenzklasse* von C.

5.10.14 Definition Für Klassen C bezeichnet

$\mathcal{P}(C)$ [Lesart: *Potenzklasse* von C]

die Klasse, deren Elemente die *Teilmengen* der Klasse C sind.[294]
Ist $\mathcal{P}(C)$ eine Menge, so heißt $\mathcal{P}(C)$ auch die *Potenzmenge* von C. Aber unabhängig davon, ob $\mathcal{P}(C)$ eine Menge oder eine Unmenge ist, sind die *Elemente* von $\mathcal{P}(C)$ bloß die Teil*mengen* von C.[295]

5.10.15 Theorem *Für jede Klasse C gilt:*

$\mathcal{P}(C)$ enthält mindestens ein Element, nämlich $\emptyset$. (5.15)

Ist C eine Menge, so ist *jede* Teilklasse von C ein Element von $\mathcal{P}(C)$. (5.16)

Ist C eine Menge, so ist C selbst ein Element von $\mathcal{P}(C)$. (5.17)

$\mathcal{P}(C)$ ist eine Mengenklasse. (5.18)

---

[293] Formal: $\mathfrak{M}$ (ist) Mengenklasse $:\Leftrightarrow \mathfrak{M} \subseteq \mathbb{M}$.

[294] Formal: $\mathcal{P}(C) :\equiv \{x \mid x \subseteq C\}$. In Worten ist $\{x \mid x \subseteq C\}$ die Klasse, deren Elemente alle *Individuen* x sind, für die gilt, dass x Teil*klasse* von C ist. Aber Individuen, die Klassen sind, sind nach Definition 5.9(5) Mengen. Daher enthält die besagte Klasse genau die Teil*mengen* von C.

[295] Unmengen können ja als Elemente einer Klasse niemals auftauchen. Siehe auch Fußnote 294.

Beweis. Zu (5.15). Nach 5.14 S. 120 ist $\emptyset$ Teilklasse von C und nach dem Nullmengenaxiom eine Menge, insgesamt also eine Teil*menge* von C, also ein Element von $\mathcal{P}(C)$.
Zu (5.16). Da C eine Menge ist, ist per Teilmengenaxiom jede Teilklasse von C eine Menge, also insgesamt eine Teil*menge* von C, also ein Element von $\mathcal{P}(C)$.
Zu (5.17). Nach 5.13 S. 120 ist C eine Teilmenge von C, also folgt die Behauptung aus (5.16).
Zu (5.18). $\mathcal{P}(C)$ enthält die Teilmengen von C, also nur Mengen. □
Eines der für die Unendlichkeitslehre wichtigsten Axiome ist das nun folgende:[296]

5.10.16 Siebtes Axiom der Mengenlehre: Potenzmengenaxiom *Ist A eine Menge, so ist auch die Potenzklasse $\mathcal{P}(A)$ eine Menge.*

Plausibilitätsbetrachtung. Da A eine Menge ist, gibt es eine Vorstellung, welche die Elemente von A beinhaltet. Ein Betrachter, der die *ganze* Gesamtheit dieser Elemente vor Augen hat, hat eben dadurch auch alle *Teil*gesamtheiten dieser Elemente vor Augen, d. h. er überblickt nicht nur die Elemente, sondern auch die Teilklassen von A. Dies geschieht indirekt bereits im Überblick über die Elemente, und wird beim Aufmerken auf diese Tatsache zum expliziten Gegenstand der Betrachtung. So ist ein Erkenntnisakt möglich, dessen Abstraktion $\mathcal{P}(A)$ ist. Also ist $\mathcal{P}(A)$ eine Menge. □

Mit dem Potenzmengenaxiom ist gesichert, dass man von einer Menge immer zu einer „größeren“ Menge übergehen kann, denn $\mathcal{P}(A)$ ist offenbar stets „größer“ als A:

- Entweder ist A nichtleer. Dann enthält $\mathcal{P}(A)$ für jedes Element a von A die einelementige Teilmenge $\{a\}$, so dass es allein von diesen *einelementigen Teilmengen* „ebenso viele“ gibt wie A Elemente hat, und es kommt mindestens noch die leere Menge hinzu.
- Oder A ist die leere Menge $\emptyset$. Da $\emptyset$ Teilmenge von sich selbst ist, ist dann aber $\mathcal{P}(A)$ identisch mit der *einelementigen* Menge $\{\emptyset\}$, ist also auch jetzt „größer“ als A.

So steht jede Menge A am Anfang einer „unendlichen Reihe“ immer „größer“ werdender Mengen: A, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$ usw. Dass $\mathcal{P}(A)$ *auch bei unendlichen Mengen* „größer“ ist als A, ist der wesentliche Gedanke des philosophisch hochbedeutsamen so genannten „Satzes von Cantor“, auf den ich später zurückkommen werde (Satz 5.20.19 S. 262).

Vereinigung von Klassen

Bei der Vereinigung von Klassen werden anschaulich ihre Elemente „zusammengetan“:

5.10.17 Definition Für Klassen A, B bezeichnet

$A \cup B$ [Lesart: Vereinigung(sklasse) von A und B]

die Klasse, deren Elemente die Individuen sind, die in mindestens einer der beiden Klassen A oder B liegen.[297] Ist $A \cup B$ eine Menge, so heißt $A \cup B$ auch die Vereinigungs*menge* von A und B.

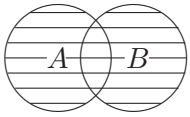


Abbildung 5.5: Vereinigungsklasse von A und B (schraffiert)

[296] Vgl. Zermelo, *Grundlagen der Mengenlehre* S. 265, Axiom VI.
[297] Formal: $A \cup B :\equiv \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

5.10.18 Definition Für Mengenklassen $\mathfrak{M}$ bezeichnet

$\bigcup \mathfrak{M}$ [Lesart: Vereinigung(sklasse) über $\mathfrak{M}$]

die Klasse, deren Elemente die Individuen sind, die in *mindestens einer* Menge M der Mengenklasse $\mathfrak{M}$ liegen.[298] Ist $\bigcup \mathfrak{M}$ eine Menge, so heißt $\bigcup \mathfrak{M}$ auch die Vereinigungs*menge* über $\mathfrak{M}$.
Für Vereinigungsmengenbildung gibt es wieder ein Axiom: das *Vereinigungsmengenaxiom.*[299]

5.10.19 Achtes Axiom der Mengenlehre: Vereinigungsmengenaxiom *Ist $\mathfrak{M}$ eine Mengenmenge, so ist $\bigcup \mathfrak{M}$ eine Menge.*

Plausibilitätsbetrachtung. Da $\mathfrak{M}$ eine Menge ist, kann man sich die Elemente von $\mathfrak{M}$ zugleich vorstellen. Jedes solche Element M ist aber eine Menge, und bei der Vorstellung einer Menge muss man sich wenigstens indirekt auch ihre Elemente vorstellen. Somit ist in der Vorstellung, deren direkte Inhalte die Elemente von $\mathfrak{M}$ sind, indirekt auch die Vorstellung der Elemente der Elemente von $\mathfrak{M}$ enthalten. Durch Aufmerken auf diese Tatsache kann man sich daher die Elemente der Elemente von $\mathfrak{M}$ zum direkten Inhalt der Vorstellung machen. Und so ist ein Erkenntnisakt möglich, dessen Abstraktion $\bigcup \mathfrak{M}$ ist. Also ist $\bigcup \mathfrak{M}$ eine Menge. □

Das folgende Korollar wird manchmal ebenfalls als ein Vereinigungsmengenaxiom angeführt, und zwar wird es dann als „kleines“ Vereinigungsmengenaxiom bezeichnet. Es ist aber jedenfalls kein Axiom, sondern kann mit den vorhergehenden Axiomen bewiesen werden.

5.10.20 Korollar *Sind A und B Mengen, so ist $A \cup B$ wieder eine Menge.*

Beweis. Da A und B Mengen (also Individuen) sind, ist nach dem Paarmengenaxiom (5.9.14 S. 119) $\{A, B\}$ eine Menge, und zwar ist dies eine Mengenmenge. Per Vereinigungsmengenaxiom ist also auch $\bigcup \{A, B\}$ eine Menge. Deren Elemente aber sind die Elemente von A und von B, also diejenigen von $A \cup B$. Also ist $A \cup B$ mit der Menge $\bigcup \{A, B\}$ identisch. □

Schnitt von Klassen

Der Schnitt von Klassen ist die Klasse ihrer gemeinsamen Elemente. Die Bezeichnung „Schnitt“ kommt aus der Geometrie, wo man von „sich schneidenden“ Linien, Flächen usw. spricht, wenn diese einen gemeinsamen Punkt haben. Unsere Definition des Schnitts wird es auch erlauben, die – nicht vorhandenen – Klassen der „leeren Mengenklasse“ zum Schnitt zu bringen, wobei wir als Ergebnis die Klasse $\mathbb{D}$ aller Individuen erhalten (siehe Bemerkung nach Definition 5.10.22). Abgesehen von diesem Ausnahmefall ist die Schnittklasse immer eine Teilklasse aller zum Schnitt gebrachten Klassen.

5.10.21 Definition Für Klassen A, B bezeichnet

$A \cap B$ [Lesart: Schnitt(klasse) von A und B]

die Klasse, deren Elemente die Individuen sind, die zugleich in A und in B liegen.[300] Ist $A \cap B$ eine Menge, so heißt $A \cap B$ auch die Schnitt*menge* von A und B.

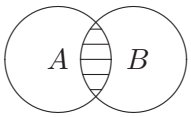


Abbildung 5.6: Schnittklasse von A und B (schraffiert)

[298] Formal: $\bigcup \mathfrak{M} :\equiv \{x \mid \bigvee_{M \in \mathfrak{M}} x \in M\}$.
[299] Vgl. Zermelo, *Grundlagen der Mengenlehre* S. 265, Axiom V.
[300] Formal: $A \cap B :\equiv \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.

Beispiel. In Definition 5.10.9 hatten wir das „Außenindividuum“ $\mathfrak{a}(M)$ einer Menge M definiert als die Klasse $\{x \mid x \notin x \ \wedge \ x \in M\}$. Da $x \notin x$ bedeutet, dass $x \in \mathsf{Ru}$, also x in der Russell-Klasse liegt, ist $\mathfrak{a}(M)$ die Schnittklasse $\mathsf{Ru} \cap M$.

5.10.22 Definition Für Mengenklassen $\mathfrak{M}$ bezeichnet

$\bigcap \mathfrak{M}$ [Lesart: Schnitt(klasse) über $\mathfrak{M}$]

die Klasse, deren Elemente die Individuen sind, die in allen Mengen M der Mengenklasse $\mathfrak{M}$ zugleich liegen.[301] Ist $\bigcap \mathfrak{M}$ eine Menge, so heißt $\bigcap \mathfrak{M}$ auch die Schnitt*menge* über $\mathfrak{M}$.

Bemerkung. Im Fall $\mathfrak{M} = \emptyset$ liegen in $\bigcap \mathfrak{M}$ alle Individuen schlechthin: Denn nach dem Leerklassen-Lemma 5.9.3 S. 117 gelten alle Aussagen der Form ≪für alle Elemente von $\emptyset$ gilt ...≫ (formal: $\bigwedge_{M \in \emptyset} \ldots$). Insbesondere ist für jedes Individuum x wahr, dass für alle Elemente von $\emptyset$ gilt, dass sie x enthalten (formal: $\bigwedge_{M \in \emptyset} x \in M$), so dass $x \in \bigcap \emptyset$ zu bejahen ist. Aus diesem Grund ist $\bigcap \emptyset = \mathbb{D}$.

Als ein dem „Vereinigungsmengenaxiom“ analoges „Schnittmengenaxiom“ kann der folgende Satz angesehen werden. Er ist aber kein Axiom, sondern folgt aus dem Teilmengenaxiom.

5.10.23 Konsistenzsatz für Schnittmengen

Ist A oder B oder beides eine Menge, so ist auch $A \cap B$ eine Menge. (5.19)

Ist $\mathfrak{M}$ eine nichtleere Mengenklasse, so ist auch $\bigcap \mathfrak{M}$ eine Menge. (5.20)

Beweis. (5.19) folgt aus dem Teilmengenaxiom (Satz 5.10.5), denn $A \cap B$ ist Teilklasse von A und auch von B. (5.20) folgt ebenfalls aus dem Teilmengenaxiom, denn $\bigcap \mathfrak{M}$ ist Teilklasse einer jeden Menge M, die Element von $\mathfrak{M}$ ist (und da $\mathfrak{M}$ nichtleer ist, gibt es ein solches M). □

Differenz von Klassen

5.10.24 Definition Für Klassen A und B bezeichnet

$A \setminus B$ [Lesart: Differenz(klasse) von A und B]

die Klasse, deren Elemente die Individuen sind, die in A, aber nicht in B liegen.[302] Ist $A \setminus B$ eine Menge, so heißt $A \setminus B$ auch die Differenz*menge* A und B.

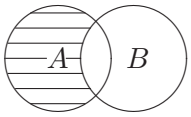


Abbildung 5.7: Differenzklasse von A und B (schraffiert)

5.10.25 Konsistenzsatz für Differenzklassen *Ist A eine Menge, so auch $A \setminus B$.*

Beweis. $A \setminus B$ ist eine Teilklasse der Menge A, und so folgt die Behauptung aus dem Teilmengenaxiom (Satz 5.10.5). □ Für spätere Zwecke beweise ich hier noch zwei einfache Sachverhalte:[303]

[301] Formal: $\bigcap \mathfrak{M} :\equiv \{x \mid \bigwedge_{M \in \mathfrak{M}} x \in M\}$.

[302] Formal: $A \setminus B :\equiv \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.

[303] Diese werden im Beweis des Bernsteinschen Theorems (5.15.5 S. 201) benötigt.

5.10.26 Theorem

Sei $A \subseteq B$. Dann gilt für jede Klasse C, dass $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$. (5.21)

Sei $A \subseteq B$. Dann ist $B \setminus (B \setminus A)$ identisch mit A. (5.22)

Beweis von (5.21). Die Elemente von $C \setminus B$, also diejenigen Elemente von C, die *nicht* in B liegen, können wegen der Voraussetzung $A \subseteq B$ erst recht *nicht* in A liegen; sie liegen daher alle in $C \setminus A$. Somit ist $C \setminus B$ Teilklasse von $C \setminus A$.

Beweis von (5.22). Nach dem Gleichheitssatz für Klassen (5.10.4 S. 121) ist zu zeigen: (1) Jedes x aus $B \setminus (B \setminus A)$ liegt in A und (2) jedes x aus A liegt in $B \setminus (B \setminus A)$.

Zu (1). Liege x in $B \setminus (B \setminus A)$, das heißt nach Definition der Differenzklasse:

(a) x liegt in B und (b) x liegt *nicht* in $B \setminus A$.

Sei nun ANGENOMMEN, dass x *nicht* in A liegt. Da x wegen (a) zugleich in B liegt, liegt x dann insgesamt in $B \setminus A$. Aber wegen (b) gilt das Gegenteil! Die ANNAHME führt also zum Widerspruch und muss verworfen werden. Daher liegt x in A.

Zu (2). Sei jetzt vorausgesetzt, dass x in A liegt. Da $A \subseteq B$ gilt, liegt x dann auch in B. Außerdem kann x nun *nicht* in $B \setminus A$ liegen: die Mitgliedschaft in $B \setminus A$ würde ja bedeuten, dass x *nicht* in A liegt, im Widerspruch zur jetzigen Voraussetzung. Insgesamt liegt also jetzt x in B, aber *nicht* in $B \setminus A$, und daher in $B \setminus (B \setminus A)$. □

Komplement einer Klasse

5.10.27 Definition Für Klassen A bezeichnet

$\complement A$ [Lesart: Komplement von A]

die Klasse, deren Elemente die Individuen sind, die nicht in A liegen.[304]

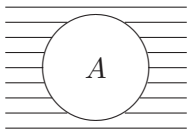


Abbildung 5.8: Komplement von A (schraffiert)

Das Komplement von A ist natürlich nichts anderes als die Differenzklasse $\mathbb{D} \setminus A$.

5.10.28 Konsistenzsatz für Komplemente *Ist A eine Menge, so ist $\complement A$ eine* Un*menge.*

Beweis. ANGENOMMEN, $\complement A$ wäre eine Menge, so wären $\complement A$ und A beides Mengen, und nach dem Vereinigungsmengenaxiom 5.10.19 müsste dann auch die Vereinigungsklasse von $\complement A$ und A eine Menge sein. Diese Vereinigungsklasse aber ist offenbar die Klasse $\mathbb{D}$ aller Individuen, welche eine Unmenge ist (Theorem 5.10.12 S. 123). Dieser Widerspruch zeigt, dass die ANNAHME falsch sein muss. Also ist $\complement A$ keine Menge, mithin eine Unmenge. □

[304] Formal: $\complement A :\equiv \{x \mid x \notin A\}$.

Paare und Kreuzprodukte

Für Individuen a und b soll nun ein Individuum festgelegt werden, welches

≪das Individuenpaar mit a als erster (oder 1-ter) und b als zweiter (oder 2-ter) Komponente≫

heißen und mit $\langle x, y\rangle$ bezeichnet werden soll.[305] Wie die Menge $\{a, b\}$, so soll das Individuenpaar $\langle a, b\rangle$ eine Denkform sein, welche die Individuen a und b beinhaltet, wobei es jedoch bei $\langle a, b\rangle$ auf die *Reihenfolge* ankommen soll, d. h. im Falle $a \neq b$ soll $\langle a, b\rangle$ von $\langle b, a\rangle$ verschieden sein, wohingegen $\{a, b\} = \{b, a\}$ ist. Manche sprechen daher auch von einem „geordneten" Paar, dem die Menge $\{a, b\}$ als „ungeordnetes" Paar gegenübersteht.

Es läge vielleicht nahe, $\langle a, b\rangle$ als die Denkform einzuführen, die a und b in einer *zeitlichen Reihenfolge* beinhaltet, indem *zuerst nur* a gedacht wird und *erst dann* b *hinzutritt*. So definiert, wäre $\langle a, b\rangle$ eine Nicht-Menge und damit ein abstraktes Objekt ganz neuer Art. Es gibt jedoch einen 1921 von Kuratowski vorgeschlagenen Trick,[306] durch den die Einführung solcher Nicht-Mengen überflüssig wird, indem man die zeitliche Reihenfolge durch raffiniert gebaute gewöhnliche Mengen gleichsam „simuliert". Nach Kuratowski definiert man:

5.10.29 Definition Für Individuen a und b sei

$\langle a, b\rangle_{\imath\imath}$ [Lesart: Individuenpaar mit a als erster und b als zweiter Komponente]

die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.[307]

Bemerkung. Hier wurde also der Ausdruck $\langle a, b\rangle_{\imath\imath}$ und nicht $\langle a, b\rangle$ eingeführt. Dadurch sollen die Individuenpaare von den als Nächstes zu definierenden Paaren $\langle a, b\rangle_{\imath\mathtt{u}}$, $\langle a, b\rangle_{\mathtt{u}\imath}$ und $\langle a, b\rangle_{\mathtt{uu}}$ abgehoben werden.[308] In der allgemeinen Paardefinition 5.10.32 werden wir $\langle a, b\rangle$ ohne Index so definieren, dass *wenn* a, b *Individuen sind,* $\langle a, b\rangle$ *mit* $\langle a, b\rangle_{\imath\imath}$ *übereinstimmt*. Solange in unserer Betrachtung a und b Individuen sind, benutze ich darum schon jetzt die Bezeichnung $\langle a, b\rangle$.

Das Individuenpaar $\langle a, b\rangle$ ist also nach Definition die Klasse mit den Elementen $\{a\}$ und $\{a, b\}$. Nach dem Paarmengenaxiom 5.9.14 S. 119 und seinem Korollar 5.9.15 sind diese Elemente *Mengen*, insbesondere *Individuen*; daher ist auch das Individuenpaar selbst nach dem Paarmengenaxiom eine *Menge*, und somit, wie wir gewünscht haben, ein *Individuum*. Zur genaueren Analyse von $\langle a, b\rangle$ unterscheiden wir nun die beiden Fälle $a \neq b$ und $a = b$:

- Falls $a \neq b$, sind die Elemente $\{a\}$ und $\{a, b\}$ voneinander verschieden, da Ersteres eine Einermenge, Letzteres aber eine Zweiermenge ist. Folglich ist dann auch das Paar *zweielementig*, und es simuliert eine „Reihenfolge", in der a zu b „hinzukommt": Das Element $\{a\}$ steht für den Anfangszustand, in dem allein a vorhanden war, und möge darum die *Anfangsmenge* des Paares genannt werden. Das Element $\{a, b\}$ aber steht für den Zustand, in dem b zu a hinzugekommen ist und möge darum die *Endmenge* des Paares genannt werden.

  Nun ist leicht zu sehen, warum die Paare $\langle a, b\rangle$ und $\langle b, a\rangle$ verschieden sind: Sie haben zwar dieselbe Endmenge $\{a, b\}$, aber verschiedene Anfangsmengen $\{a\}$ und $\{b\}$.

---

305 In der Mathematik schreibt statt dessen meist (a, b) mit runden Klammern. Aber da runde Klammern zugleich andere Funktionen haben, indem sie etwa zur Bezeichnung offener Intervalle oder als Argumentklammern für Funktionswertterme dienen, erscheint die Verwendung der eckigen Klammern als „Paarklammern" sinnvoll. Diese Schreibweise wurde anscheinend von Bernays eingeführt, der sie 1937 in seiner *Axiomatic Set Theory* benutzte (Bernays, *Axiomatic set theory* Teil 1 S. 68).

306 Vgl. Kuratowski, *Ordre* S. 171.

307 Formal: $\langle a, b\rangle_{\imath\imath} :\equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$. p (ist) *Individuenpaar* $:\Leftrightarrow \bigvee xy(p = \langle x, y\rangle_{\imath\imath})$.

308 Vgl. Definition 5.10.32 und Fußnote 311.

- Falls $a = b$, ist $\langle a, b\rangle$ nach Definition identisch mit $\{\{a\}, \{a, a\}\}$. Die „beiden“ Elemente $\{a\}$ und $\{a, a\}$ sind jedoch nun identisch, so dass wir für $\{\{a\}, \{a, a\}\}$ einfacher $\{\{a\}\}$ schreiben können. Wegen $a = b$ darf man für Letzteres natürlich auch $\{\{b\}\}$ schreiben. Jedenfalls ist $\langle a, b\rangle$ jetzt *einelementig.* – Wir können diese Betrachtungen so zusammenfassen:

5.10.30 Theorem Für Individuen a und b ist $\langle a, b\rangle$ ein Individuum und es gilt:

Im Fall $a = b$ ist $\langle a, b\rangle$ eine einelementige Menge, und es gilt $\langle a, b\rangle = \{\{a\}\} = \{\{b\}\}$. (5.23)

Im Fall $a \neq b$ ist $\langle a, b\rangle$ eine zweielementige Menge, die von $\langle b, a\rangle$ verschieden ist. (5.24)

Wenn ein Individuenpaar $\langle a, b\rangle$ vorliegt, möchte man a als ≪die≫ erste Komponente und b als ≪die≫ zweite Komponente des Paares bezeichnen. Hierzu muss sichergestellt sein, dass es nicht zu einem Individuenpaar p verschiedene Individuen x, y, a, b gibt, so dass sowohl $p = \langle x, y\rangle$ wie auch $p = \langle a, b\rangle$ gilt; sonst wären a und x zwei ≪erste≫ und b und y zwei ≪zweite≫ Komponenten von p. Dass derartiges nicht möglich ist, besagt der folgende Satz:

5.10.31 Eindeutigkeitssatz für Individuenpaare Für Individuen x, y, a, b gilt:
Falls $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$, so ist $x = a$ und $y = b$.

Beweis. Siehe Anhang S. 388. □ Somit können wir jetzt a als ≪die≫ erste und b als ≪die≫ zweite Komponente des Individuenpaares $\langle a, b\rangle$ bezeichnen. Bislang haben wir Paare $\langle a, b\rangle$ allerdings nur für *Individuen* a, b eingeführt; nun wollen wir für a und b beliebige Objekte, also auch Unmengen zulassen. In der *erweiterten Theorie* könnten wir gemäß Erklärung 5.7.7 S. 102 unsere Definition, wonach $\langle a, b\rangle$ dasselbe wie $\{a, \{a, b\}\}$ sein soll, problemlos auch auf *beliebige* Objekte a, b anwenden. In der elementaren Theorie aber führt dies nicht weiter, denn wegen Erklärung 5.3.4 S. 81 wäre im Fall, dass a und b Unmengen sind, $\{a\} = \emptyset$ und $\{a, b\} = \emptyset$, also $\langle a, b\rangle = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$.[309] Wir müssen uns also im Fall, dass mindestens eines der beiden Objekte, a oder b, eine Unmenge ist, etwas anderes einfallen lassen.[310] Naheliegend ist nun die folgende Definition:

5.10.32 Definition

(1) Sind a und b Individuen, so sei $\langle a, b\rangle$ mit $\langle a, b\rangle_u$ identisch.

(2) Sind A und B Unmengen, so sei $\langle A, B\rangle$ die Klasse, deren Elemente die Individuenpaare mit erster Komponente aus A und zweiter Komponente aus B sind, d. h. die Klasse $\{x \mid \bigvee_{ab}(a \in A \ \wedge \ b \in B \ \wedge \ x = \langle a, b\rangle_u)\}$.

(3) Ist A eine Unmenge und b ein Individuum, so sei $\langle A, b\rangle$ die Klasse, deren Elemente die Individuenpaare mit erster Komponente aus A und zweiter Komponente b sind, d. h. die Klasse $\{x \mid \bigvee_{a}(a \in A \ \wedge \ x = \langle a, b\rangle_u)\}$.

(4) Ist a ein Individuum und B eine Unmenge, so sei $\langle a, B\rangle$ die Klasse, deren Elemente die Individuenpaare mit erster Komponente a und zweiter Komponente aus B sind, d. h. die Klasse $\{x \mid \bigvee_{b}(b \in B \ \wedge \ x = \langle a, b\rangle_u)\}$.

---

309 Also wäre dann für *beliebige* Unmengen a, b das Paar $\langle a, b\rangle$ immer dasselbe Objekt, nämlich $\{\emptyset\}$. Dann wäre aber $\{\emptyset\}$ ein Paar, dass nicht nur *eine* erste und *eine* zweite Komponente hätte, sondern *jede Unmenge* wäre sowohl seine erste als auch seine zweite Komponente, im Widerspruch zum Eindeutigkeitssatz 5.10.31.

310 Einen Überblick über die Vorschläge verschiedener früherer Autoren (Schmidt, Kühnrich, Quine, Oberschelp/Todt) zur Definition geordneter Paare, die als Komponenten beliebige Klassen haben können, findet man bei Glubrecht et al., *Klassenlogik* S. 202-204. Die Definition, die ich in diesem Kapitel vorstelle (und die der Einheitlichkeit wegen auch für die erweiterte Theorie gelten soll), ergibt sich aus einer Anwendung der allgemeineren in Glubrecht et al., *Klassenlogik* S. 205 Nr. 20.11 angegebenen Definition auf den klassentheoretischen Rahmen, mit dem ich hier arbeite.

Paare schlechthin seien nun die Objekte $\langle x, y\rangle$ für *beliebige* x, y. Die gemäß (2), (3) und (4) definierten Paare bezeichne ich auch mit $\langle x, y\rangle_{\mathtt{uu}}$ bzw. $\langle x, y\rangle_{\mathtt{u}\imath}$ bzw. $\langle x, y\rangle_{\imath\mathtt{u}}$ und spreche von uu– bzw. u$\imath$– bzw. $\imath$u-*Paaren*.[311] Nun lässt sich der Eindeutigkeitssatz 5.10.31 verallgemeinern:

5.10.33 Eindeutigkeitssatz für Paare Für Objekte x, y, a, b gilt:
Falls $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$, *so ist* $x = a$ *und* $y = b$.

Beweis. Siehe Anhang S. 388–389. □ Nun definieren wir die Komponenten eines Paares:

5.10.34 Definition Für Paare p und Objekte a, b definieren wir:

a (ist) erste (oder 1-te) (Paar-)Komponente von p $:\Leftrightarrow$ es gibt ein y, so dass $p = \langle a, y\rangle$.
b (ist) zweite (oder 2-te) (Paar-)Komponente von p $:\Leftrightarrow$ es gibt ein x, so dass $p = \langle x, b\rangle$.

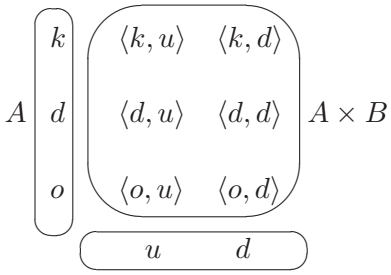
Wegen des Eindeutigkeitsatzes hat jedes Paar nicht mehr als *eine* erste und nicht mehr als *eine* zweite (Paar-)Komponente. Wir sprechen daher von «der» entsprechenden Komponente.

5.10.35 Definition Für Klassen A und B bezeichnet

$A \times B$ [Lesart: Kreuzprodukt von A und B]

die Klasse, deren Elemente die Individuenpaare sind, deren erste Komponente ein Element von A und deren zweite ein Element von B ist.[312]

Ist $A = \{k, d, o\}$ und $B = \{u, d\}$, so ist $A \times B = \{\langle k, u\rangle, \langle k, d\rangle, \langle d, u\rangle, \langle d, d\rangle, \langle o, u\rangle, \langle u, d\rangle\}$, und man kann A, B und $A \times B$ wie folgt veranschaulichen:



Oder:

k	$\langle k, u\rangle$	$\langle k, d\rangle$
d	$\langle d, u\rangle$	$\langle d, d\rangle$
o	$\langle o, u\rangle$	$\langle o, d\rangle$
	u	d

Abbildung 5.9: Das Kreuzprodukt von A und B

Hier werden die Elemente von A in der linken Spalte aufgelistet und als Bezeichnungen der Zeilen verwendet, während die Elemente von B die unterste Zeile bilden und als Bezeichnungen der Spalten dienen. Jedes Element $\langle x, y\rangle$ von $A \times B$ aber befindet sich dort, wo Zeile x und Spalte y sich kreuzen.

---

311 Formal ist die Definition 5.10.29 der Individuenpaare durch folgende Reihe von Definitionen zu ergänzen:

$$\langle A, B\rangle_{\mathtt{uu}} :\equiv \{x \mid \bigvee_{ab}(a \in A \ \wedge\ b \in B \ \wedge\ x = \langle a, b\rangle_{\imath\imath})\},$$
$$\langle A, b\rangle_{ui} :\equiv \{x \mid \bigvee_{a}(a \in A \ \wedge\ x = \langle a, b\rangle_{\imath\imath})\},$$
$$\langle a, B\rangle_{iu} :\equiv \{x \mid \bigvee_{b}(b \in B \ \wedge\ x = \langle a, b\rangle_{\imath\imath})\},$$
$$\langle x, y\rangle :\equiv \imath\, p\, \big((x \in \mathbb{D} \ \wedge\ y \in \mathbb{D} \ \wedge\ p = \langle x, y\rangle_{\imath\imath}) \ \vee\ (x \notin \mathbb{D} \ \wedge\ y \notin \mathbb{D} \ \wedge\ p = \langle x, y\rangle_{\mathtt{uu}}) \ \vee\ (x \notin \mathbb{D} \ \wedge\ y \in \mathbb{D} \ \wedge\ p = \langle x, y\rangle_{\mathtt{u}\imath}) \ \vee\ (x \in \mathbb{D} \ \wedge\ y \notin \mathbb{D} \ \wedge\ p = \langle x, y\rangle_{\imath\mathtt{u}})\big),$$
$$p \text{ (ist) Paar} :\Leftrightarrow \bigvee_{xy}(p = \langle x, y\rangle)$$

312 Formal: $A \times B :\equiv \{p \mid \bigvee_{x \in A}\bigvee_{y \in B}(p = \langle x, y\rangle)\}$. Man beachte, dass *alle* $\langle x, y\rangle$ mit $x \in A$ und $y \in B$ Individuenpaare sind (da x und y Elemente einer Klasse und daher Individuen sind), also nach Theorem 5.10.30 S. 129 Mengen, und somit auch selbst Individuen. Also liegen in $A \times B$ *alle* $\langle a, b\rangle$ mit a aus A und b aus B.

Hinweis. Es gibt für Kreuzprodukte von Mengen einen „Konsistenzsatz“ analog zum Konsistenzsatz für Vereinigungs– und Schnittmengen: *Falls A und B Mengen sind, ist auch $A \times B$ eine Menge.* Dieser Satz kann aber erst nach Einführung des Ersetzungsaxioms bewiesen werden und wird daher erst später aufgestellt (siehe Theorem 5.10.58 S. 142).

Relationen

Nach Vorarbeiten von Augustus De Morgan (1806–1871) wurde die moderne Relationentheorie von Charles Sanders Peirce (1841–1914) und Ernst Schröder (1839–1914) entwickelt, wonach eine Relation als eine „Klasse von Paaren“ angesehen wird.[313]

5.10.36 Definition Eine *Relation* ist eine Teilklasse von $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, also eine Klasse, die nur Individuenpaare enthalten kann.[314]

Relationen sind also Klassen von *Individuenpaaren*. In der *erweiterten Theorie* können „konzeptionelle Klassen“ auch Paare enthalten, die keine Individuenpaare sind, also als Komponenten Unmengen haben. Solche konzeptionellen Klassen nenne ich „konzeptionelle Relationen“:

5.10.37 Erklärung (erweiterte Theorie) Eine *konzeptionelle Relation* ist eine konzeptionelle Klasse, die nur Paare enthält, und darunter mindestens eines, das kein Individuenpaar ist.

Unter ≪Relationen≫ ohne Zusatz verstehe ich solche im Sinn von Definition 5.10.36. In Gegenüberstellung zu den konzeptionellen Relationen nenne diese auch *kombinatorische Relationen*. Die folgenden Ausführungen gelten direkt nur für Relationen der elementaren Theorie (also kombinatorische), sind aber mutatis mutandis auch auf konzeptionelle Relationen übertragbar.[315] Zusammen mit einer Relation R betrachtet man oft folgende Klassen:

- $\mathtt{Vb}(R)$ [Lesart: Vorbereich von R],
  die Klasse aller ersten Komponenten der in R befindlichen Paare,[316]
- $\mathtt{Nb}(R)$ [Lesart: Nachbereich von R],
  die Klasse aller zweiten Komponenten der in R befindlichen Paare,[317]
- $\mathtt{Fd}(R)$ [Lesart: Feld von R],
  die Klasse aller Komponenten der in R befindlichen Paare.[318]

Die Elemente von $\mathtt{Vb}(R)$ heißen *Vorbereichsobjekte* oder *linke Glieder* von R.
Die Elemente von $\mathtt{Nb}(R)$ heißen *Nachbereichsobjekte* oder *rechte Glieder* von R.
Die Elemente von $\mathtt{Fd}(R)$ heißen *Feldobjekte* oder *Glieder* von R.

Eine Relation R kann man sich als „abstrakte Zuordnung“ vorstellen, die jedes ihrer Vorbereichsobjekte x mit einem oder mehreren ihrer Nachbereichsobjekte y „in Beziehung setzt“, und zwar genau mit denjenigen Elementen y, für die das Paar $\langle x, y\rangle$ in R liegt. Um deutlich zu machen, dass die

[313] Vgl. Schröder, *Algebra der Logik* Band 3 S. 13: „Aus unserem Denkbereiche ... können wir irgendwelche Elementpaare herausgreifen und sie ... zu einer ‚Klasse von Elementepaaren‘ ... vereinigen. Das Ergebnis wird ein binäres Relativ ... zu nennen sein.“ Zu De Morgans und Peirces Beiträgen siehe Bocheński, *Formale Logik* S. 434–439.

[314] Formal: R (ist) Relation $:\Leftrightarrow\ R \subseteq (\mathbb{D} \times \mathbb{D})$.

[315] Man muss aber vorsichtig sein: Vor allem gilt für konzeptionelle Relationen kein dem Komprehensionstheorem 5.10.41 S. 134 vergleichbarer Satz.

[316] Formal: $\mathtt{Vb}(R) :\equiv \{x \mid \bigvee_y (\langle x, y\rangle \in R)\}$.

[317] Formal: $\mathtt{Nb}(R) :\equiv \{y \mid \bigvee_x (\langle x, y\rangle \in R)\}$.

[318] Formal: $\mathtt{Fd}(R) :\equiv \mathtt{Vb}(R) \cup \mathtt{Nb}(R)$.

Beziehung „gerichtet“ ist, dass es also *nicht* dasselbe ist, ob x dem y oder y dem x zugeordnet wird, gebrauche ich bevorzugt das Bild von der „Ausrichtung“, und sage,

dass die Relation das x auf das y bzw. das y auf das x „ausrichtet“.

Man kann sich die „Ausrichtung“ so vorstellen, dass R im Fall $\langle x, y\rangle \in R$ die Objekte x und y durch einen von x auf y zeigenden „Gedankenpfeil“ verbindet; im Fall $\langle y, x\rangle \in R$ verbindet R die beiden Objekte durch einen umgekehrten Pfeil, und im Fall $\langle x, x\rangle \in R$ ist der Pfeil gebogen und zeigt von x auf x. Jedes Feldobjekt x ist also durch R mit mindestens einem, möglicherweise aber auch mehreren Feldobjekten „verbunden“, welche man die (R-)*Partner* von x nennen kann. Für die Elementformel $\langle x, y\rangle \in R$ schreibt man kürzer

$$x\ R\ y$$

und nennt dies eine „Relationsformel“.[319] Sinnvolle Lesarten für diese Formel sind ≪x steht durch R in Beziehung zu y≫, ≪x und y stehen (in dieser Reihenfolge) in der Relation R≫, ≪R setzt x zu y in Beziehung≫, ≪R ordnet das x dem y zu≫, ≪R richtet x auf y aus≫. Man setzt Relationsformeln gern zu längeren „Formelketten“ zusammen. Bezeichnen etwa R, S, T Relationen, so schreibt man

$a\ R\ b\ S\ c$	als Abkürzung für	≪Es gilt: $a\ R\ b$ und $b\ S\ c$≫,
$a\ R\ b\ S\ c\ T d$	als Abkürzung für	≪Es gilt: $a\ R\ b$ und $b\ S\ c$ und $c\ T\ d$≫ usw.[320]

Beispiele sind Gleichungsketten wie $a = b = c$, da die Gleichheit $=$, wie wir sehen werden, als Relation aufgefasst werden kann (siehe Bemerkung nach Definition 5.10.42). Zur Veranschaulichung von Relationen R benutzt man *Pfeildiagramme*. Diese bestehen aus

- *zwei Venn-Diagrammen* von Klassen A und B, von denen die eine (*links* dargestellte) Klasse eine Oberklasse des Vorbereichs $\mathtt{Vb}(R)$ und die andere (*rechts* dargestellte) eine Oberklasse des Nachbereichs von $\mathtt{Nb}(R)$ ist,
- sowie *Pfeilen*, die von einem in der linken Klasse dargestellten Objekt x genau dann auf ein in der rechten Klasse dargestelltes Objekt y zeigen, wenn $x\ R\ y$ gilt.

Das folgende Pfeildiagramm stellt zum Beispiel eine Relation R dar, die das Objekt a auf die Objekte d und e ausrichtet, und das Objekt b auf das Objekt e:

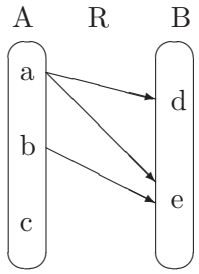


Abbildung 5.10: Pfeildiagramm einer Relation

Beispiele. Die „kleinste“ Relation ist die leere Menge: $\emptyset$ ist Teilklasse jeder Klasse und daher auch Teilklasse von $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, also nach unserer Definition 5.10.36 eine Relation. In diesem Zusammenhang wird $\emptyset$ auch „die leere Relation“ genannt. Die „größte“, umfassendste Relation ist $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ selbst: Diese setzt jedes Individuum mit jedem anderen in Beziehung.

[319] Die Schreibweise $x\ R\ y$ benutzte schon Russell in den *Principles of Mathematics* § 28 S. 24.

[320] Vgl. hierzu auch die durch die schreibtechnischen Definitionen auf S. 115 eingeführten Ausdrucksketten.

Man sagt, eine Relation sei „in“ einer Klasse C, wenn ihr Feldbereich Teilklasse von C ist, also R außerhalb von C keinerlei „Aktivität“ entfaltet:

5.10.38 Definition R (ist) Relation „in“ C $:\Leftrightarrow$ R ist Relation und $\mathtt{Fd}(R) \subseteq C$.

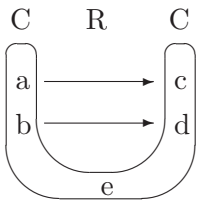


Abbildung 5.11: Pfeildiagramm einer Relation in C

Für Relationen definiert man die folgenden Eindeutigkeitsbegriffe:

5.10.39 Definition Eine Relation heißt *linkseindeutig* [bzw. *rechtseindeutig*], wenn jedes linke [bzw. rechte] Glied jeweils *genau einen* Partner hat. Im Pfeildiagramm geht dann von jedem links dargestellten Objekt des Vorbereichs nur *ein* Pfeil aus [bzw. zeigt auf jedes rechts dargestellte Objekt des Nachbereichs nur *ein* Pfeil]. Wenn die Relation sowohl links– als auch rechtseindeutig ist, heißt sie *beidseitig eindeutig*. Dann hat jedes Glied der Relation *genau einen*, also „seinen“ Partner.[321]

Von den folgenden Relationen ist R_1 links–, R_2 rechts–, und R_3 beidseitig eindeutig:

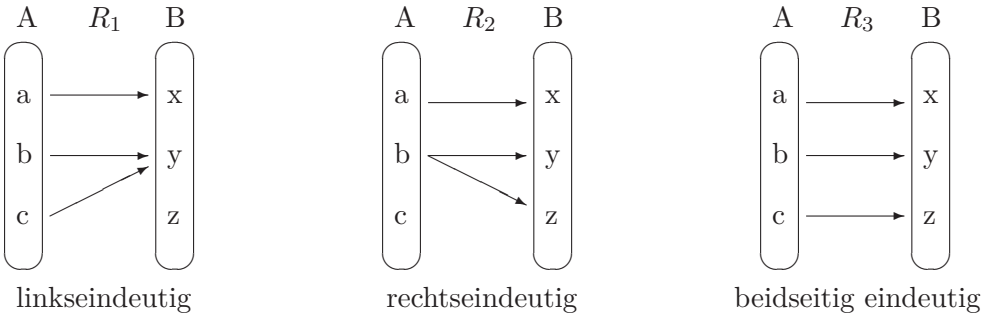


Abbildung 5.12: Links–, rechts– und beidseitig eindeutige Relationen

Aus dem Gleichheitskriterium für Klassen (5.10.4 S. 121) ergibt sich nun für Relationen:

5.10.40 Gleichheitskriterium für Relationen *Relationen R_1 und R_2 sind genau dann identisch, wenn sie genau dieselben Ausrichtungen zwischen den Objekten vornehmen, d. h. wenn für Objekte x, y stets die Äquivalenz $x\ R_1\ y \ \Leftrightarrow\ x\ R_2\ y$ gilt.*

Beweis. Sind R_1 und R_2 identisch, so gilt alles von R_1 Gesagte auch von R_2 und umgekehrt, so dass, wenn $x\ R_1\ y$ gilt, auch $x\ R_2\ y$ gilt und umgekehrt, also gilt dann die Äquivalenz $x\ R_1\ y \ \Leftrightarrow\ x\ R_2\ y$. Sei nun umgekehrt stets $x\ R_1\ y \ \Leftrightarrow\ x\ R_2\ y$, d. h. $\langle x, y\rangle \in R_1 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_2$ gilt. Da es sich bei den Objekten $\langle x, y\rangle$ um Paare handelt, gilt dann für Paare p stets $p \in R_1 \ \Leftrightarrow\ p \in R_2$. Da aber

[321] Formal:

R (ist) *linkseindeutig* $:\Leftrightarrow \neg \bigvee_{xyz} \big(\langle x, y\rangle \in \alpha \ \wedge\ \langle x, z\rangle \in \alpha \ \wedge\ y \neq z\big)$

R (ist) *rechtseindeutig* $:\Leftrightarrow \neg \bigvee_{xyz} \big(\langle x, z\rangle \in \alpha \ \wedge\ \langle y, z\rangle \in \alpha \ \wedge\ x \neq y\big)$

R (ist) *beidseitig eindeutig* $:\Leftrightarrow$ R ist linkseindeutig $\wedge$ R ist rechtseindeutig.

Relationen *nur* Paare enthalten, bedeutet dies, dass R_1 und R_2 dieselben Elemente haben, so dass nach dem Gleichheitssatz 5.10.4 S. 121 folgt, dass $R_1 = R_2$. □ Auch zum Komprehensionstheorem für Klassen (siehe 5.3.3 S. 81 und 5.9.10 S. 118) gibt es ein Analogon für Relationen:

5.10.41 Komprehensionstheorem für Relationen

(1) (nicht-formale Version): *Wenn man Individuen auf Individuen ausrichtet, so gibt es genau eine Relation R, welche diese Ausrichtungen (und nur diese) vornimmt.*

(2) (formale Version): *Wenn $\varphi(x, y)$ ein nach Interpretation der Variablen x und y geschlossener Ausdruck ist, so gibt es genau eine Relation R mit der Eigenschaft, dass für alle Individuen a, b gilt: $a\ R\ b \ \Leftrightarrow\ \varphi(a, b)$.*

Beweis. Die Existenz von R folgt im Fall (1) aus dem nicht-formalen Komprehensionsaxiom 5.3.2 S. 80 für Klassen,[322] und im Fall (2) aber aus der formalen Version 5.9.7 S. 118.[323] Dass es nicht mehrere solche Relationen gibt, folgt aus dem Gleichheitskriterium 5.10.40, denn für zwei solche Relationen R_1 und R_2 würde stets $a\ R_1\ b \ \Leftrightarrow\ a\ R_2\ b$ gelten, also nach jenem Kriterium $R_1 = R_2$. □

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen den hier eingeführten Relationen und den gleichnamigen Objekten, die wir im philosophischen Teil (oben S. 34) betrachtet haben? Jene Relationen waren konkrete Verhältnisse eines Seienden x in Bezug auf ein Seiendes y. Bildet man Abstraktionen solcher Verhältnisse, erhält man „abstrakte Relationen“: Begriffe, deren Instanzen konkrete Verhältnisse zwischen Seienden sind. Setzen wir nun voraus, dass sämtliche Instanzen einer solchen abstrakten Relation R_{phil} immer nur Verhältnisse *zwischen Individuen* sind, gibt es eine mathematischen Relation R_{math}, die R_{phil} auf natürliche Weise repräsentieren kann: nämlich die Relation, welche ein Individuum x genau dann auf ein Individuum y ausrichtet, wenn zwischen x und y ein konkretes Verhältnis besteht, welches Instanz von R_{phil} ist. Dabei ist R_{math} jedoch nur ein *rein quantitatives* Abbild von R_{phil}, da R_{math} nur die Information enthält, welche Individuen mit welchen in Beziehung stehen, ohne *qualitativ* wiederzugeben, welcher *Art* diese Beziehung ist.

5.10.42 Definition Für Klassen C bezeichnet

id_C [Lesart: Identität(srelation) auf C]

die Relation, die jedes Element von C auf sich selbst (und nur auf sich selbst) ausrichtet.[324]

Bemerkung. In der *erweiterten Theorie* kann das Gleichheitszeichen = als Bezeichnung für eine konzeptionelle Relation interpretiert werden, und Gleichungen $x = y$ sind dann Relationsformeln

---

322 Nach diesem Axiom existiert zu jeder Auswahl von *Individuen* eine entsprechende Klasse, also existiert auch zu der Auswahl all jener Paare $\langle a, b\rangle$, für welche es zutrifft, dass man a auf b ausgerichtet hat, eine diese Paare enthaltende Klasse R. Denn nach Voraussetzung geschah die Ausrichtung nur unter Individuen, so dass a und b und daher nach Theorem 5.10.30 S. 129 auch $\langle a, b\rangle$ immer ein Individuum ist.

323 Nach diesem Axiom ist $R := \{x \mid x = \langle y, z\rangle$ für Individuen y und z, für die $\varphi(y, z)$ gilt$\}$ eine Klasse mit der Eigenschaft, dass für alle Individuen x gilt:

$x \in R \ \Leftrightarrow\ x = \langle y, z\rangle$ für Individuen y und z, für die $\varphi(y, z)$ gilt.

Sind nun a und b Individuen, so ist nach Theorem 5.10.30 S. 129 auch $\langle a, b\rangle$ ein solches, und deshalb kann $\langle a, b\rangle$ in der soeben genannten Äquivalenzaussage die Rolle von x spielen:

$\langle a, b\rangle \in R \ \Leftrightarrow\ \langle a, b\rangle = \langle y, z\rangle$ für Individuen y und z, für die $\varphi(y, z)$ gilt.

$\ll\langle a, b\rangle \in R\gg$ ist nun gleichwertig mit der Relationsformel $\ll a\ R\ b\gg$, und $\ll\langle a, b\rangle = \langle x, y\rangle\gg$ ist nach Theorem 5.10.33 S. 130 gleichwertig mit $\ll a = b$ und $x = y\gg$. So können wir für die letzte Äquivalenz schreiben:

$a\ R\ b \ \Leftrightarrow\ a = y$ und $b = z$ für Individuen y und z, für die $\varphi(y, z)$ gilt.

Nun ist aber $\ll a = y$ und $b = z$ für Individuen y und z, für die $\varphi(y, z)$ gilt$\gg$ nur ein komplizierter Ausdruck, der mit $\ll\varphi(a, b)\gg$ gleichbedeutend ist, und so erhalten wir schließlich $a\ R\ b \ \Leftrightarrow\ \varphi(a, b)$.

324 Formal: $\mathrm{id}_C :\equiv \{p \mid \bigvee_{x\in C}(p = \langle x, x\rangle)\}$.

$x\ R\ y$, worin R die Relation $=$ ist. So gesehen sagt $x = y$ aus, dass x durch die Relation $=$ auf y ausgerichtet wird. Die Relation id_C ist dann diejenige Relation, welche *unter den Elementen von C* dieselben Ausrichtungen vornimmt wie $=$. Auch die bisher nur im Kontext definierten Zeichen $\neq$, $\in$, $\notin$, $\subseteq, \supseteq, \subset, \supset$ können als Bezeichnungen konzeptioneller Relationen angesehen werden: die Nicht-Identität, Elementrelation, Non-Elementrelation, Teilklassenrelation, Oberklassenrelation, echte Teilklassenrelation und echte Oberklassenrelation. Zu betonen ist aber, dass nicht zu jeder beliebig komplizierten Zuordnung zwischen Unmengen eine konzeptionelle Relation existierten muss, wie auch nicht zu jeder Auswahl von Objekten eine konzeptionelle Klasse existiert. Die Existenz ist (wegen des Einfachheitsprinzips 5.7.6) nur für „einfache", nicht-verwickelte Zuordnungen gesichert.

5.10.43 Definition Für Relationen R bezeichnet

$R^{\rightharpoonup}$ [Lesart: Umkehrrelation von R]

die Relation, die ein x genau dann auf y ausrichtet, wenn y von R auf x ausgerichtet wird.[325] So wird aus einem Pfeildiagramm von R ein solches von $R^{\rightharpoonup}$, wenn man alle Pfeile umdreht.

Oft verwendet man als Bezeichnung der Umkehrrelation auch einfach das „umgedrehte" Relationszeichen: so wird die Umkehrrelation der Kleinerrelation $<$, nämlich die Größerrelation, mit $>$ bezeichnet. Ebenso ist die Oberklassenrelation $\supseteq$ (in der *erweiterten Theorie*) die Umkehrrelation der Teilklassenrelation $\subseteq$, ebenso wie $\supset$ die Umkehrrelation von $\subset$ ist.

5.10.44 Definition Für Relationen R und S bezeichnet

$R \looparrowright S$ [Lesart: R komponiert mit S, oder: Komposition von R mit S]

die Relation, die ein x genau dann auf ein y ausrichtet, wenn es ein „mittleres" Individuum m gibt, so dass x von R auf m, und dann m von S auf y ausgerichtet wird.[326]

5.10.45 Definition Für Relationen R und Klassen C bezeichnet

$R /\!\!/ C$ [Lesart: R volleingeschränkt auf S, oder: Volleinschränkung von R auf C]

die Relation, die zwischen Elementen von C genau dieselbe Ausrichtungen vornimmt wie R, und sonst „nichts" tut.[327] Für $R /\!\!/ C$ schreiben wir auch R_C.

Es geht also die Relation R in $R /\!\!/ C$ über, wenn man die „Aktivität" der Relation R jenseits von C stoppt, diese also auf den Bereich der Elemente von C „einschränkt". Die Bezeichnung *Voll*einschränkung soll die Relation $R /\!\!/ C$ von der *Einschränkung* R / C unterscheiden, die später für spezielle Relationen eingeführt werden wird (siehe Definition 5.10.63 S. 143).

---

325 Formal: $R^{\rightharpoonup} :\equiv \{p \mid \bigvee_{xy}(\langle x,y\rangle \in R \ \wedge\ p = \langle y,x\rangle)\}$. Ich bezeichne die Umkehrrelation mit $\ll R^{\rightharpoonup}\gg$, da die übliche Bezeichnung $\ll R^{-1}\gg$ missverständlich sein kann: Bei den sog. umkehrbaren numerischen Relationen R kann R^{-1} außer für die Umkehrrelation auch für die Relation stehen, die jeder Zahl x aus $\mathtt{Vb}(R)$ ihren sog. Kehrwert zuordnet. Ich würde die Bezeichnung $\ll R^{-1}\gg$ dieser letzteren Relation vorbehalten.

326 Formal: $R \looparrowright S :\equiv \{p \mid \bigvee_{xmy}(\langle x,m\rangle \in R \ \wedge\ \langle m,y\rangle \in S \ \wedge\ p = \langle x,y\rangle)\}$. Üblicherweise schreibt man für die Komposition $\ll R \circ S\gg$ und die meisten Autoren definieren die Komposition $R \circ S$ so, wie es in meiner Schreibweise $\ll S \looparrowright R\gg$ entsprechen würde (d. h. mit vertauschter Reihenfolge von R und S). Das Zeichen $\looparrowright$ habe ich deshalb aus $\circ$ und einem Pfeil gebildet, um die „Richtung" der Komposition deutlich zu machen: Bei der Komposition $R \looparrowright S$ wird „zuerst" die Relation R tätig, indem sie ein x auf ein Zwischenobjekt m ausrichtet, das „dann" von S auf ein y ausgerichtet wird.

327 Formal: $R /\!\!/ C :\equiv R \cap (C \times C)$.

Funktionen

Funktionen wurden zuerst von FREGE als selbständige Objekte in die Mathematik eingeführt. Vor FREGE verstanden die Mathematiker unter „einer Funktion von x“ lediglich einen „Rechenausdruck“, der „den Buchstaben x einschließt“.[328] Für FREGE lag das „Wesen der Funktion“ dagegen „in dem Teile des Ausdrucks, der noch außer dem ‚x‘ vorhanden ist“.[329] In der FREGEschen Ontologie unterscheiden sich Funktionen von gewöhnlichen Gegenständen dadurch, dass sie ergänzungsbedürftig („ungesättigt“) sind: Sie ergänzen sich mit bestimmten Gegenständen, welche FREGE die *Argumente* der Funktion nennt, zu neuen Gegenständen, welche *Werte* der Funktion heißen.[330] Bezeichnet f die Funktion und x eines ihrer Argumente, so bezeichnet $f(x)$ den Gegenstand (Wert), zu dem die Funktion f sich ergänzt, wenn sie das Argument x aufnimmt.[331] Die FREGEschen Funktionen sind also geheimnisvolle Objekte, in die man Gegenstände x „hineinstecken“ kann, woraufhin dann ein ganz bestimmter Gegenstand $f(x)$ „herauskommt“; der herauskommende Gegenstand ist dabei vom hineingesteckten abhängig. Das läuft auf eine *Zuordnung* hinaus, in der jeder Gegenstand genau einem Gegenstand zugeordnet wird. Wir können daher die FREGEschen Funktionen durch spezielle Relationen simulieren. Wie wir die abstrakten Relationen durch spezielle Klassen (nämlich Klassen von Paaren) simuliert haben, simulieren wir also die abstrakten FREGEschen Funktionen durch spezielle Relationen, und somit letztlich ebenfalls wieder durch Klassen. Am naheliegendsten ist es, zur Simulation FREGEscher Funktionen *linkseindeutige* Relationen zu nehmen, die also jedes x ihres Definitionsbereichs auf *genau* ein y ausrichten; dann können wir x als *Argument* der Funktion verstehen und das entsprechende y als den *Wert* $f(x)$ ansehen, zu dem sich f mit x ergänzt. So ist die folgende Definition motiviert:

5.10.46 Definition Eine *Funktion* ist eine linkseindeutige Relation.[332]

Die so definierten Funktionen haben als linke und rechte Glieder Individuen. Wir werden den Funktionsbegriff *noch im Rahmen der elementaren Theorie* zum Begriff der ≪verallgemeinerten Funktion≫ ausweiten, deren *rechte Glieder* beliebige Unmengen sein können (siehe Definitionen 5.10.51 und 5.10.52). In der *erweiterten Theorie* kann man zusätzlich Funktionen betrachten, bei denen auch als *linke Glieder* Unmengen auftreten; diese nenne ich ≪konzeptionelle Funktionen≫:

5.10.47 Erklärung (erweiterte Theorie) Eine *konzeptionelle Funktion* ist eine linkseindeutige konzeptionelle Relation, unter deren linken Gliedern mindestens eine Unmenge ist.

≪Funktionen≫ ohne Zusatz seien nun stets die Funktionen im Sinn von Definition 5.10.46, und ≪verallgemeinerte Funktionen≫ solche im Sinne der noch aufzustellenden Definition 5.10.52. Beide nenne ich ≪kombinatorisch≫, wenn ich sie den ≪konzeptionellen≫ Funktionen der erweiterten Theorie gegenüberstelle. Die folgenden Ausführungen gelten direkt nur für die kombinatorischen, sind aber mutatis mutandis auch auf konzeptionelle Funktionen übertragbar.[333] Für Funktionen führe ich zunächst im Einklang mit der Literatur besondere Bezeichnungen ein, die mehr oder weniger durch die FREGEsche Funktionsvorstellung motiviert sind:

- Für den Vorbereich $\mathtt{Vb}(f)$ von f schreibt man $\mathtt{Db}(f)$ [Lesart: Definitionsbereich von f], und seine Elemente, die linken Glieder von f, heißen *Argumente* oder *Stellen* von f.

[328] FREGE, *Funktion und Begriff* S. 18.

[329] FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik* Band 1 § 1 S. 5.

[330] Vgl. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik* Band 1 § 1, S. 5–6.

[331] Vgl. FREGE, *Funktion und Begriff* S. 25.

[332] Formal: f (ist) Funktion $:\Leftrightarrow$ f Relation $\wedge$ f linkseindeutig.

[333] Wie bei den Relationen muss man auch hier vorsichtig sein: Vor allem gilt für konzeptionelle Funktionen kein dem Komprehensionstheorem 5.10.55 vergleichbarer Satz.

- Für den Nachbereich $\mathtt{Nb}(f)$ von f schreibt man $\mathtt{Wb}(f)$ [Lesart: Wertebereich von f], und seine Elemente, die rechten Glieder von f, heißen *Werte* oder *Funktionswerte* von f.
- Für die Relationsformel $x\ f\ y$ empfehlen sich nun die Lesarten «f ergänzt sich mit x zu y» oder «f bewertet x mit y». Ich bevorzuge die Lesart «f wirft x auf y».

Während eine Relation Objekte auf Objekte „ausrichtet“ (siehe S. 132), sehe ich die „Aktivität“ einer Funktion als Funktion darin, dass sie

Objekte auf Objekte „wirft“.

Diese Vorstellung setzt nämlich die für Funktionen charakteristische *Linkseindeutigkeit* voraus: Es gibt zu jedem Argument x *nur einen* Wert y, auf den f das x „ausrichtet“, und so kann man sich vorstellen, dass x auf dieses y geworfen wird. Ist x eine Stelle (d. h. ein Argument, ein linkes Glied) einer Funktion f, und y der eine Wert (das eine rechte Glied), auf welches f das linke Glied x „wirft“, so heißt y «der Funktionswert von f an der Stelle x». Dafür schreibt man

$f(x)$ oder f_x [Lesart: f von x].[334]

Den Zeichenverband $f(x)$ bzw. f_x nennt man einen *Funktionswertterm*. Es gilt also: Die Funktion f wirft ihr Argument x auf $f(x)$. Besondere Funktionen sind nun solche, die auch rechtseindeutig und somit beidseitig eindeutig sind. Diese heißen injektiv oder Injektionen:

5.10.48 Definition Eine *injektive Funktion* oder *Injektion* ist eine rechtseindeutige Funktion, also eine beidseitig eindeutige Relation.[335]

Bemerkung. Ist f *rechts*eindeutig, so ist die Umkehrrelation $f^{\rightharpoonup}$ *links*eindeutig, also wieder eine *Funktion*, die dann auch Umkehr*funktion* von f heißt. Für Injektionen ist es charakteristisch, dass ihre Umkehrrelation eine Funktion ist. Das wichtigste Charakteristikum aber ist, dass *verschiedene* Argumente x, y einer Injektion f stets auch *verschiedene* Funktionswerte $f(x), f(y)$ haben.

5.10.49 Definition Seien A, B Klassen und f eine Funktion.

f heißt «auf A definiert» oder «von A ausgehend» oder kurz «von A», wenn $A = \mathtt{Db}(f)$
f heißt «in B hineinwerfend» oder kurz «in B», wenn $\mathtt{Wb}(f) \subseteq B$.

Man schreibt kurz «$f\colon A \longrightarrow B$» oder «$A \xrightarrow{f} B$», um auszudrücken, dass f sowohl «von A» ausgeht als auch «in B» hineinwirft, und sagt «f ist eine Funktion von A in B».[336]

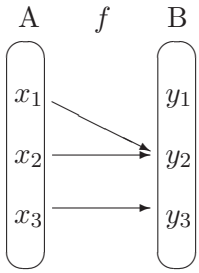


Abbildung 5.13: Eine Funktion f von A in B

Bei obiger Darstellung einer Funktion f gibt es für Elemente y von B drei Möglichkeiten:

[334] Formal könnte man definieren: $f(x) \equiv \imath\, y\ (\langle x, y\rangle \in f)$. Ich werde weiter unten eine kompliziertere Definition vorschlagen (5.10.53), die erst nach Einführung der verallgemeinerten Funktionen motiviert werden kann.

[335] Formal: f ist Injektion $:\Leftrightarrow$ f ist Funktion $\wedge$ f ist rechtseindeutig.

[336] Formal: $f\colon A \longrightarrow B$ $:\Leftrightarrow$ f ist Funktion $\wedge$ $\mathtt{Db}(f) = A$ $\wedge$ $\mathtt{Wb}(f) \subseteq B$.

(1)	*gar kein*	Pfeil	zeigt	auf y	(was in obigem Beispiel für y_1 gilt)
(2)	*mehrere*	Pfeile	zeigen	auf y	(was in obigem Beispiel für y_2 gilt)
(3)	*genau ein*	Pfeil	zeigt	auf y	(was in obigem Beispiel für y_3 gilt)

Ist (1) für alle y ausgeschlossen, so trifft f beim „Werfen“ jedes y aus B *mindestens* einmal. Das gilt, wenn $\mathtt{Wb}(f) = B$ ist. Man nennt dann f eine *Surjektion von A in B*.

Ist (2) für alle y aus B ausgeschlossen, so trifft f jedes y aus B *höchstens* einmal. Das gilt, wenn f eine Injektion ist. Man nennt dann f eine *Injektion von A in B*.

Sind (1) *und* (2) stets ausgeschlossen, so gilt stets (3) und f trifft jedes y aus B *genau* einmal. Das gilt, wenn f eine Injektion mit $\mathtt{Wb}(f) = B$ ist. Man nennt dann f eine *Bijektion von A in B*.

Ist f eine Sur–, In– oder Bijektion von A in B, schreibt man $A \xrightarrow[\text{SRJ}]{f} B$ bzw. $A \xrightarrow[\text{INJ}]{f} B$ bzw. $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} B$:

5.10.50 Definition

$A \xrightarrow[\text{SRJ}]{f} B$ [Lesart: f ist *Surjektion* von A in B] $:\Leftrightarrow$ $f\colon A \longrightarrow B$ und $\mathtt{Wb}(f) = B$.

$A \xrightarrow[\text{INJ}]{f} B$ [Lesart: f ist *Injektion* von A in B] $:\Leftrightarrow$ $f\colon A \longrightarrow B$ und f ist Injektion.

$A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} B$ [Lesart: f ist *Bijektion* von A in B] $:\Leftrightarrow$ $f\colon A \longrightarrow B$ und $\mathtt{Wb}(f) = B$ und f ist Injektion.

Offenbar ist $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} B$ äquivalent mit «$A \xrightarrow[\text{INJ}]{f} B$ *und* $B \xrightarrow[\text{INJ}]{f} A$» und auch mit «$f$ ist Injektion, $\mathtt{Db}(f) = A$ und $\mathtt{Wb}(f) = B$». Ist f eine Surjektion bzw. Injektion bzw. Bijektion von A in B, sagt man auch einfach, wenn der Bezug zu A und B klar ist, f sei *surjektiv* bzw. *injektiv* bzw. *bijektiv*.

Beispiele. Die folgenden Pfeildiagramme zeigen eine Injektion von A in B, eine Surjektion g von C in D und eine Bijektion h von E in F:

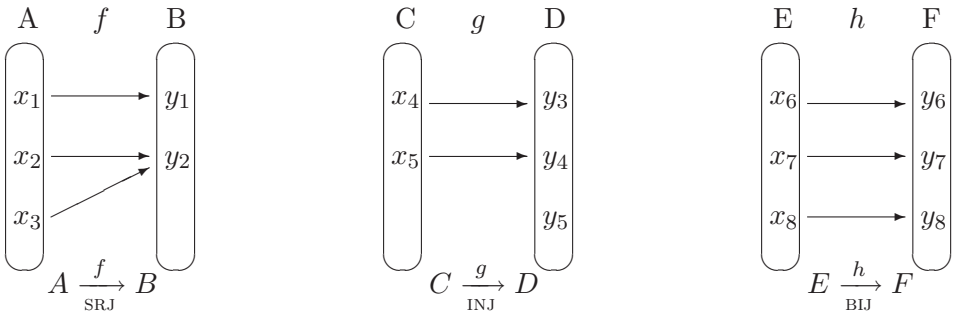


Abbildung 5.14: Surjektion, Injektion und Bijektion von einer Klasse in eine andere

Nun weiten wir den Funktionsbegriff so aus, dass als *Werte* auch Unmengen auftreten können:

5.10.51 Definition Eine *unmengenwertige Funktion* (kurz *Unfunktion*) sei eine Relation, die nicht linkseindeutig ist (also mindestens ein linkes Glied auf *mehrere* rechte Glieder ausrichtet), aber immer dann, wenn sie ein linkes Glied auf mehrere rechte Glieder ausrichtet, dieses Glied auf *so viele* rechte Glieder ausrichtet, dass die Klasse der rechten Glieder eine *Unmenge* ist.[337]

[337] Formal: f (ist) unmengenwertige Funktion oder (ist) Unfunktion $:\Leftrightarrow$ f ist Relation $\wedge$ $\neg$ f Funktion $\wedge$ $\bigwedge_{x \in \mathtt{Vb}(f)} \Big(\big(\bigvee_{y} \langle x, y\rangle \in f \big) \vee \big(\{y \mid \langle x, y\rangle \in f\} \notin \mathbb{D} \big) \Big)$. Die Idee, nicht-eindeutige Relationen als verallgemeinerte Funktionen einzusetzen, die Unmengen als Werte haben können, findet man auch bei Hájek und Vopěnka, *Semisets* Nr. 1403 S. 70. Im Gegensatz zu Hájek und Vopěnka nehme ich aber *nur ganz bestimmte Relationen* für diesen Zweck: diejenigen, die mindestens eine Unmenge als Wert haben. Wie wir sehen werden, hat dies zur Folge, dass sich das Gleichheitskriterium 5.10.54 für Funktionen auf verallgemeinerte Funktionen ausdehnen lässt.

Für jedes linke Glied x einer solchen Relation f gilt also einer der folgenden Fälle:

(1) entweder richtet f das x (wie eine gewöhnliche Funktion) auf nur *ein* rechtes Glied aus
(2) oder f richtet x gleich auf *so viele rechte Glieder* aus, *dass diese eine Unmenge bilden*

wobei für *mindestens ein* x der Fall (2) zutrifft. Wir legen nun $f(x)$ wie folgt fest:

im Fall (1) bezeichne $f(x)$ *das eine rechte Glied*, auf das x ausgerichtet wird, und
im Fall (2) bezeichne $f(x)$ *die Unmenge*, auf deren Elemente x ausgerichtet wird.

So bezeichnet also $f(x)$ für wenigstens ein x eine Unmenge. $f(x)$ soll nun natürlich

≪Funktionswert von f an der Stelle x≫

heißen, wobei man sich wie bei einer gewöhnlichen Funktion vorstellen möge, dass f das x auf $f(x)$ „wirft“. Die rechten Glieder von f sollen wie bei gewöhnlichen Funktionen „Argumente“ oder „Stellen“ von f heißen, und die Objekte, auf welche diese Argumente „geworfen“ werden, „Werte“ von f. Man muss nun jedoch unterscheiden, ob man f „als Relation“ oder „als Unfunktion“ sieht, denn je nachdem sind die „Aktivitäten“ von f verschieden:

- Wenn f *als Relation* ein linkes Glied x auf nur ein einziges rechtes Glied y „ausrichtet“, so verhält sich f *als Unfunktion* ganz analog, indem f dann das x auf y „wirft“.
- Wenn aber f *als Relation* das linke Glied x auf *mehrere* rechte Glieder „ausrichtet“, die sich zu einer Unmenge U zusammensetzen, so „wirft“ f *als Unfunktion* dieses x nur auf *einen einzigen* Wert, nämlich auf die Unmenge U.

In jedem Fall wirft f ein Argument x stets auf *genau einen* Wert, und weist insofern eine Art „Linkseindeutigkeit im Werfen“ auf, trotz des Mangels an „Linkseindeutigkeit im Ausrichten“. Wie bei einer gewöhnlichen Funktion soll der Vorbereich $\mathtt{Vb}(f)$ von f ihr *Definitionsbereich* $\mathtt{Db}(f)$ heißen. Als *Wertebereich* $\mathtt{Wb}(f)$ aber können wir nicht den Nachbereich $\mathtt{Nb}(f)$ nehmen, weil dieser ja keine Unmengen enthalten kann. In der erweiterten Theorie können wir als Wertebereich von f die *konzeptionelle Klasse* nehmen, deren Elemente die Werte von f sind, *falls eine solche Klasse existiert*. Doch kann es vermutlich vorkommen, dass es keine konzeptionelle Klasse gibt, welche genau die Werte von f enthält. Man hätte es dann gewissermaßen mit einer „wertebereichslosen“ Unfunktion zu tun, die dennoch Werte hat.[338] So verzichte ich bei Unfunktionen auf die Definition eines Wertebereichs.

Ich fasse nun Funktionen und Unfunktionen unter dem Begriff einer verallgemeinerten Funktion oder *Familie* zusammen:[339]

[338] Die Vermutung, dass es derartige Unfunktionen gibt, lässt sich wie folgt begründen. Wir wissen aufgrund von Theorem 5.7.5, dass es nicht zu jeder Auswahl von Objekten eine entsprechende Kollektion gibt, wenn diese Auswahl Unmengen enthält (weil der die Auswahl beschreibende Begriff widersprüchlich sein kann). Nun wäre es denkbar, dass eine Auswahl, zu der es keine Kollektion gibt, nicht so umfangreich ist, dass „mehr“ Objekte zu den ausgewählten gehören, als es Individuen gibt (weil das Versagen der begrifflichen Fassbarkeit nicht allein am großen Umfang liegt, wie sich auf S. 91 zeigte). Dann aber könnte man eine unmengenwertige Funktion f bilden, welche ihre Argumente genau auf die Objekte dieser „begrifflich unfassbaren“ Auswahl wirft. Diese Unfunktion hätte dann keinen angebbaren Wertebereich. Natürlich könnte man trotzdem von den einzelnen Werten von f reden, und es wäre für ein Wesen mit entsprechenden Erkenntnisfähigkeiten denkbar, dass es genau die Werte von f „anschauen“, „auswählen“ oder „herausgreifen“ könnte. Aber da diese Auswahl nur durch einen widersprüchlichen Begriff charakterisiert werden könnte, wäre sie *nicht mehr objektiv kommunikabel*, die Auswahl würde daher zu den „externen Objekten“ gehören, die wir aus dem mathematisch-logischen Diskurs ausgeschlossen haben (siehe Fußnote 178 auf S. 87).

[339] Mit dem Begriff der Familie verbindet man gewöhnlich eine (für die formale Theorie allerdings irrelevante) besondere Sichtweise, die auf S. 146–147 erläutert werden wird.

5.10.52 Definition Funktionen und Unfunktionen werden als *Familien* oder als *verallgemeinerte Funktionen* bezeichnet.[340]

Nun legen wir die Terme $\mathtt{Db}(f)$, $\mathtt{Wb}(f)$, $f(x)$, f_x für beliebige Ausdrücke f und x fest:

5.10.53 Definition Falls f eine verallgemeinerte Funktion und $x \in \mathtt{Db}(f)$ ist, soll $f(x)$ die auf S. 137 (falls f gewöhnliche Funktion ist) bzw. die auf S. 139 (falls f gewöhnliche Funktion ist) erklärte Bedeutung haben, und andernfalls soll $f(x)$ den Joker bezeichnen.
$\mathtt{Db}(f)$ soll stets dasselbe wie $\mathtt{Vb}(f)$ bezeichnen und $\mathtt{Wb}(f)$ soll im Fall, dass f eine Funktion ist, dasselbe wie $\mathtt{Nb}(f)$ bezeichnen, und andernfalls den Joker.
f_x soll stets dasselbe wie $f(x)$ bezeichnen. Zu dieser „Indexschreibweise“ f_x siehe auch S. 147.[341]

Wie für Klassen und Relationen, gibt es auch für Funktionen ein Gleichheitskriterium, das sich nun gleich für verallgemeinerte Funktionen bzw. Familien aussprechen lässt:

5.10.54 Gleichheitskriterium für verallgemeinerte Funktionen *Verallgemeinerte Funktionen oder Familien f_1 und f_2 sind genau dann gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich haben und jedes x aus diesem Bereich auf ein und dasselbe Objekt werfen,* kurz gesagt *wenn* $\mathtt{Db}(f_1) = \mathtt{Db}(f_2)$ *und für jedes x aus diesem Definitionsbereich $f_1(x) = f_2(x)$ gilt.*

Beweis. Siehe Anhang S. 389–390. □ Für verallgemeinerte Funktionen (Familien) gilt schließlich auch ein dem Komprehensionstheorem für Relationen (5.10.41 S. 134) analoger Satz:

5.10.55 Komprehensionstheorem für Funktionen

(1) (nicht-formale Version): *Wirft man gewisse Individuen auf je ein Objekt, so existiert genau eine verallgemeinerte Funktion f, welche diese Würfe ausführt.*

Zusatz: *Wirft man nur auf Individuen, ist die entsprechende Funktion eine gewöhnliche.*

(2) (formale Version): *Ist D eine Klasse und $\theta(x)$ ein nach Interpretation einer Variablen x geschlossener Ausdruck, so existiert genau eine verallgemeinerte Funktion f, so dass $\mathtt{Db}(f) = D$ ist, und für alle Elemente a von D gilt: $f(a) = \theta(a)$.*

Zusatz: *Gilt für alle a aus D, dass $\theta(a)$ ein Individuum ist, ist f gewöhnliche Funktion.*

Beweis. Die Existenz eines solchen f folgt aus dem Komprehensionstheorem 5.10.41 S. 134 für Relationen,[342] und dass es nur *ein* solches f gibt, folgt aus dem Gleichheitskriterium 5.10.54.[343] Der Zusatz ergibt sich daraus, dass Funktionen, die Individuen nur auf Individuen werfen, gewöhnliche Funktionen sind (denn eine Unfunktion wirft mindestens ein Individuum auf eine Unmenge). □

Analog zu den beschreibenden Klassentermen kann man nun *beschreibende Funktionsterme* bilden:

---

340 Formal: f (ist) Familie $:\Leftrightarrow f$ Funktion $\vee$ f Unfunktion. f (ist) verallgemeinerte Funktion $:\Leftrightarrow f$ Familie.

341 Formal: $f(x) \;:\equiv\; \imath\, Y \left(\dot{\bigvee}_y \left(\langle x, y\rangle \in f \;\wedge\; Y = y \right) \;\vee\; \left(\{y \mid \langle x, y\rangle \in f\} \notin \mathbb{D} \;\wedge\; Y = \{y \mid \langle x, y\rangle \in f\} \right) \right)$.
$\mathtt{Db}(f) \;:\equiv\; \mathtt{Vb}(f)$. $\mathtt{Wb}(f) :\equiv \imath\, X\ (f \text{ Funktion} \wedge X = \mathtt{Nb}(f))$. $f_x \;:\equiv\; f(x)$.

342 Zu (1). Man kann jedes x, das man auf ein *Individuum* y „wirft“, auf y „ausrichten“, und jedes x, das man auf eine *Unmenge* y „wirft“, auf alle Elemente von y „ausrichten“. Zu diesen Ausrichtungen existiert nach dem Komprehensionstheorem 5.10.41 S. 134(1) eine Relation f, die genau diese Ausrichtungen ausführt. Diese ist aber eine verallgemeinerte Funktion, welche die verlangten Würfe ausführt.
Zu (2). Sei $\varphi(x, y)$ der Ausdruck $\ll x \in D$, und wenn $\theta(x)$ Individuum ist, gilt $y = \theta(x)$, und wenn $\theta(x)$ Unmenge ist, gilt $y \in \theta(x)\gg$. Nach dem Komprehensionstheorem 5.10.41 S. 134(2) gibt es eine Relation f mit der Eigenschaft, dass für Individuen x und y stets $x\ f\ y$ mit $\varphi(x, y)$ äquivalent ist. Dieses f ist eine verallgemeinerte Funktion mit den verlangten Eigenschaften.

343 Zwei solche Funktionen f_1 und f_2 hätten denselben Definitionsbereich und für alle Individuen a aus diesem Bereich wäre $f_1(a) = f_2(a)$: also ergäbe sich gemäß jenem Kriterium $f_1 = f_2$.

5.10.56 Definition Ist A eine Klasse und $\theta(x)$ ein nach Interpretation von x geschlossener Term, gibt es gemäß 5.10.55 genau eine verallgemeinerte Funktion f mit Definitionsbereich A, die jedes Element a aus A auf das Objekt $\theta(a)$ wirft. Dieses f bezeichnen wir mit

$$\langle x \in A \mapsto \theta(x)\rangle \qquad \text{[Lesart: verallgemeinerte Funktion, die } x \text{ aus } A \text{ auf } \theta(x) \text{ wirft].}$$

Eine *gewöhnliche* Funktion ist $\langle x \in A \mapsto \theta(x)\rangle$ offenbar nur dann, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass $\theta(a)$ für jedes a aus A immer ein Individuum ist.[344]

Beispiele.

(1) Für jede Funktion f ist offenbar $\langle x \in \mathtt{Db}(f) \mapsto f(x)\rangle$ eine andere Bezeichnung für f.

(2) $\langle x \in C \mapsto x\rangle$ ist die Identitätsrelation id_C, die daher auch *Identitätsfunktion* heißt.

(3) Beispiel einer Unfunktion ist $\langle x \in \mathbb{M} \mapsto \complement x\rangle$, denn diese wirft jede Menge auf ihr Komplement, was nach 5.10.28 stets eine Unmenge ist.

(4) Die leere Relation $\emptyset$ (siehe S. 132) ist eine Funktion und sogar Injektion: Sie ist links– und rechtseindeutig, denn da sie gar nichts tut, richtet sie weder ein linkes Glied auf mehrere rechte noch mehrere linke Glieder auf ein rechtes aus. So heißt $\emptyset$ auch die *leere Funktion* und die *leere Injektion*. Da offenbar $\mathtt{Db}(\emptyset) = \mathtt{Wb}(\emptyset) = \emptyset$ gilt, ist $\emptyset$ auch eine Surjektion und insgesamt eine Bijektion von $\emptyset$ in $\emptyset$. Ferner gilt für jede beliebige Klasse A, dass $\emptyset$ eine ≪Funktion (sogar: Injektion) von $\emptyset$ in A≫ ist,[345] d. h. es gilt stets $\emptyset\colon \emptyset \longrightarrow A$, und zwar ist $\emptyset$ die *einzige Funktion* von $\emptyset$ in A.[346]

In der *erweiterten Theorie* stehen uns nach Erklärung 5.10.47 auch konzeptionelle Funktionen zur Verfügung, deren Argumente Unmengen sind. So können wir hier die Komplementbildung $\complement$ als Funktion auffassen, deren Definitionsbereich die konzeptionelle Klasse $\mathfrak{C}$ aller (kombinatorischen) Klassen ist, und welche jede (kombinatorische) Klasse C auf $\complement C$ wirft. Ebenso können wir $\bigcup$ und $\bigcap$, die „Bildung der Umkehrrelation“ $\rightharpoonup$ sowie $\mathtt{Vb}, \mathtt{Nb}, \mathtt{Fd}, \mathtt{Db}, \mathtt{Wb}$ als Funktionen ansehen, welche Klassen bzw. Relationen bzw. Funktionen auf Klassen werfen.
Das nun folgende Axiom wurde 1922 von Abraham Fraenkel in die Mengenlehre eingeführt:[347]

5.10.57 Neuntes Axiom der Mengenlehre: Ersetzungsaxiom *Ist f eine gewöhnliche Funktion und $\mathtt{Db}(f)$ eine Menge, so ist auch $\mathtt{Wb}(f)$ eine Menge.*

Plausibilitätsbetrachtung. Wir gelangen von einer Vorstellung von $\mathtt{Db}(f)$ zu einer solchen von $\mathtt{Wb}(f)$, wenn wir jedes Individuum x von $\mathtt{Db}(f)$ durch $f(x)$ ersetzen, auf welches f das Individuum x

---

344 Als formale (und etwas allgemeinere) Version dieser Definition sei für Variablen x und Ausdrücke $\theta_1, \theta_2(x)$ festgelegt: $\langle x \in \theta_1 \mapsto \theta_2\rangle \;:\equiv\; \imath f(f \text{ Familie} \wedge \mathtt{Db}(f) = \theta_1 \wedge \bigwedge_{x \in \mathtt{Db}(f)} f(x) = \theta_2(x))$, wodurch $\langle \cdots \in \ldots \mapsto \ldots\rangle$ als neuer Operator eingeführt ist (siehe S. 112). Wenn θ_1 ein Objekt bezeichnet, das keine Klasse ist, bezeichnet der hier definierte Operatorausdruck den Joker $\perp$.
In Angleichung an die Operatorschreibweise in der streng formalen Logik können wir auch den hier eingeführten Operator durch ein einziges Symbol $\boldsymbol{\Lambda}$ ersetzen, also $\boldsymbol{\Lambda}\ x\ \theta_1\ \theta_2$ für $\langle x \in \theta_1 \mapsto \theta_2\rangle$ schreiben. Einen ähnlichen „Lambda-Operator“ $\boldsymbol{\lambda}$ hat Alonzo Church eingeführt, der mit $\boldsymbol{\lambda}\ x\ \theta(x)$ die Funktion (mit größtmöglichem Definitionsbereich) beschreibt, die jedes x aus diesem Bereich auf $\theta(x)$ wirft. (vgl. Church, *Lambda-Conversion*).

345 Denn wir sagen gemäß Definition 5.10.49 S. 137, dass eine Funktion f ≪von D in A≫ ist, wenn D ihr Definitionsbereich und A eine *Obermenge* ihres Wertebereichs ist. Da nach 5.14 S. 120 jede Klasse A eine Obermenge von $\emptyset$ ist, ist also die leere Funktion stets eine Funktion von $\emptyset$ in A.

346 Jede von $\emptyset$ verschiedene Funktion f ist eine nichtleere Klasse, hat also mindestens ein Element $\langle x, y\rangle$, und dessen erste Komponente x ist Element des Definitionsbereichs $\mathtt{Db}(f)$, der demnach nichtleer ist. Also ist $\mathtt{Db}(f) \neq \emptyset$ und so ist f keine Funktion von $\emptyset$ in A.

347 Vgl. Fraenkel, *Cantor-Zermelosche Mengenlehre* S. 50.

wirft. So folgt die Behauptung aus dem Ersetzungsprinzip 5.2.8. □ Aus dem Ersetzungsaxiom ergeben sich eine Reihe wichtiger Folgerungen: Als Erstes können wir den auf S. 131 angekündigten Konsistenzsatz für Kreuzprodukte beweisen, der als Korollar weitere Konsistenzaussagen nach sich zieht.

5.10.58 Konsistenzsatz für Kreuzprodukte *Für Mengen A und B ist $A \times B$ eine Menge.*

Beweis. Siehe Anhang S. 390. □

5.10.59 Korollar

Ist eine R Relation und sind $\mathtt{Vb}(R)$ *und* $\mathtt{Nb}(R)$ *Mengen, so ist auch R eine Menge.* (5.25)

Ist R eine Relation, die eine Menge ist, so sind $\mathtt{Vb}(R)$ *und* $\mathtt{Nb}(R)$ *Mengen.* (5.26)

Ist f eine Funktion und $\mathtt{Db}(f)$ *eine Menge, so ist auch f selbst eine Menge.* (5.27)

Ist f eine Funktion und $\mathtt{Db}(f)$ *eine Unmenge, so ist auch f selbst eine Unmenge.* (5.28)

Ist f eine Injektion von A in B und A eine Unmenge, so ist auch B eine Unmenge. (5.29)

Beweis. Siehe Anhang S. 390. □

5.10.60 Konsistenzsatz für Paare *Ein Paar $\langle a, b\rangle$ ist dann und nur dann ein Individuum, wenn beide Komponenten a und b Individuen sind. Andernfalls ist $\langle a, b\rangle$ eine Unmenge.*

Beweis. Siehe Anhang S. 390–391. □

5.10.61 Definition Für Mengen M und Klassen C bezeichnet

$\mathtt{Func}(M, C)$ [Lesart: Klasse der Funktionen von M in C]

die Klasse, deren Elemente die Funktionen von M in C sind.[348] Diese Klasse wird auch mit

$C \uparrow M$ oder C^M bezeichnet,[349] und heißt

≪die Potenz der Klasse C mit der Menge M≫ oder ≪die M-te Mengenpotenz von C≫.

Bemerkung. Wir können in der *elementaren Theorie* die Bezeichnung $\mathtt{Func}(M, C)$ sinnvollerweise nur dann verwenden, wenn M eine *Menge* ist, während C eine beliebige Klasse sein darf.[350] Sind aber sogar beides, M und C *Mengen*, so können wir schließen, dass dann auch $\mathtt{Func}(M, C)$ eine Menge ist, wie der folgende Satz zeigt.

5.10.62 Konsistenzsatz *Für Mengen A und B ist auch B^A, d. h.* $\mathtt{Func}(A, B)$*, eine Menge.*

---

348 Formal: $\mathtt{Func}(M, C) :\equiv \{f \mid f\colon M \longrightarrow C\}$.

349 Der aufmerksame Leser wird sich fragen, warum man für $\mathtt{Func}(M, C)$ Schreibweisen wie $C \uparrow M$ oder C^M einführt, in der die Reihenfolge von M und C gegenüber der in $\mathtt{Func}(M, C)$ gegebenen vertauscht ist. Dies wird sich klären, wenn die Begriffe der ≪Zahl der Elemente einer endlichen Menge≫ und der ≪Potenz m^n für natürliche Zahlen m und n≫ eingeführt sein werden. Es zeigt sich nämlich, dass wenn die Klassen C und M endlich sind und jeweils c bzw. m Elemente haben, die Klasse $\mathtt{Func}(M, C)$ ebenfalls endlich ist, aber nicht m^c, sondern c^m Elemente besitzt. Siehe hierzu Abschnitt 5.18, vor allem Theorem 5.18.10 S. 251.

350 Würden wir auch für eine Unmenge U die Klasse $\mathtt{Func}(U, C)$ durch $\mathtt{Func}(U, C) :\equiv \{f \mid f\colon U \longrightarrow C\}$ definieren, so enthielte sie nicht – was wir eigentlich wollen – *alle* Funktionen von U in C, sondern nur die *konsistenten* Funktionen von U in C, also diejenigen, die Mengen sind. Aber nach Satz 5.28 gibt es gar keine solchen, da *alle* Funktionen von U in C Unmengen sind. So ergäbe sich $\mathtt{Func}(U, C) = \emptyset$. Für eine Menge M enthält dagegen $\mathtt{Func}(M, C)$ wirklich *alle* Funktionen von M in C, denn wegen Satz 5.27 sind alle Funktionen von M in C selbst *Mengen* und damit *Individuen* (auch wenn C eine Unmenge ist), und können daher Elemente einer Klasse sein.

Beweis. Jedes Element f von $\mathtt{Func}(A, B)$ ist eine Funktion von A in B, also eine Teilklasse von $A \times B$. Da A und B Mengen sind, ist nach dem Konsistenzsatz 5.10.58 auch $A \times B$ eine Menge, so dass auch f nach dem Teilmengenaxiom 5.10.5 eine Menge ist. Insgesamt ist also jedes f aus $\mathtt{Func}(A, B)$ eine Teil*menge* von $A \times B$, und somit ein Element von $\mathcal{P}(A \times B)$. Das aber heißt: $\mathtt{Func}(A, B)$ ist eine Teilklasse der Klasse $\mathcal{P}(A \times B)$, die nach dem Potenzmengenaxiom 5.10.16 nun aber eine Menge ist. Aufgrund des Teilmengenaxioms ist also auch $\mathtt{Func}(A, B)$ eine Menge. □ Für verallgemeinerte Funktionen definieren wir wie für Relationen eine Einschränkung:

5.10.63 Definition Für Familien f und Teilklassen T von $\mathtt{Db}(f)$ bezeichnet

f/T [Lesart: „f eingeschränkt auf T]

die (verallgemeinerte) Funktion, die mit Elementen von T „dieselben Würfe wie f durchführt“ und „sonst nichts tut“.[351] Analog zur Volleinschränkung von Relationen (Definition 5.10.45 S. 135) geht f in f/T über, wenn man die „Aktivität“ der Funktion – hier das „Werfen“ – jenseits von A stoppt und somit auf Elemente von A „einschränkt“. f/C hat folgende Grundeigenschaften:

5.10.64 Theorem Sei f eine (verallgemeinerte) Funktion und $T \subseteq \mathtt{Db}(f)$. Dann gilt:

Für x aus T stimmen die Funktionswerte von f und f/T überein: $f(x) = (f/T)(x)$. (5.30)

Der Definitionsbereich von f/T ist stets T. (5.31)

Alle Werte von f/T sind auch solche von f. (5.32)

Ist f eine gewöhnliche Funktion, so auch f/T, und es gilt $\mathtt{Wb}(f/T) \subseteq \mathtt{Wb}(f)$. (5.33)

Gilt $f : A \longrightarrow B$, so folgt $(f/T) : T \longrightarrow B$. (5.34)

Ist f eine Injektion, so auch f/T. (5.35)

Ist f eine gewöhnliche Funktion und $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \mathtt{Db}(f)$, so folgt $\mathtt{Wb}(f/T_1) \subseteq \mathtt{Wb}(f/T_2)$. (5.36)

Beweis. (5.30), (5.31) und (5.32) folgen unmittelbar aus der Definition.[352]

Zu (5.33). Ist f gewöhnlich, so hat f nur Individuen als Werte, und wegen (5.32) gilt das auch für f/T. So ist auch f/T gewöhnlich. $\mathtt{Wb}(f/T) \subseteq \mathtt{Wb}(f)$ folgt ebenfalls direkt aus (5.32).

Zu (5.34). Wegen $f : A \longrightarrow B$ ist f gewöhnlich, denn die Werte von f liegen in B, sind also Individuen. Also ist nach (5.33) auch f/T gewöhnlich. Um nun $(f/T) : T \longrightarrow B$ zu beweisen, ist zu zeigen, dass $\mathtt{Db}(f/T)$ die Klasse T und dass $\mathtt{Wb}(f/T)$ eine Teilklasse von B ist. Das Erste gilt wegen (5.31). Zum Zweiten beachte man, dass $\mathtt{Wb}(f/T)$ wegen (5.33) eine Teilklasse von $\mathtt{Wb}(f)$ ist, und $\mathtt{Wb}(f)$ wegen $f : A \longrightarrow B$ eine Teilklasse von B. Also ist $\mathtt{Wb}(f/T)$ eine Teilklasse von B.

Zu (5.35). Dass f Injektion ist, bedeutet, dass f keine zwei Objekte auf dasselbe Objekt wirft. f/T führt aber keine anderen Würfe als f aus, also ist auch f/T eine Injektion.

Zu (5.36). Zu zeigen ist, dass jedes Element x von $\mathtt{Wb}(f/T_1)$ auch zu $\mathtt{Wb}(f/T_2)$ gehört. Liegt nun x in $\mathtt{Wb}(f/T_1)$, so bedeutet dies, dass f/T_1 ein Element a von T_1 auf x wirft. Dieses a wird dann auch von f auf x geworfen. Wegen $T_1 \subseteq T_2$ liegt dieses a auch in T_2. Also wird a auch von f/T_2 abgeworfen, und zwar auf dasselbe Element, auf das a durch f geworfen wird: das ist x. Da f/T_2 somit ein Element (nämlich a) auf x wirft, gehört x zu $\mathtt{Wb}(f/T_2)$. □

---

[351] Formal: $f/T :\equiv f \cap (T \times \mathtt{Wb}(f))$.

[352] (5.30) umschreibt formal, dass f/T auf T dasselbe „tut“ wie f. (5.31) umschreibt den ebenfalls in der Definition geforderten Sachverhalt, dass der Bereich, in dem f/T wirksam ist, die Klasse T ist. (5.32) gilt schließlich, weil alle Würfe von f/T auch durch f ausgeführt werden, so dass jeder Wert y von f/T auch durch einen Wurf von f getroffen wird, und somit zu den Werten von f gehört.

Man kann fragen, ob bei der *Vereinigung* von Relationen, Funktionen und Injektionen wieder Relationen, Funktionen und Injektionen herauskommen. Diesbezüglich gilt:

5.10.65 Theorem

Für Relationen R_1, R_2 ist die Vereinigung $R_1 \cup R_2$ eine Relation. (5.37)

Für Funktionen f_1, f_2 ohne gemeinsame Argumente ist $f_1 \cup f_2$ eine Funktion. (5.38)

Für Injektionen h_1, h_2 ohne gemeinsame Argumente und Werte ist $h_1 \cup h_2$ eine Injektion. (5.39)

Beweis. Zu (5.37). Da als Elemente der Relationen R_1 und R_2 nur Individuenpaare auftreten, hat auch $R_1 \cup R_2$ nur Individuenpaare als Elemente und ist darum eine Relation.

Zu (5.38). Nach (5.37) ist $f_1 \cup f_2$ eine Relation. Diese führt *sowohl* die Ausrichtungen von f_1 *als auch* jene von f_2 aus. Haben nun f_1 und f_2 ein gemeinsames Argument x, so könnte x von f_1 auf ein Objekt y_1 und von f_2 auf ein davon verschiedenes Objekt y_2 ausgerichtet werden. Dann würde die Vereinigung $f_1 \cup f_2$ das Argument x auf zwei verschiedene Objekte ausrichten, wäre also nicht linkseindeutig. Haben aber f_1 und f_2 kein gemeinsames Argument x, so kann derartiges nicht geschehen, und $f_1 \cup f_2$ ist eine Funktion.

Zu (5.39). Nach (5.38) ist $h_1 \cup h_2$ eine Funktion. Diese führt *sowohl* die Würfe von h_1 *als auch* jene von h_2 aus. Haben nun h_1 und h_2 einen gemeinsamen Wert y, so könnten die Argumente x_1 und x_2, die von h_1 und h_2 auf y geworfen werden, verschieden sein. Dann würde $h_1 \cup h_2$ zwei Objekte auf denselben Wert y werfen und wäre keine Injektion. Haben aber h_1 und h_2 keinen gemeinsamen Wert y, so kann dies nicht geschehen, und $h_1 \cup h_2$ ist eine Injektion. □

Operationen

Schon immer beschäftigt man sich in der Mathematik mit den arithmetischen Operationen, etwa der Addition oder Subtraktion. Hierbei werden zwei *Zahlen* miteinander „verknüpft“, so dass sich als „Ergebnis“ eine dritte Zahl ergibt. Boole führte auch Operationen ein, die *Klassen* miteinander verknüpfen, etwa die Vereinigung und Differenz von Klassen.[353] Allgemein „bearbeiten“ Operationen Paare von Objekten. So liegt es nahe, eine Operation als eine spezielle Funktion zu verstehen, nämlich eine solche, deren Argumente Paare sind:

5.10.66 Definition Eine *Operation* ist eine Funktion, deren Argumente Paare sind.[354]

Bemerkung. Wenn wir in Definition 5.10.66 das Wort „Funktion“ durch „verallgemeinerte Funktion“ oder „konzeptionelle Funktion“ ersetzen, erhalten wir die Definition einer *verallgemeinerten* bzw. *konzeptionellen Operation*, wobei letztere nur in der erweiterten Theorie zu definieren ist. Gewöhnliche und verallgemeinerte Operationen fasse ich als *kombinatorische Operationen* zusammen. Das Weitere bezieht sich auf gewöhnliche Operationen, kann aber mutatis mutandis auch auf verallgemeinerte oder konzeptionelle übertragen werden.

Wirft die Operation $*$ das Paar $\langle x, y\rangle$ auf z, so nennt man z

≪das *Ergebnis* oder *Resultat* oder *Produkt* der Verknüpfung von x und y durch $*$≫.

Man bezeichnet das Operationsergebnis z auch kurz als

$x * y$ [Lesart: x durch $*$ verknüpft mit y]

[353] Vgl. Boole, *Laws of Thought* Kap. 2 Abschnitt 11 S. 32f, Werke Band 2 S. 35–37.

[354] Formal: $*$ (ist) Operation $:\Leftrightarrow$ $*$ Funktion $\wedge \bigwedge_{x \in \mathrm{Db}(*)} x$ Paar.

und nennt den Zeichenverband $x * y$ einen *Operationsterm*. Es kann hier theoretisch zu einer Verwechslung mit der gleich lautenden *Relationsformel* kommen: $*$ ist ja eine spezielle Funktion und somit auch eine spezielle Relation, weshalb $x * y$ einerseits *als Operationsterm* für das *Objekt* steht, auf welches die Operation $*$ das Paar $\langle x, y\rangle$ wirft, und andererseits *als Relationsformel* für die *Aussage* steht, dass die Relation $*$ das Objekt x auf y ausrichtet.[355]

Die Argumente einer Operation sind Paare $\langle x, y\rangle$. Ist $\langle x, y\rangle$ ein solches Paar, so heißen die Paarkomponenten x und y *Ausgangsobjekte* oder *Faktoren* der Operation, und zwar heißt

x ein *erster oder linker Faktor* oder *Operand*, und
y ein *zweiter oder rechter Faktor* oder *Operator* der Operation.

Man sagt, dass die Operation einen ihrer linken Faktoren x mit einem ihrer rechten Faktoren y (in dieser Reihenfolge) *verknüpft*, wenn $\langle x, y\rangle$ ein Argument der Operation ist. Andernfalls heißen x, y (in dieser Reihenfolge) *nicht miteinander verknüpfbar*.

5.10.67 Definition

$*$ (ist) *partielle Operation in* C $:\Leftrightarrow$ es gibt ein T mit $T \subseteq (C \times C)$ und $T \xrightarrow{*} C$,
$*$ (ist) *totale Operation in* C $:\Leftrightarrow$ $C \times C \xrightarrow{*} C$.

Eine *partielle Operation in* C ist also eine solche, bei der sowohl die Faktoren wie auch das Ergebnis stets in ein und derselben Klasse C liegen, und für eine *totale Operationen in* C gilt zusätzlich, dass sie *jedes* Element aus C mit *jedem* anderen Element aus C verknüpft. Totale Operationen sind hier also als „spezielle partielle“ Relationen aufzufassen.[356]

Beispiele.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Operation und heißt die *leere Operation*.[357]

(2) Die populärsten Operationen sind die „Zahlenoperationen $+, \cdot, -, \div$ (Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division). Es sind also $x + y$, $x \cdot y$, $x - y$, $x \div y$ Operationsterme, und diese bezeichnen Zahlen, nämlich die Ergebnisse der Anwendung der jeweiligen Operationen auf Zahlen x und y (in dieser Reihenfolge).

(3) In der *erweiterten Theorie* können die Faktoren und Ergebnisse von konzeptionellen Operationen auch Unmengen sein. Hier kann man also die Vereinigung, den Durchschnitt und die Differenzmengenbildung $\cup, \cap, \setminus$ von Klassen als Operationen auffassen, deren Faktoren und Ergebnisse beliebige Klassen sind, und die Kompositionen $\looparrowright$ als Operation, deren Faktoren und Ergebnisse beliebige Relationen sind.

Man kann den hier eingeführten Operationsbegriff noch in anderer Weise verallgemeinern:

---

[355] Um diese Verwechslung zu vermeiden, kann man vereinbaren, die üblichen Operationszeichen wie $*, \circ, \cdot, +, -, \div$ *nur* zur Bildung von Operationstermen zu verwenden. Die sauberste Lösung wäre allerdings, dass man für den Fall, dass ein und dasselbe Objekt zugleich Klasse, Relation, Funktion und Operation ist, immer einen ganzen Satz *verschiedener Bezeichnungen* einführt: eine, die das Objekt als Objekt bezeichnet, eine andere, die es als Klasse bezeichnet usw. (siehe auch S. 357).

[356] Dies weicht vom gewöhnlichen Sprachgebrauch ab, wonach Totalität kein Spezialfall von Partialität, sondern das „Partielle“ stets „weniger“ als das „Totale“ ist. Hier ist es wie bei der Teilklassenbeziehung: Die „ganze“ Klasse C ist in der mathematischen Sprache eine „spezielle Teilklasse“ von C.

[357] Nach Beispiel 4 für Funktionen auf S. 141 ist $\emptyset$ zunächst eine Funktion mit dem Definitionsbereich $\emptyset$. Auf diese Funktion trifft aber wegen des Leerklassen-Lemmas 5.9.3 S. 117 die definierende Bedingung für Operationen zu: Jedes Element von $\mathtt{Db}(\emptyset)$ [d. h. von $\emptyset$] ist ein Paar.

- Die bisher betrachteten Operationen heißen *zweistellig*, weil sie jeweils „zwei“ Faktoren in einer bestimmten Reihenfolge „verknüpfen“ und ihnen dann ein Ergebnis zuordnen.

- Entsprechend kann man jede Funktion f als eine *einstellige* Operation auffassen, die jeweils nur *einem* „Faktor“ (nämlich einem ihrer Argumente x) ein Ergebnis zuordnet, nämlich den entsprechenden Funktionswert $f(x)$.

- Weiter kann man jedes Objekt x überhaupt als *nullstellige* Operation auffassen, die ein „Ergebnis ausgibt“ *ohne* Faktoren verknüpfen zu müssen, indem wir x selbst unmittelbar das „Ergebnis“ von x nennen. So gesehen lautet die Philosophie der verallgemeinerten Operationenlehre: „Alles ist Operation“.

- Schließlich kann man *mehrstellige* Operationen mit mehr als zwei Faktoren definieren. Hierzu benötigt man den Begriff einer „geordneten Zusammenfassung“ von mehr als zwei Objekten, der im folgenden Abschnitt bereitgestellt wird. Die entsprechenden Operationen sind dann Funktionen, die diesen Zusammenfassungen ein „Ergebnis“ zuordnen.

Familien

Mit Hilfe der verallgemeinerten Funktionen oder Familien (siehe Definition 5.10.52 S. 140) kann man mehr als zwei Objekte geordnet zusammenfassen. Um eine Reihenfolge zu simulieren, in der „zuerst“ ein Objekt x und „dann“ ein Objekt y kommt, haben wir bisher das Paar $\langle x, y\rangle$ benutzt. Diese Reihenfolge kann auch durch die Familie f simuliert werden, die 1 auf x und 2 auf y wirft (wobei 1 und 2 irgendwelche voneinander verschiedene Individuen seien). Diese Familie soll ein $\{1, 2\}$-*Tupel* heißen, dessen 1-*te Komponente* das Objekt x und dessen 2-*te Komponente* das Objekt y ist. Eine suggestive Bezeichnung für dieses Tupel ist

$$\left\langle \begin{matrix} x & y \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\rangle .$$

Um nun eine Reihenfolge zu simulieren, in der zuerst x, dann y und dann z kommt, kann man analog eine Familie verwenden, die 1 auf x, 2 auf y und 3 auf z wirft, wobei $1, 2, 3$ irgendwelche voneinander verschiedene Individuen sind. Diese Familie f soll ein $\{1, 2, 3\}$-*Tupel* heißen und x bzw. y bzw. z seine 1-*te* bzw. 2-*te* bzw. 3-*te Komponente*. Für das Tupel f kann man

$$\left\langle \begin{matrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\rangle$$

schreiben. Die zu ordnenden Objekte treten hier also jeweils als Werte von Familien auf, und die Elemente $1, 2$ bzw. $1, 2, 3$ des Definitionsbereichs dienen als „Ordnungselemente“ oder *Indizes*. Indem diese durch die Funktion auf die „zu ordnenden“ Objekte x, y bzw. x, y, z geworfen werden, werden sie mit diesen „zusammengestellt“ und erzeugen so unter ihnen eine Ordnung. Es gibt nun keinen Grund, warum man sich bei diesen „Tupeln“ auf solche mit den Indizes $1, 2, 3$ beschränken sollte. In Verallgemeinerung der vorstehenden Überlegungen kann man *eine jede Familie als eine geordnete Zusammenfassung ihrer Werte ansehen*, wobei die von der Familie auf die Werte „geworfenen“ Argumente als Ordnungselemente dienen, welche die Werte „ordnen“, „indizieren“ und gleichsam „nummerieren“ (auch wenn es keine Zahlen sind). Wenn man Familien als geordnete Zusammenfassung ihrer Werte sieht, macht man üblicherweise diese neue Sichtweise durch neue Bezeichnungen deutlich. Im Anschluss an die übliche Nomenklatur bezeichne ich den Definitionsbereich einer Familie als ihre «Indexklasse» und nenne die Familie, wenn I ihre Indexklasse ist, ein «I-Tupel»:

5.10.68 Definition Eine *Familie* ist dasselbe wie eine verallgemeinerte Funktion (wie schon in Definition 5.10.52 S. 140 konstatiert wurde). Benutzt man die Bezeichnung „Familie“, so soll die verallgemeinerte Funktion jedoch als eine geordnete Zusammenfassung ihrer Werte angesehen werden. Der Definitionsbereich einer Familie heißt ihre *Indexklasse*, und eine Familie mit Indexklasse I bezeichnen wir als ein *I-Tupel*.[358]

Ist f eine Familie bzw. ein I-Tupel, benutzt man außerdem folgende Bezeichnungen:

- Die Argumente von f, also die Elemente der Indexklasse I, heißen die *Indizes* von f.
- Wirft f den Index i auf das Objekt x, so heißt x die «i-te Komponente des Tupels f».
- Für die «i-te Komponente von f» benutzt man die schon in Definition 5.10.53 S. 140 eingeführte Indexschreibweise f_i, die symbolisieren soll, dass f die Werte mit den Indizes „nummeriert“.
- Man sagt, dass ein Objekt «zur Familie gehört» oder «in ihr vorkommt», wenn es zu den *Werten* der Familie gehört.
- Nun können *mehrere* Indizes auf *dasselbe* Objekt x fallen, d. h. es kann verschiedene Indizes i, j geben, so dass $x = f_i$ und zugleich $x = f_j$. In diesem Fall sagt man, dass die Familie das Objekt x «mehrfach aufzählt» und dieses in ihr «mehrfach vorkommt». Die Familie nennt man dann eine «Familie mit Wiederholung».

Familien bzw. Tupel können nun also nicht nur zwei, sondern mehrere Objekte geordnet zusammenfassen, und zwar auch «unendlich viele», sogar «inkonsistent viele», und im Extremfall so viele, wie es überhaupt Individuen gibt.[359] Auch ist es bemerkenswert, dass sich mit Tupeln auch Unmengen *geordnet* zusammenfassen lassen,[360] die wir *ungeordnet nicht* zusammenfassen können, weil sie nicht Elemente einer gewöhnlichen Klasse sein können. Auf der anderen Seite kann man auch *ein einziges* Individuum oder auch *null* Individuen in einem Tupel „zusammenfassen“, indem man als Indexklasse eine einelementige Menge oder die leere Menge wählt. Das einzige $\emptyset$-Tupel ist die leere Funktion, also die leere Menge, die dann auch das *leere Tupel* heißt. Praktisch wichtig sind besonders diejenigen Tupel, die *endlich viele* Komponenten haben; auf diese kommen wir in Abschnitt 5.18 zurück.

Je nachdem, ob die in einer Familie zusammengefassten Objekte Individuen, Unmengen, Klassen, Mengen usw. sind, spricht man von einer

Familie von Individuen, *Unmengenfamilie*, *Klassenfamilie*, *Mengenfamilie* usw.

Mit Mengenfamilien kann man ebenso wie mit Mengenklassen mehrere Mengen zusammenfassen, um sie dann zu vereinigen oder zum Schnitt zu bringen. Dabei können die Operationen über Mengenfamilien zu solchen über Klassenfamilien verallgemeinert werden, die auch Unmengen involvieren.[361] Im Folgenden werden solche Operationen besprochen.

Klassenbildung über Mengenklassen und Klassenfamilien

Für Mengenklassen $\mathfrak{M}$ war die Vereinigungs- bzw. Schnittklasse $\bigcup \mathfrak{M}$ bzw. $\bigcap \mathfrak{M}$ jeweils eine Verallgemeinerung der Vereinigung bzw. des Schnitts *zweier* Mengen $A \cup B$ bzw. $A \cap B$. Es soll nun

[358] Formal: f (ist) I-Tupel $:\Leftrightarrow$ f Familie $\wedge\ \mathtt{Db}(f) = I$.

[359] Denn als Indexbereich des Tupels kann man ja die Klasse $\mathbb{D}$ aller Individuen nehmen.

[360] Hierzu ist als Tupel eine unmengenwertige Funktion zu nehmen.

[361] Dagegen kann man (in der elementaren Theorie) von Mengenklassen keineswegs zu „Klassenklassen“ übergehen, die Unmengen als Elemente hätten.

eine ähnliche Verallgemeinerung des Kreuzprodukts $A \times B$ eingeführt werden: das Kreuzprodukt $\times\,\mathfrak{M}$ über eine Mengenklasse $\mathfrak{M}$. Während das Kreuzprodukt *zweier* Mengen Objekte mit *zwei* Komponenten enthält, wobei je eine Komponente aus A und eine aus B stammt, sollen die Elemente von $\times\,\mathfrak{M}$ Objekte sein, die *so viele* Komponenten haben, wie es Mengen in $\mathfrak{M}$ gibt, wobei aus jeder Menge M von $\mathfrak{M}$ je eine Komponente entnommen wird. Hierzu eignen sich $\mathfrak{M}$-*Tupel*, die für jede in $\mathfrak{M}$ enthaltene Menge M als M-te Komponente ein Element von M haben. Jedes solche $\mathfrak{M}$-Tupel f ist eine gewöhnliche Funktion, denn f wirft Individuen auf Individuen, nämlich jede *Menge* M aus $\mathfrak{M}$ auf ein *Element* von M. Wenn nun *die Mengenklasse* $\mathfrak{M}$ *selbst eine Menge, also eine Mengenmenge ist*, so ist also der Definitionsbereich $\mathfrak{M}$ von f eine Menge, und aufgrund von Satz 5.27 S. 142 ist dann f auch selbst eine Menge und somit ein *Individuum*. Also gibt es dann eine Klasse, die genau diese $\mathfrak{M}$-Tupel enthält. Ist dagegen $\mathfrak{M}$ *keine* Menge, so sind die $\mathfrak{M}$-Tupel nach Satz 5.28 S. 142 *Unmengen*, und dann existiert *keine* Klasse, welche die $\mathfrak{M}$-Tupel enthält. Aus diesem Grund wird das Kreuzprodukt nicht für alle Mengenklassen, sondern nur für Mengenmengen den intendierten Sinn bekommen, weshalb ich die Definition unter der Bedingung formuliere, dass $\mathfrak{M}$ eine Mengenmenge ist.

5.10.69 Definition Für Mengenmengen $\mathfrak{M}$ bezeichnet

$\times\,\mathfrak{M}$ [Lesart: Kreuzprodukt über $\mathfrak{M}$]

die Klasse $\{f \mid f$ ist ein $\mathfrak{M}$-Tupel und für jedes M aus $\mathfrak{M}$ gilt $f_M \in M\}$, deren Elemente also die $\mathfrak{M}$-Tupel f sind, deren M-te Komponente f_M (für jedes M aus $\mathfrak{M}$) stets in M liegt.[362]

Bemerkung. Besondere Fälle liegen vor, wenn die Mengenmenge $\mathfrak{M}$ entweder die leere Menge als Element *enthält* oder selbst die leere Menge *ist*:

- *Enthält* nämlich $\mathfrak{M}$ die leere Menge als Element, so ist die Bedingung «für jedes M aus $\mathfrak{M}$ gilt $f_M \in M$» für kein Tupel f erfüllt.[363] Also ist dann $\times\,\mathfrak{M} = \emptyset$.
- *Ist* $\mathfrak{M}$ *selbst* die leere Menge $\emptyset$, so ist $\emptyset$ ein (und zwar das einzige) Element von $\mathfrak{M}$. Denn die leere Funktion $\emptyset$ ist ein (und zwar das einzige) $\emptyset$-Tupel, und wegen des Leerklassen-Lemmas 5.9.3 S. 117 gilt «für jedes M aus $\emptyset$ gilt $\emptyset_M \in M$». So ist $\times\,\mathfrak{M}$ die einelementige Menge $\{\emptyset\}$.

Schließlich ist bemerkenswert, dass $\times\,\mathfrak{M}$ für Mengenmengen $\mathfrak{M}$ stets eine Menge ist:

5.10.70 Konsistenzsatz für Kreuzprodukte über Mengenmengen *Für jede Mengenmenge* $\mathfrak{M}$ *ist* $\times\,\mathfrak{M}$ *eine Menge.*

Beweis. Jedes f aus $\times\,\mathfrak{M}$ ist eine Funktion mit der Menge $\mathfrak{M}$ als Definitionsbereich. Ferner liegen die Werte von f immer in einem Element M von $\mathfrak{M}$ und somit in der Klasse $\bigcup\mathfrak{M}$, die nach dem Vereinigungsmengenaxiom 5.10.19 ebenfalls eine Menge ist. Die Elemente von f sind also Paare mit erster Komponente in $\mathfrak{M}$ und zweiter Komponente in $\bigcup\mathfrak{M}$: also Paare, die in $\mathfrak{M} \times \bigcup\mathfrak{M}$ liegen. Diese Klasse ist nach 5.10.58 eine Menge. So liegen alle Elemente von f in der Menge $\mathfrak{M} \times \bigcup\mathfrak{M}$. Folglich ist f eine Teilklasse dieser Menge, und nach Satz 5.16 S. 123 muss f dann ein Element der Potenzklasse $\mathcal{P}(\mathfrak{M} \times \bigcup\mathfrak{M})$ sein. Diese wiederum ist nach dem Potenzmengenaxiom 5.10.16 eine Menge. So haben wir insgesamt gezeigt: Jedes Element f von $\times\,\mathfrak{M}$ liegt in der Menge $\mathcal{P}(\mathfrak{M} \times \bigcup\mathfrak{M})$. Das aber heißt, dass $\times\,\mathfrak{M}$ eine Teilklasse dieser Menge ist, also nach dem Teilmengenaxiom 5.10.5 selbst eine Menge. □

---

362 Formal: $\times\,\mathfrak{M} :\equiv \{f \mid f\ \mathfrak{M}\text{-Tupel} \wedge \bigwedge_{M \in \mathfrak{M}} f_M \in M\}$.

363 Würde diese Bedingung für ein f gelten, so müsste nämlich $f_\emptyset \in \emptyset$ sein, d. h. f müsste eine Funktion sein, die $\emptyset$ auf ein Element von $\emptyset$ wirft; aber ein solches Element gibt es nicht.

Wir haben nun neben den so genannten „kleinen“ Klassenoperationen $\cup, \cap, \times$, die jeweils *zwei* Klassen eine neue Klasse zuordnen, entsprechende „große“ Operationen $\bigcup, \bigcap, \bigtimes$ definiert, die jeweils einer Mengenklasse eine Klasse zuordnen. Wenn man die Mengenklasse als stellvertretend für die Vielheit aller in ihr enthaltenen Mengen ansieht, sind also $\bigcup, \bigcap, \bigtimes$ gewissermaßen „Operationen“, mit welchen man mehr als zwei Mengen miteinander verknüpfen kann. Allerdings sind diese Operationen nicht schlechterdings eine Verallgemeinerung für die „kleinen“ Operationen, denn sie können nur *Mengen* verknüpfen, während $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \times B$ für beliebige *Klassen* definiert war. Da wir jetzt aber den auf S. 146–147 eingeführten Begriff der Klassenfamilie zur Verfügung haben, können wir nun auch eine Vereinigung, einen Schnitt und ein Kreuzprodukt von mehr als zwei *beliebigen Klassen* einführen, nämlich als Vereinigung, Schnitt und Kreuzprodukt über allgemeine *Klassenfamilien*.

5.10.71 Definition Ist $f := \langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Klassenfamilie, so soll

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} \theta(i) \quad \text{oder} \quad \bigcup\limits_{i\in I} \theta(i) \quad \text{[Lesart: Vereinigung der Klassen } \theta(i) \text{ für } i \in I\text{]}$$

die Klasse $\{x \mid \text{es gibt ein } i \text{ aus } I\text{, so dass } x \in f_i\}$ bezeichnen, deren Elemente man also erhält, wenn man die Elemente aller Klassen der Familie zusammentut.[364] Man nennt diese Klasse auch *die Vereinigung über der Klassenfamilie* f.

Bemerkung. Ist die Klassenfamilie f *nicht unmengenwertig*, so sind die hier vereinigten Klassen bloß Mengen, und zwar diejenigen, die im Wertebereich $\mathtt{Wb}(f)$ von f liegen. Dieser Wertebereich ist dann also eine Mengenklasse, und es gilt $\bigcup_{i\in I} \theta(i) = \bigcup \mathtt{Wb}(f)$. Im *allgemeinen Fall* aber können zu den Werten von f auch Unmengen gehören, die sich nicht zu einer Klasse $\mathtt{Wb}(f)$ zusammensetzen können, und $\mathtt{Wb}(f)$ ist dann nicht wohldefiniert. Daher kann man $\bigcup_{i\in I} \theta(i)$ nicht immer mit $\bigcup \mathtt{Wb}(f)$ gleichsetzen. Durch die obige Definition haben wir $\bigcup$ als einen *neuen Operator* eingeführt,[365] der die Eigenschaft hat, dass wann immer $\langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Klassenfamilie bezeichnet,[366] $\bigcup_{i\in I} \theta(i)$ ein Klasse kennzeichnet. Zu beachten ist nun, dass das Zeichen $\bigcup$, wenn wir es in $\bigcup \mathfrak{M}$ (für Mengenklassen $\mathfrak{M}$) gebrauchen, ein einstelliger Funktor ist, während es in $\bigcup_{i\in I} \theta(i)$ als Operator dient, weshalb für beide Verwendungen eigentlich verschiedene Zeichen genommen werden müssten (was ich dadurch andeute, dass ich für den Operator den Fettdruck verwende). Dieselbe Bemerkung gilt für die Zeichen $\bigcap$ und $\bigtimes$, die wir bisher als einstelligen Funktor verwendet haben, und die nun auch im Fettdruck als Operatoren dienen sollen:

5.10.72 Definition Ist $f := \langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Klassenfamilie, so soll

$$\textstyle\bigcap_{i\in I} \theta(i) \quad \text{oder} \quad \bigcap\limits_{i\in I} \theta(i) \quad \text{[Lesart: Schnitt der Klassen } \theta(i) \text{ für } i \in I\text{]}$$

die Klasse $\{x \mid \text{für jedes } i \text{ aus } I \text{ gilt } x \in f_i\}$ bezeichnen, deren Elemente die Individuen sind, die allen Klassen der Familie zugleich angehören.[367] Man nennt diese Klasse auch den *Schnitt über der Klassenfamilie* f.

Bemerkung. Ist die Klassenfamilie f *nicht unmengenwertig*, so gilt $\bigcap_{i\in I} \theta(i) = \bigcap \mathtt{Wb}(f)$, andernfalls ist man auf obige Definition angewiesen. – Im Sonderfall $I = \emptyset$ trifft die Bedingung ≪für jedes

---

364 Formal: $\bigcup_{i\in I} \theta(i) :\equiv \{x \mid \bigvee_{i\in I} x \in \theta(i)\}$.

365 Zu Operatoren siehe S. 112. In der streng formalen Logik sollte man aufgrund der dort üblichen Operatorschreibweise ≪$\bigcup\ i\ I\ \theta$≫ statt ≪$\bigcup_{i\in I} \theta$≪ schreiben. Analoges gilt für die noch einzuführenden Operatoren $\bigcap$ und $\bigtimes$.

366 Diese Bedingung bedeutet im Einzelnen: I ist ein geschlossener Ausdruck, der eine Klasse bezeichnet, und $\theta(i)$ ein nach Interpretation von i geschlossener Term, derart dass gilt: ≪$\bigwedge_{i\in I} i$ ist eine Klasse≫.

367 Formal: $\bigcap_{i\in I} \theta(i) :\equiv \{x \mid \bigwedge_{i\in I} x \in \theta(i)\}$.

i aus I gilt $x \in f_i$≫ aufgrund des Leerklassen-Lemmas 5.9.3 S. 117 für *jedes beliebige* Individuum x zu, weshalb $\bigcap_{i\in\emptyset} \theta(i) = \mathbb{D}$ ist.[368]

5.10.73 Definition Ist $f := \langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Klassenfamilie und I Menge, so soll

$$\bigtimes_{i\in I} \theta(i) \quad \text{oder} \bigtimes_{i\in I} \theta(i) \quad [\text{Lesart: Kreuzprodukt der Klassen } \theta(i) \text{ für } i \in I]$$

die Klasse $\{f \mid f$ ist ein I-Tupel und für jedes i aus I gilt $f_i \in \theta(i)\}$ bezeichnen, deren Elemente also die I-Tupel sind, deren i-te Komponente (für i aus I) in $\theta(i)$ liegt.[369] Man nennt diese Klasse auch das *Kreuzprodukt über der Klassenfamilie* f.

Die Elemente von $\bigtimes_{i\in I} \theta(i)$ sollen also I-Tupel sein, deren Komponenten Elemente von Klassen und darum Individuen sind. Es sind also gewöhnliche Funktionen mit Definitionsbereich I. Da wir gefordert haben, dass I eine *Menge* ist, steht aufgrund von Satz 5.27 S. 142 fest, dass diese I-Tupel selbst Mengen sind und somit tatsächlich eine Klasse existiert, die diese I-Tupel enthält. *Hätten wir zugelassen, dass I eine Unmenge ist*, wären dagegen alle nichtleeren auf I definierten Funktionen gemäß Satz 5.28 S. 142 selbst Unmengen und könnten nicht Elemente einer Klasse sein. Aus diesem Grund wollen wir die Bezeichnung $\bigtimes_{i\in I} \theta(i)$ nur einsetzen, wenn I eine Menge ist.[370]

Bemerkung (vgl. die analoge Bemerkung nach der Definition 5.10.69 von $\bigtimes \mathfrak{M}$):

- *Enthält* die Klassenfamilie $f := \langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ die leere Klasse, d. h. ist $I \neq \emptyset$ und ist für mindestens ein i aus I die Klasse $\theta(i)$ leer, so ist $\bigtimes_{i\in I} \theta(i) = \emptyset$.

- *Ist* die Klassenfamilie selbst „leer“, d. h. ist I die leere Menge, so ist die leere Funktion ein (und das einzige) I-Tupel, und wegen des Leerklassen-Lemmas ist ≪für jedes i aus I gilt $f_i \in \theta(i)$≫ wahr, so dass dann $\bigtimes_{i\in I} \theta(i)$ die einelementige Menge $\{\emptyset\}$ ist.

Die hier eingeführten Vereinigungen, Schnitte und Kreuzprodukte *über Klassenfamilien* sind so allgemein, dass wir mit ihnen die entsprechenden Operationen *über Mengenklassen* definieren könnten. Ist nämlich $\mathfrak{M}$ eine Mengenklasse, so ist $\langle i \in \mathfrak{M} \mapsto i\rangle$ eine Klassenfamilie und es ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen, dass $\bigcup_{i\in\mathfrak{M}} i$ dasselbe wie $\bigcup \mathfrak{M}$ ist, ebenso $\bigcap_{i\in\mathfrak{M}} i$ dasselbe wie $\bigcap \mathfrak{M}$, und $\bigtimes_{i\in\mathfrak{M}} \mathfrak{M}$ dasselbe wie $\bigtimes \mathfrak{M}$. Ebenso ist unmittelbar einsichtig, dass wenn M Menge und C Klasse ist, die Klasse $\mathtt{Func}(M, C)$ aller Funktionen von M in C (siehe Definition 5.10.61) mit $\bigtimes_{i\in M} C$ identisch ist. Wir können also festhalten:

5.10.74 Theorem *Für Mengenklassen $\mathfrak{M}$, Mengen M und Klassen C gilt:*
$\bigcup \mathfrak{M} = \bigcup_{i\in\mathfrak{M}} i$, $\bigcap \mathfrak{M} = \bigcap_{i\in\mathfrak{M}} i$, $\bigtimes \mathfrak{M} = \bigtimes_{i\in\mathfrak{M}} i$ *und* $\mathtt{Func}(M, C) = \bigtimes_{i\in M} C$.

Auch für die Operationen über Klassenfamilien gibt es einen Konsistenzsatz:

5.10.75 Konsistenzsatz für Klassenbildungen über Familien *Ist $f := \langle i \in I \mapsto \theta\rangle$ eine Mengenfamilie und $I \in \mathbb{M}$, so sind $\bigcup_{i\in I} \theta(i), \bigcap_{i\in I} \theta(i)$ und $\bigtimes_{i\in I} \theta(i)$ Mengen.*

Beweis. Siehe Anhang S. 391. □

---

368 Man vergleiche hierzu auch den analogen Fall des Schnitts über die leere Mengenklasse in der Bemerkung nach Definition 5.10.22 S. 126.

369 Formal: $\bigtimes_{i\in I} \theta(i) :\equiv \{f \mid f\ I\text{-Tupel} \wedge \bigwedge_{i\in I} f_i \in \theta(i)\}$.

370 Vgl. zu dieser Beschränkung die analoge Beschränkung des Gebrauchs von $\bigtimes \mathfrak{M}$ auf den Fall, dass $\mathfrak{M}$ eine Mengen*menge* ist (oben S. 148).

Zusammenfassung

Wir haben nun sämtliche Standard-Klassenbildungen der Mengenlehre, nämlich

$$A \cup B,\ \ A \cap B,\ \ A \setminus B,\ \ A \times B,\ \ \mathtt{Func}(A,B)\ \ \bigcup \mathfrak{M},\ \ \bigcap \mathfrak{M},\ \ \times \mathfrak{M},\ \ \bigcup_{i \in I} \theta(i),\ \ \bigcap_{i \in I} \theta(i) \text{ und } \bigtimes_{i \in I} \theta(i)$$

nebst den zugehörigen Konsistenzsätzen besprochen. Diese Konsistenzsätze, wie wir letztlich auf einige wenige anschauliche Grundlagen (vor allem auf das Teilprinzip 5.2.7 S. 75 und das Ersetzungsprinzip 5.2.8 S. 76) zurückführen konnten, sagen im Wesentlichen immer dasselbe: *Wenn alle Klassen, die in den Aufbau einer Klasse eingehen* (nämlich A, B, $\mathfrak{M}$, I und alle $\theta(i)$ für $i \in I$) *Mengen sind, so ist auch die neu gebildete Klasse stets wieder eine Menge.* Als *Ausnahmen* hiervon haben wir allerdings den Schnitt über die leere Menge sowie die (absolute) Komplementbildung kennengelernt;[371] beides wird in der Mathematik vermieden.[372] Jedoch können in unserem System auch dann keine Widersprüche entstehen, wenn eine Unmenge herauskommt, weil wir alle hierzu führenden Schritte intuitiv klar abgesichert haben.

Es fehlt nun noch eine weitere, von den bisherigen sehr verschiedene „nicht-konstruktive“ Art der Klassenbildung, um welche viel gestritten worden ist, und die sich auf ein neues Axiom, nämlich das berüchtigte *Auswahlaxiom* stützt.

[371] Siehe die Bemerkungen nach den Definitionen 5.10.22 S. 126 und 5.10.72 S. 149 (Schnittklasse) und Satz 5.10.28 S. 127 (Komplementbildung).

[372] Statt der hier vorgestellten „absoluten“ Komplementbildung wird nur ein sog. „relativiertes“ Komplement gebildet, d. h. man setzt $\complement A$ nicht mit $\mathbb{D} \setminus A$, sondern mit $G \setminus A$ gleich, wobei G die „Grundmenge“ ist, die den Rahmen des jeweiligen mathematischen Diskurses bildet.

5.11 Das Auswahlaxiom

Zur Formulierung des Auswahlaxioms (axiom of choice) in seiner gewöhnlichen Form wird der Begriff der *Disjunktheit* benötigt, den man nacheinander auf drei Ebenen definieren kann:

5.11.1 Definition

(1) *Klassen* A und B heißen *disjunkt*, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

(2) *Eine Mengenklasse* $\mathfrak{M}$ heißt (oder dessen Mengen heißen) *disjunkt*, wenn je zwei verschiedene Mengen A, B aus $\mathfrak{M}$ stets disjunkt sind.

(3) *Eine Klassenfamilie* f heißt (oder deren Klassen heißen) *disjunkt*, wenn für je zwei verschiedene Indizes i, j die Klassen f_i und f_j stets disjunkt sind.[373]

Das Auswahlaxiom basiert nun auf folgender Intuition. Man stelle sich eine disjunkte Mengenmenge $\mathfrak{M}$ vor, die nur nichtleere Mengen enthält. Am besten stellt man sich die zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Mengen als eine Schar von Schalen vor, in denen gewisse Kugeln liegen, welche die Elemente dieser Mengen repräsentieren. In jeder Schale ist mindestens eine Kugel (da keine der Mengen von M leer ist), und alle stehen räumlich getrennt nebeneinander (da die Mengen disjunkt sind). Dann kann man gleichzeitig aus jeder der Schalen *je eine* Kugel herausnehmen und diese herausgenommenen Kugeln zu einer neuen Menge zusammenstellen. Es existiert also offensichtlich eine Menge A, die mit jeder Menge M des Systems $\mathfrak{M}$ jeweils genau ein Element m gemeinsam hat. Eine solche Menge A nennt man eine *Auswahlklasse* von $\mathfrak{M}$, weil man sie sich dadurch entstanden denken kann, dass man aus jeder Menge der Mengenklasse $\mathfrak{M}$ je ein Element „ausgewählt“ und die ausgewählten Elemente dann zu einer Menge vereinigt hat.

Beispiel. Sei $\mathfrak{M}$ die Mengenmenge $\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$, wobei a, b, c, d, e, f voneinander verschiedene Individuen seien. Dieses $\mathfrak{M}$ besitzt dann offenbar mehrere Auswahlmengen, z. B. $\{a, c, e\}$, $\{b, d, f\}$ und $\{a, c, f\}$.

Das klassische Auswahlaxiom ist nun die Behauptung, dass in der geschilderten Situation stets *mindestens eine* Auswahlmenge existiert. Es wurde von Ernst Zermelo 1904 erstmals formuliert. Zuvor hatte man es, wie Zermelo konstatiert, „in der mathematischen Deduktion überall unbedenklich angewendet“, ohne es namhaft zu machen.[374] 1908 fügte Zermelo das Axiom in sein „Axiomensystem“ für die Mengenlehre ein.[375]

5.11.2 Klassisches Auswahlaxiom Sei $\mathfrak{M}$ eine Mengenklasse, die (a) nur *nichtleere* Mengen enthält, (b) disjunkt ist und (c) eine Menge ist.[376] *Dann existiert eine Auswahlmenge von* $\mathfrak{M}$*, d. h. eine Menge* A*, die mit jeder Menge* M *von* $\mathfrak{M}$ genau ein *Element gemeinsam hat.*

---

[373] Formal:

A und B (sind) disjunkt $:\Leftrightarrow\ A \cap B = \emptyset$,

$\mathfrak{M}$ (ist) disjunkte Mengenklasse $:\Leftrightarrow\ \bigwedge_{X \in \mathfrak{M}} \bigwedge_{Y \in \mathfrak{M}} (X \neq Y \ \rightarrow\ X \cap Y = \emptyset)$

f (ist) disjunkte Klassenfamilie $:\Leftrightarrow\ \bigwedge_{i \in \mathrm{Db}(f)} \bigwedge_{j \in \mathrm{Db}(f)} (\ i \neq j \ \rightarrow\ f_i \cap f_j = \emptyset)$

[374] Zermelo, *Beweis* S. 516.

[375] Vgl. Zermelo, *Grundlagen der Mengenlehre* Axiom VI S. 266. Bereits 1904 sprach *Zermelo* von dem „Prinzip, dass es auch für eine unendliche Gesamtheit von Mengen immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente entspricht“ (Zermelo, *Beweis* S. 516).

[376] Zermelo hat nicht eigens gefordert, dass die Mengenklasse eine Menge ist, weil in seiner Mengenlehre ohnehin nur Mengen vorkommen.

Plausibilitätsbetrachtung. Das Auswahlaxiom scheint eine *pure Selbstverständlichkeit* auszudrücken, und für ZERMELO war es ein „logisches Prinzip“, das man „nicht auf ein noch einfacheres zurückführen“ kann.[377] Es lässt sich in drei einfachen Schritten plausibel machen:
1. Wir wählen in Gedanken aus jeder der Mengen von $\mathfrak{M}$ je ein Element m aus: Das ist möglich, weil alle Mengen von $\mathfrak{M}$ nichtleer sind.
2. Da $\mathfrak{M}$ disjunkt ist, kann keines der ausgewählten Elemente zwei verschiedenen Mengen von $\mathfrak{M}$ zugleich angehören. Also haben wir aus jeder Menge *nur ein* Element gewählt, und für die ausgewählten Elemente existiert nach unserem nicht-formalen Komprehensionstheorem für Klassen (5.3.3 S. 81) eine sie enthaltende Klasse A. Das ist bereits eine Auswahlklasse von $\mathfrak{M}$.
3. Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass A eine Menge ist. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{M}$ eine Menge. Werfen wir nun jede Menge M des Systems $\mathfrak{M}$ jeweils auf das aus M ausgewählte Element, so treffen wir genau die Elemente von A. Die Funktion f also, die diese Würfe durchführt (sie existiert nach der nicht-formalen Version des Komprehensionstheorems 5.10.55 S. 140) hat als Definitionsbereich die *Menge* $\mathfrak{M}$ und als Wertebereich die Klasse A. Die Existenz dieser Funktion f zeigt nach dem Ersetzungsaxiom 5.10.57, dass auch A eine *Menge* ist. □

Bevor ich nun den Streit über das Auswahlaxiom kommentiere, möchte ich noch auf einige Varianten des Axioms hinweisen, die teils mit der genannten Version äquivalent, teils aber noch umfassender sind. Die meisten von ihnen stützen sich auf den Begriff der Auswahlfunktion:

5.11.3 Definition Sei $\mathfrak{M}$ eine Mengenklasse und F eine Klassenfamilie mit Indexklasse I. Dann versteht man unter einer *Auswahlfunktion der Mengenklasse* $\mathfrak{M}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathfrak{M}$ (also ein $\mathfrak{M}$-Tupel), derart dass diese Funktion jede Menge M der Mengenklasse auf ein Element von M wirft. – Ebenso versteht man unter einer *Auswahlfunktion der Klassenfamilie* F eine Funktion mit Definitionsbereich I(also ein I-Tupel), derart dass diese Funktion jeden Index i der Familie auf ein Element der Klasse F_i wirft.[378]

Man mag sich vorstellen, dass eine Auswahlfunktion f von $\mathfrak{M}$ aus jeder Menge M von $\mathfrak{M}$ ein Element als Funktionswert $f(M)$ „auswählt“. Analog wählt sich jede Auswahlfunktion f der Familie F aus jeder Klasse F_i von F ein Element als Funktionswert $f(i)$ aus. Wir können nun die folgenden drei Versionen des Auswahlaxioms formulieren:

5.11.4 Versionen des klassischen Auswahlaxioms Die folgenden drei Sätze können auf der Grundlage der übrigen Axiome als äquivalent erwiesen werden, d. h. wenn einer von ihnen wahr ist, sind es auch die beiden anderen:

(1) *Jede disjunkte Mengenmenge $\mathfrak{M}$ mit $\emptyset \notin \mathfrak{M}$ besitzt eine Auswahlmenge.*

(2) *Jede Mengenmenge $\mathfrak{M}$ mit $\emptyset \notin \mathfrak{M}$ besitzt eine Auswahlfunktion.*

(3) *Jede Familie F nichtleerer Mengen, für die $\mathtt{Db}(F)$ eine Menge ist, besitzt eine Auswahlfunktion.*

---

377 ZERMELO, *Beweis* S. 516.

378 Formal: f (ist) Auswahlfunktion der Mengenklasse $\mathfrak{M}$ $:\Leftrightarrow$ f $\mathfrak{M}$-Tupel $\wedge \bigwedge_{M\in\mathfrak{M}} f_M \in M$.

f (ist) Auswahlfunktion der Klassenfamilie F $:\Leftrightarrow$ f I-Tupel $\wedge \bigwedge_{i\in I} f(i) \in F_i$.

Ist $\mathfrak{M}$ eine Mengen*menge*, so sind die Auswahlfunktionen von $\mathfrak{M}$ offenbar einfach die Elemente von $\bigtimes \mathfrak{M}$.
Ist die Mengenklasse $\mathfrak{M}$ aber eine Unmenge, sind wir auf obige Definition angewiesen.
Ist I eine Menge, so sind die Auswahlfunktionen von F offenbar einfach die Elemente von $\bigtimes_{i\in I} F_i$.
Ist I aber eine Unmenge, sind wir auf die obige Definition angewiesen.

(1) ist nur eine Kurzform der klassischen Formulierung 5.11.2 des Axioms. An den Formulierungen (2) und (3) ist aber bemerkenswert, dass hier auf die Forderung der Disjunktheit verzichtet werden kann. Die *Äquivalenz* der drei Versionen ist im Anhang auf S. 391–392 bewiesen. Die *Wahrheit* von (2) und (3) aber lässt sich mit dem nicht-formalen Komprehensionsaxiom einfach wie folgt einsehen:

Plausibilitätsbetrachtung für (2). Da $\mathfrak{M}$ nichtleer ist, können wir für jede Menge M von $\mathfrak{M}$ ein Element von M aussuchen, und dann M jeweils auf dieses Element werfen. Nach dem Komprehensionstheorem 5.10.55 S. 140 für Funktionen existiert also eine Funktion f, die genau diese Würfe ausführt. Dieses f ist eine Auswahlfunktion von $\mathfrak{M}$.

Plausibilitätsbetrachtung für (3). Da zur Familie F keine nichtleeren Mengen gehören, können wir zu jedem Index i ein Element der Menge F_i aussuchen, und dann i auf dieses Element werfen. Wieder existiert nach dem Komprehensionstheorem für Funktionen eine Funktion f, die genau diese Würfe ausführt. Dieses f ist eine Auswahlfunktion von F. □

Sehen wir uns nun die Begründung für die drei Versionen an, so fällt auf, dass die VORAUSSETZUNG, dass die Mengenklasse $\mathfrak{M}$ bzw. die Indexklasse von F eine *Menge* ist, gar nicht benötigt wird, um die Existenz einer Auswahlklasse bzw. Auswahlfunktion plausibel zu machen. Im Zusammenhang mit Version (1) benötigt man diese Voraussetzung nur für den Nachweis, dass die Auswahlklasse eine Menge ist, außerdem ist sie dann erforderlich, um die Äquivalenz von (2) und (3) mit (1) nachzuweisen. So rechtfertigen die bisherigen Überlegungen auch die folgenden allgemeineren „Auswahlaxiome“, die wieder untereinander äquivalent sind, also als Versionen eines einzigen neuen Axioms, des sog. „globalen Auswahlaxioms“ gelten können:

5.11.5 Versionen des globalen Auswahlaxioms

(4) *Jede disjunkte Mengenklasse $\mathfrak{M}$ mit $\emptyset \notin \mathfrak{M}$ hat eine Auswahlklasse.*

(5) *Jede Klasse $\mathfrak{M}$ mit $\emptyset \notin \mathfrak{M}$ hat eine Auswahlfunktion.*

(6) *Jede Familie F nichtleerer Mengen hat eine Auswahlfunktion.*

Dass diese Sätze untereinander äquivalent sind, beweist man genauso wie die Äquivalenz der Versionen des klassischen Auswahlaxioms (siehe Anhang S. 391–392). Außerdem ist sofort klar, dass aus (4) die Version (1) des klassischen Axioms folgt,[379] ebenso wie aus (5) sofort die Version (2) und aus (6) die Version (3) folgt. So ergibt sich also aus dem globalen Auswahlaxiom das klassische Auswahlaxiom, aber natürlich nicht umgekehrt. Daher nennt man das globale Auswahlaxiom „stärker“ als das klassische. Das globale Auswahlaxiom tauchte erstmalig im Axiomensystem von GÖDEL auf, und zwar in einer von (4), (5) und (6) abweichenden, sehr eleganten Version.[380] GÖDEL forderte nämlich nur die Existenz einer einzigen, dafür aber „globalen“ Auswahlfunktion:

5.11.6 Globales Auswahlaxiom (Gödelsche Version)

(7) *Es gibt eine Auswahlfunktion $\mathfrak{f}$ der Mengenklasse $\mathbb{M} \setminus \{\emptyset\}$ aller nichtleeren Mengen.*

Diese Version ist mit den anderen drei Versionen des globalen Auswahlaxioms äquivalent. Aus (7) folgt nämlich sofort (5): Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Mengenklasse nichtleerer Mengen, so ist offenbar die Einschränkung $\mathfrak{f}/\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{M}$ (vgl. Definition 5.10.63) eine Auswahlfunktion von $\mathfrak{M}$. Umgekehrt

[379] Hat jede disjunkte Mengenklasse (welche die leere Menge nicht enthält) eine Auswahlklasse, so gilt dies erst recht für jede disjunkte ($\emptyset$ nicht enthaltende) Mengenmenge. Jede Auswahl*klasse* einer Mengenmenge aber ist eine *Menge*, wie in Schritt 3 unserer Plausibilitätsbetrachtung für die Version (1) des Axioms gezeigt wurde.

[380] Vgl. GÖDEL, *Consistency* Axiom E S. 6, Werke Band 2 S. 39. GÖDEL bezeichnet sein Axiom ebd. als „a very strong form of the axiom of choice“.

folgt aus (5) natürlich (7). Also ist (7) tatsächlich eine äquivalente Form des in (5) und somit auch in (4) und (6) ausgesprochenen Gedankens.

In der realistischen Mengenlehre können wir *noch stärkere Auswahlaxiome* aufstellen. Betrachten wir (6): Warum soll es nur zu jeder Familie F nichtleerer *Mengen* eine Auswahlfunktion geben? Da wir unmengenwertige Funktionen zur Verfügung haben, können wir allgemeiner Familien F nichtleerer *Klassen* betrachten. Sofern die Klassen *nichtleer* sind, können wir aus jeder Klasse ein Element auswählen und dann jeden Index der Familie auf dieses ausgewählte Element werfen; nach dem nicht-formalen Komprehensionstheorem für Funktionen erhalten wir so eine Auswahlfunktion von F. Damit ist das folgende Auswahlaxiom gerechtfertigt:

5.11.7 Allgemeines Familien-Auswahlaxiom

(8) *Jede Familie F nichtleerer Klassen besitzt eine Auswahlfunktion.*

Hieraus folgt natürlich sofort (6), also auch das globale Auswahlaxiom und erst recht das klassische Auswahlaxiom mit allen angegebenen Versionen. Was nun hinter allen bisher genannten Versionen steckt, ist das nicht-formale Komprehensionsaxiom 5.3.2 (was ja besagt, dass *zu jeder beliebigen Auswahl von Individuen eine entsprechende Klasse existiert*) in Verbindung mit der evidenten Tatsache, dass Auswahlen von Objekten unmittelbar (ohne begriffliche Hilfsmittel) möglich sind. In der *nicht-formalen* Mengenlehre benötigen wir also die bisherigen Varianten des Auswahlaxioms eigentlich gar nicht, da diese schon im Komprehensionsaxiom mit enthalten sind.

Ich möchte nun aber eine ultimative Verallgemeinerung des Axioms vorschlagen, die auch in der formalen Lehre einsetzbar ist und noch weit über das hinausgeht, was sich diesbezüglich mit dem nicht-formalen Komprehensionsaxiom folgern lässt. Zunächst kann man fragen, ob sich die GÖDELsche Version (7) nicht dahingehend verallgemeinern lässt, dass man eine Art „Auswahlfunktion“ bekommt, die *jeder nichtleeren Klasse, auch jeder nichtleeren Unmenge* eines ihrer Elemente zuordnet. Direkt ist eine solche Verallgemeinerung nicht ohne weiteres möglich, denn eine solche „Funktion“ hätte Unmengen im Definitionsbereich, könnte also höchstens als eine konzeptionelle Funktion der erweiterten Theorie existieren; aber hierzu wäre es erforderlich, dass ein Allgemeinbegriff existiert, mit dem die Zuordnungen dieser Funktion beschrieben werden könnten, und es ist zweifelhaft, ob dieser tatsächlich existiert. Man kann jedoch dieses Problem wie folgt umgehen: Es ist zweifellos möglich, aus *jeder* nichtleeren Klasse C ein bestimmtes Element ein für allemal auszuwählen und

$\boldsymbol{\varepsilon}(C)$ [Lesart: ein Element von C, oder: das ausgewählte Element von C]

zu nennen. Dieser Weg steht uns auch für die formale Version der elementaren Theorie offen, denn wir brauchen jetzt gar nicht davon auszugehen, dass es eine Funktion gibt, die diese Auswahlen durchführt: $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist keine Funktion, sondern lediglich ein Grundzeichen (ähnlich wie $\in$), für dessen kontextbezogene Bedeutung wir axiomatisch fordern könnten, dass $\boldsymbol{\varepsilon}(C)$ für jede nichtleere Klasse C *stets irgendein Element von C* bezeichnet. Noch weiter kommen wir, wenn wir $\boldsymbol{\varepsilon}$ statt auf Klassen auf Ausdrücke beziehen: Wenn $\varphi(x)$ ein nach Interpretation der Variablen x geschlossener Ausdruck ist, der *erfüllbar* ist (d. h. zu dem ein Objekt a existiert, so dass $\varphi(a)$ wahr ist), wollen wir uns ein solches a fest ausgewählt denken und

$\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \varphi(x)$ [Lesart: ein x, so dass $\varphi(x)$ gilt, oder: das ausgewählte x mit $\varphi(x)$].

nennen. Da $\varphi(x)$ auch wahr sein kann, wenn man x als Bezeichnung *für eine Unmenge* interpretiert, kann auf diese Weise der Operator $\boldsymbol{\varepsilon}$ *auch aus Objektbereichen, die Unmengen umfassen* (wenigstens aus solchen, die durch Formeln beschrieben werden können), *je ein Objekt auswählen.* Die Anwendung von $\boldsymbol{\varepsilon}$ auf nichtleere Klassen kann als Spezialfall für eine solche Auswahl angesehen werden, denn das obige $\boldsymbol{\varepsilon}(C)$ können wir definieren als $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ (x \in C)$.

Schon HILBERT hat mit einem derartigen logischen „Selektor“ $\boldsymbol{\varepsilon}$ gearbeitet; man nennt das Zeichen $\boldsymbol{\varepsilon}$ daher auch den HILBERT*schen Epsilon-Operator*.[381] HILBERT hatte dabei allerdings nicht die Unmengenproblematik im Blick, sondern betrachtete vor allem Auswahlen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen. Während HILBERT ursprünglich nur forderte, dass $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \varphi$ ein Objekt bezeichnet, für das φ gilt, hat ACKERMANN das Zusatzaxiom eingeführt, dass wenn Formeln $\varphi^*(x)$ und $\varphi(x)$ *äquivalent* sind (d. h. so geartet, dass $\varphi(a)$ und $\varphi^*(a)$ für genau dieselben Objekte a wahr sind), das ausgewählte Objekt für beide Formeln ein und dasselbe sein soll.[382] Dieses Zusatzaxiom ist für uns formal nicht notwendig; es ist aber bemerkenswert, weil es ein klarer Ausdruck der semantischen Vorstellung ist, dass hier nicht *für jede Formel*, sondern *aus jedem nichtleeren Objektbereich* je ein Objekt ausgesucht wurde.

Als semantischen Hintergrund stellen wir uns nun also vor, dass ein für allemal eine Auswahl $\mathfrak{A}$ von Objekten erfolgt ist, die nicht nur aus jeder nichtleeren Klasse, sondern auch aus jeder beliebigen Auswahl A von Objekten (die mindestens ein Objekt umfasst) je ein Objekt herausgreift. Wichtig ist hier, dass diese „Auswahlen“ *gar keinem* Objekt unserer (elementaren oder erweiterten) Theorie zu entsprechen brauchen: Eine Auswahl A von Objekten braucht weder einer Klasse noch einer Kollektion zu entsprechen, und erst recht braucht die Auswahl $\mathfrak{A}$ je eines speziellen Objekts a aus jeder solchen Auswahl A nicht durch eine (kombinatorische oder konzeptionelle) Funktion beschreibbar zu sein.[383] Da das Wort „globales Auswahlaxiom“ schon verbraucht ist, schlage ich für die folgende ultimative Form des Auswahlaxioms den Namen „maximales Auswahlaxiom“ vor:

5.11.8 Zehntes Axiom der Mengenlehre: (maximales) Auswahlaxiom
Sei $\varphi(x)$ ein nach Interpretation von x geschlossener und erfüllbarer Ausdruck, d. h. es gebe mindestens ein Objekt a, so dass $\varphi(a)$ gilt. *Dann bezeichnet* $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \varphi(x)$ *ein solches* a.[384]

Bemerkung. Falls es *kein* Objekt a gibt, für das $\varphi(a)$ gilt, ist $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \varphi(x)$ gemäß unserer Erklärung auf S. 113 mit dem Joker $\perp\!\!\!\perp$ gleichzusetzen. Aus jener Erklärung ergibt sich auch sofort, dass *das Auswahlaxiom in jedem Modell* $\mathbb{G}$ *gültig ist.*[385] Mittels eines $\boldsymbol{\varepsilon}$-Terms lässt sich nun die Auswahl aus beliebigen Klassen definieren:

5.11.9 Korollar und Definition Für Klassen C sei $\boldsymbol{\varepsilon}(C) :\equiv \boldsymbol{\varepsilon}\ x\ (x \in C)$. *Ist* C *eine nichtleere Klasse, bezeichnet also* $\boldsymbol{\varepsilon}(C)$ *ein Element von* C.

Aus dem maximalen Auswahlaxiom folgt die Gültigkeit von (8): Denn ist $\langle x \in I \mapsto \theta(x)\rangle$ eine Familie f nichtleerer Klassen, so ist $\langle x \in I \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}\ x\ (\theta(x))\rangle$ eine Auswahlfunktion von F. Aus (8) wiederum sind alle anderen genannten Versionen von Auswahlaxiomen ableitbar. Formal ist nun unser maximales Auswahlaxiom 5.11.8 gar keine Existenzbehauptung mehr, doch setzt es voraus, dass man simultan aus jeder (mindestens ein Objekt umfassenden) Auswahl von Objekten je ein Objekt auswählen kann. Dies ist aber anschaulich vollkommen klar.

Bei der intuitiven Evidenz, die das Auswahlaxiom hat, ist es nun mehr als erstaunlich, dass um dieses Axiom so heftig gestritten worden ist.[386] Wie konnte es zum „meist diskutierten Axiom der

[381] Vgl. CARNAP, $\boldsymbol{\varepsilon}$-*Operator*; ACKERMANN, *Auswahlaxiom* und HILBERT, *Über das Unendliche* S. 178, wo HILBERT $\boldsymbol{\varepsilon}$ als „die transfinite logische Auswahlfunktion“ bezeichnet.

[382] Vgl. ACKERMANN, *Auswahlaxiom* S. 247 und CARNAP, $\boldsymbol{\varepsilon}$-*Operator* S. 156.

[383] Diese Auswahlen A und $\mathfrak{A}$ möge man sich als Akte des geistigen „Herausgreifens“ oder „Ausersehens“ *nichtbegrifflicher Art* vorstellen. Solche Akte aber gehören zu den externen, aus dem mathematischen Diskurs ausgeschlossenen Objekten, weil sie zu subjektiv sind, um kommunikabel zu sein (siehe Fußnote 178 auf S. 87).

[384] Formal können wir dies mit auf S. 107–108 eingeführten Notation so ausdrücken: $\bigvee_a \varphi(a) \to \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_a^{x\varphi})$.

[385] Im Modell $\mathbb{G}$ bedeutet es: Wenn es ein $\mathbb{G}$-Objekt a gibt, so dass $\phi(a)$ gilt, bezeichnet $\boldsymbol{\varepsilon}\ x\ \varphi(x)$ ein solches, und genau dies haben wir in der Erklärung der $\boldsymbol{\varepsilon}$-Ausdrücke auf S. 113 festgelegt.

[386] Vgl. MOORE, *Axiom of Choice*.

Mathematik, abgesehen von Euklids Parallelenaxiom“[387] avancieren? Wie kommt es, dass um 1920 die meisten Mathematiker das Axiom nicht anerkennen wollten?[388] Seit Gödel 1940 einen Beweis dafür veröffentlicht hat, dass die Hinzunahme des Axioms zu den anderen Axiomen der gewöhnlichen Mengenlehre nicht zu logischen Widersprüchen führen kann (Konsistenz des Axioms),[389] haben sich zwar die Mehrheitsverhältnisse geändert, so dass das Axiom von den meisten Mathematikern heute im Bedarfsfall benutzt wird. Aber die bewiesene Widerspruchsfreiheit ist keine Garantie dafür, dass das Axiom wahr ist,[390] und so ist es noch heute weithin üblich, in mathematischen Beweisen sorgfältig zu vermerken, an welcher Stelle man das Auswahlaxiom benötigt. Manchmal sieht man sich dann auch nach alternativen Beweisen um, so als ob Sätze, die ohne Auswahlaxiom bewiesen werden können, glaubwürdiger wären als diejenigen, die mit dem Axiom stehen und fallen. Schließlich ist es in diesem Zusammenhang auffallend, dass wenn man das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel *einschließlich des Auswahlaxioms* verwendet, dies üblicherweise eigens dadurch kennzeichnet, dass man von ZF**C**-Mengenlehre spricht (wobei C für „axiom of choice“ steht), während man die einfache Bezeichnung ZF für das System *ohne das Auswahlaxiom* gebraucht.[391]

Man kann drei Gründe für die Ablehnung des Auswahlaxioms unterscheiden. Der erste ist mit einer „finitistischen“, der zweite mit einer „konstruktivistischen“ Grundeinstellung verbunden, und der dritte stützt sich auf „paradoxe Konsequenzen“ des Axioms.

1. Was an erster Stelle den Kritikern am Auswahlaxiom[392] fraglich erscheint, ist seine Anwendbarkeit im Bereich *unendlicher* Mengenklassen (oder Klassenfamilien), und nur für solche Anwendungen braucht man das Axiom: Dass man nämlich aus *endlich vielen* disjunkten Mengen je ein Element herausgreifen kann, wird niemand bestreiten wollen.[393] Wie kann man aber eine Auswahl aus *unendlich* vielen Objekten treffen? so lautet die Frage der Kritiker. Um Objekte „herausgreifen“ zu können, müsste man die unendliche Vielheit überschauen, was ein Finitist *grundsätzlich* für unmöglich hält. Der Infinitist, so kritisiert Hermann Weyl, tue so, als habe er die unendlich vielen Elemente „selber sozusagen ausgebreitet vor sich liegen“ und brauche sie nur „der Reihe nach durchzugehen ... wie ein Beamter auf dem Polizeibureau seine Register .... Das ist gegenüber einer unendlichen Menge sinnlos.“[394] Die einzige Möglichkeit scheint es darum zu sein, ein allgemeines Gesetz, eine Regel oder eine charakteristische Eigenschaft anzugeben, welche die Auswahl vom Rest der unendlichen Vielheit abhebt.

---

387 Fraenkel et al., *Foundations* S 56: „the most discussed axiom of mathematics, second only to Euclid's axiom of parallels“. Zum Parallelenaxiom siehe S. 278–279.

388 Dies bezeugt Thoralf Skolem (vgl. Skolem, *Bemerkungen* S. 71).

389 Vgl. Gödel, *Consistency* und Jech, *Axiom of Choice* S. 31-43. Andererseits ist das Axiom nicht aus den übrigen logisch herleitbar (Unabhängigkeit des Axioms); vgl. hierzu Jech, *Axiom of Choice* S. 55-84. So handelt es sich um einen formal-logisch unableitbaren Satz (d. h. ein echtes „Axiom“), gegen dessen Annahme oder Ablehnung keine formal-logischen Einwände bestehen.

390 Ein *logisch* konsistenter Satz kann grundsätzlich immer noch zu Ergebnissen führen, die sich durch *intuitive* Evidenz als falsch erweisen, d. h. er kann absolut gesehen immer noch falsch sein. Ein absoluter Wahrheitsbeweis kann deshalb mit rein logischen Mitteln prinzipiell nicht erbracht werden.

391 Entsprechend unterscheidet man bei der NBG-Mengenlehre zwischen NBGC und NBG „ohne C“, je nachdem, ob das Auswahlaxiom benutzt wird oder nicht.

392 Dazu gehörten Giuseppe Peano, Beppo Levi, René Baire, Emile Borel, Henri Lebesgue, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Hermann Weyl und zum Teil auch Bertrand Russell, dessen Ansicht schwankend war (vgl. Moore, *Axiom of Choice* S. 287f).

393 Im endlichen Fall lässt sich das Auswahlaxiom zudem aus dem Paarmengen– und dem Vereinigungsmengenaxiom logisch ableiten (vgl. Fraenkel, *Mengenlehre* S. 288f).

394 Weyl, *Grundlagenkrise* S. 3. Auch Wittgenstein bemerkt aus seiner finitistischen Perspektive kritisch über die Formeln der Mengenlehre: „Die Ausdrucksweise scheint für einen Gott zugeschnitten zu sein, der weiß, was wir nicht wissen; er sieht die ganzen unendlichen Reihen“, aber wir können mit diesen „Ausdrucksformen ... nicht viel anfangen“ (*Untersuchungen* Teil 1 Nr. 426 S. 199f).

2. So geht der finitistische Kritikpunkt nahtlos in den konstruktivistischen über. Die Kritiker haben im Allgemeinen eine „begriffsartige“ Klassenauffassung, wonach Klassen nur durch charakteristische Begriffe gegeben sein können; manche haben darüber hinaus eine grundsätzlich „konstruktivistische“ Auffassung mathematischer Existenz überhaupt, wonach mathematische Objekte nur existieren, wenn sie von uns im Geist konstruiert werden oder wenigstens konstruiert werden können. Dies ist namentlich die Auffassung der Intuitionisten. Da das Auswahlaxiom nur die *Existenz* einer Menge oder Klasse behauptet, ohne einen charakteristischen, die Klasse beschreibenden Begriff oder eine Prozedur zu ihrer „Konstruktion“ anzugeben, wird das Axiom als sinnlos angesehen.

3. Schon bald nach der Formulierung des Axioms stellte sich heraus, dass man mit Hilfe des Auswahlaxioms geometrische Sätze beweisen kann, die zumindest auf den ersten Blick als vollkommen unglaubwürdig erscheinen. Damit war und ist bis heute ein dritter, sehr starker Grund zur Ablehnung des Axioms gegeben, der unabhängig von einer finitistisch-konstruktivistischen Grundeinstellung geltend gemacht werden kann. Da diese geometrischen Paradoxien im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom immer wieder (und meist nur oberflächlich) zur Sprache kommen, lohnt es sich, hier etwas ausführlicher darauf einzugehen.

Noch bis ins 19. Jahrhundert hinein waren Mathematiker davon ausgegangen, dass man jeder ebenen Figur eine reelle Zahl als *Flächeninhalt* zuordnen kann, und ebenso jedem Körper eine Zahl als ihren *Rauminhalt*. Mengentheoretisch gesehen sind nun Figuren und Körper *Punktmengen*, und es geht in der Inhaltslehre darum, diesen Punktmengen, sofern sie allseits begrenzt sind, eine (nichtnegative) reelle Zahl als ihr „Maß“ (d. h. ihren Flächen- bzw. Rauminhalt) zuzuordnen, derart dass die klassischen Inhaltssätze gelten. Dieses „Maßproblem“ heißt bezogen auf „Punktmengen in der Ebene“ das 2-*dimensionale Maßproblem* und bezogen auf „Punktmengen im Raum“ das 3-*dimensionale Maßproblem*. In gleicher Weise will man auch Punktmengen auf einer Geraden ein Maß (d. h. eine Länge) zuordnen und spricht dann vom 1-*dimensionalen Maßproblem*. Bezieht man noch die mathematischen Räume mit beliebig großen Dimensionszahlen ein, kann man allgemein vom n-*dimensionalen Maßproblem* sprechen.

Das Maßproblem wurde nun erstmalig 1902 von Henri Lebesgue in seiner Doktorarbeit exakt formuliert:[395] Es soll jeder allseitig begrenzten Punktmenge (in einem gegebenen Raum bestimmter Dimensionszahl) eine nichtnegative reelle Zahl als ihr „Maß“ zugeordnet werden, so dass die folgenden drei elementarsten Bedingungen der klassischen Inhaltslehre erfüllt sind:

(a) Positivität: Es gibt Punktmengen, deren Maß positiv (also von Null verschieden) ist.

(b) Translationsinvarianz: Kongruente Punktmengen[396] haben gleiches Maß.

(c) Additivität: Vereinigt man endlich viele oder auch „abzählbar unendlich viele“[397] disjunkte Punktmengen, so erhält man das Maß der so entstehenden Punktmenge, wenn man die Maße dieser Punktmengen *addiert*.

Es stellt sich nun die Frage: Gibt es eine Funktion m („Maßfunktion“), welche den Punktmengen eines n-dimensionalen Raumes nichtnegative reelle Zahlen als ihr Maß so zuordnet, dass diese drei Forderungen erfüllt sind? Auf die so gestellte Frage scheint eine bejahende Antwort nicht selbstverständlich zu sein, vor allem, wenn die Zahlen auf nicht-geometrischem Weg eingeführt werden. Aber selbst, wenn man Zahlen direkt als Strecken auf der Zahlengeraden einführt, muss man bedenken, dass es beim 2– oder 3-dimensionalen Maßproblem darum geht, mit diesen Zahlen *Flächen* und

[395] Lebesgue, *Thèses* S. 208 (im Original S. 6). Vgl. auch Lebesgue, *Intégration* S 119 (im Original S. 103).

[396] Lebesgue sagt: „gleiche“ Punktmengen (ensembles égaux). Gemeint sind solche, die man durch Verschiebung, Drehung oder Spiegelung zur Koinzidenz bringen kann, oder anschaulich gesprochen: „Figuren von gleicher Form und Größe“.

[397] Das bedeutet: ≪so viele, wie es natürliche Zahlen gibt≫. Zur genaueren Definition siehe 5.20.4 S. 259.

Raumstücke auszumessen: Wie kann man dies mit Strecken tun? Überdies ist das Maßproblem auch schon im 1-dimensionalen Fall keine triviale Aufgabe, da man hier nicht nur Strecken, sondern auch Teilmengen von Strecken vermessen soll, deren Elemente *beliebig ausgewählte* Punkte einer Strecke sein können.

Trotz dieser Bedenken ist der „gesunde Menschenverstand" geneigt, die Lösbarkeit des Maßproblems zu bejahen. Das scheint letztlich auf *physikalischen Erfahrungen* zu beruhen: Man kann jeden festen Körper in ein Glas mit einer Flüssigkeit tauchen, wodurch die Höhe der Flüssigkeitssäule im Glas um so mehr ansteigt, je „voluminöser" der Körper ist. Diese Höhe kann man durch Strecken und daher durch *reelle Zahlen* ausmessen und bekommt so ein Maß für das Volumen, das den drei Forderungen von Lebesgue entspricht.

Das Problem ist aber, dass es bizarre Punktmengen gibt, die höchstwahrscheinlich nicht als physikalische Körper verwirklicht werden können, wie etwa die sog. „halboffenen" Mengen. Eine Punktmenge heißt *abgeschlossen*, wenn *alle* Grenzpunkte der Menge mit dazugehören, und *offen*, wenn *kein* Grenzpunkt dazugehört; schließlich heißt eine Punktmenge *halboffen*, wenn einige Grenzpunkte dazugehören und andere nicht. Bei einem physikalischen Körper scheint nun die Oberfläche vom Körper nicht abtrennbar zu sein, so dass die einem physikalischen Körper entsprechende Punktmenge immer *abgeschlossen* ist, während das den Körper umgebende Vakuum eine offene Menge darstellt. Berühren sich zwei physikalische Körper, so durchdringen sich (koinzidieren) ihre Oberflächenpunkte, so dass *jeder* der beiden Körper auch in diesem Fall eine abgeschlossene Punktmenge bleibt. So ist die Flüssigkeitsverdrängungsmethode bei einem gedachten Objekt, das einer halboffenen Punktmenge entspricht, nicht praktizierbar, weil ein solches Objekt gar nicht herstellbar ist.[398] Nun konnte Lebesgue zeigen, dass es tatsächlich eine Maßfunktion gibt, zu deren Definitionsbereich sowohl alle geschlossenen wie auch alle begrenzten offenen Punktmengen gehören.[399] Damit kann das Maßproblem zumindest *in eingeschränkter Weise, nämlich für alle physikalisch relevanten Mengen* als gelöst gelten. Lebesgue hoffte jedoch, dass das Problem schlechthin gelöst werden könne, also eine Maßfunktion *allen* allseitig begrenzten Punktmengen ein Maß zuordnet. Dies aber konnte er weder beweisen noch widerlegen, und musste deshalb den Mengen, die ein Maß haben, vorerst eine besondere Bezeichnung verleihen. Er nannte sie „messbare Punktmengen", wobei er hoffte, dass letztlich *alle* beschränkten Mengen dazugehören.

Doch hierin täuschte er sich: Denn schon 1905 konnte Giuseppe Vitali *mit Hilfe des Auswahlaxioms* die *Existenz von nicht-messbaren Mengen* auf der Geraden beweisen und allgemein zeigen, dass das *Maßproblem generell unlösbar ist*, und zwar selbst im einfachsten, 1-dimensionalen Fall.[400] 1914 hat Felix Hausdorff untersucht, ob sich das Problem nicht wenigstens dann lösen lässt, wenn man die dritte Forderung Lebesgues abschwächt, indem man nur für die disjunkte Vereinigung *endlich vieler* Punktmengen fordert, dass das Maß der Vereinigung dieser Punktmengen

[398] Immerhin kann man solche Objekte manchmal in einem noch halbwegs anschaulichen „Gedankenexperiment" herstellen: Würde es gelingen, von einem *gewöhnlichen* Körper, bei dem die Oberfläche anschaulich gesprochen nur einen „unwesentlichen, unendlich kleinen Teil" des ganzen Körpers ausmacht, die Oberfläche ganz oder teilweise zu entfernen, so würde der verbleibende halboffene oder offene Körper noch genauso viel Flüssigkeit verdrängen wie der vollständige Körper, eben weil nur „unendlich wenig" von ihm weggenommen wurde. Man kann dem halboffenen Körper darum das gleiche Maß zuschreiben wie dem vollständigen Körper. Versucht man sich nun aber einen *ungewöhnlichen* Körper vorzustellen, bei dem die Randpunkte einen *wesentlichen Teil* ausmachen (dazu müsste der Rand unendlich viele Falten oder Wölbungen aufweisen, so dass er trotz „unendlicher Dünne" einen von Null verschiedenen, positiven Beitrag zum Gesamtvolumen leistet), und zieht nun einen Teil der Randpunkte von *diesem* Körper ab, so kann der Vorgang unter Umständen vollkommen unanschaulich werden, so dass das Gedankenexperiment keine eindeutigen Ergebnisse mehr liefert. Von genau dieser Art sind die so genannten „nicht-messbaren" Punktmengen, von denen im Folgenden die Rede sein wird.

[399] Vgl. Lebesgue, *Thèses* S. 216 (im Original S. 14).

[400] Vgl. Vitali, *Problema della mesura*.

gleich der Summe der Maße der einzelnen Punktmengen ist.[401] Dieses abgeschwächte Maßproblem nannte HAUSDORFF das *Inhaltsproblem*, und er zeigte, dass das n-dimensionale Inhaltsproblem für n größer als 2 (also insbesondere für den 3-dimensionalen Raum) *ebenfalls unlösbar* ist. Was das 1- und 2-dimensionale Inhaltsproblem angeht, so gelang Stefan BANACH 1923 der Beweis, dass es zwar *lösbar* ist, jedoch *nicht eindeutig lösbar*: Selbst wenn man fordert, dass eine bestimmte Strecke das Maß 1 hat, gibt es immer *mehrere* mögliche Funktionen, die alle Forderungen erfüllen, und keine von ihnen ist „natürlicher" als die andere.[402] LEBESGUE konnte dieses Ergebnis zeitlebens nicht akzeptieren und *verwarf daher das Auswahlaxiom*. Tatsächlich kann man die Existenz nicht-messbarer Mengen ohne Auswahlaxiom nicht beweisen, wie Robert Martin SOLOVAY 1970 gezeigt hat,[403] und LEBESGUE hätte sich über SOLOVAYs Ergebnisse umso mehr gefreut, als sie explizit beweisen, dass die Annahme, dass *alle* begrenzten Punktmengen messbar sind, mit den übrigen Axiomen nicht in Konflikt geraten kann. Doch wollte SOLOVAY nur die logische Konsistenz der LEBESGUEschen Annahme erweisen, nicht ihre Wahrheit. Er selbst war vom Gegenteil überzeugt: „Of course, the axiom of choice ist true, and so there are non-measurable sets".[404]

Wenn nun schon allein die Existenz unmessbarer Mengen in den Augen vieler paradox erscheint, so gilt dies erst recht für die geradezu unglaublich klingenden „Konstruktionen", welche HAUSDORFF und später BANACH und TARSKI mit ihnen angestellt haben (wobei die nicht-messbaren Mengen natürlich nicht selbst „konstruiert", sondern mittels Auswahlaxiom als existent bewiesen werden). Zunächst stieß HAUSDORFF 1914 im Rahmen seiner Untersuchungen zum Inhaltsproblem auf die merkwürdige „Tatsache, dass eine Kugelhälfte und ein Kugeldrittel kongruent sein können".[405] Er gab eine vollständige Zerlegung der Kugel in drei nicht-messbare Teile A, B, C und einen vierten Teil Q an, der (ähnlich wie die Kugeloberfläche) das Volumen 0 hat, also zum Inhalt der Kugel nichts beiträgt. Von den drei ersten Teilen A, B, C nun, die sich nicht überlappen und aus denen sich das Kugelvolumen somit konstituiert, zeigte HAUSDORFF, dass sie

(a) untereinander kongruent sind (also ohne Überlappung zur Koinzidenz gebracht werden können), so dass jeder Teil anschaulich einem Drittel der Kugel entspricht,

(b) dass aber auch die Vereinigung $B \cup C$ mit A kongruent ist, so dass demnach A und $B \cup C$ anschaulich je einer Hälfte der Kugel entsprechen sollten.

Insbesondere müsste also das Volumen von A paradoxerweise zugleich ein Drittel des Kugelvolumens und die Hälfte des Kugelvolumens sein, *wenn* A ein Maß hätte. Aber das ist eben der Punkt: A ist ebenso wie B und C *nicht-messbar* und hat darum überhaupt kein Volumen (auch nicht das Volumen 0).[406] Dieses *Hausdorff-Paradoxon* lehrt in eindrucksvoller Weise, wie fremdartig nicht-messbare Mengen tatsächlich sein können.

Auf diesem Gebiet weiterforschend, erzielten Stefan BANACH und Alfred TARSKI 1924 folgendes Resultat: Sind zwei beliebige beschränkte 3-dimensionale Punktmengen gegeben,[407] so ist es stets möglich, die eine von ihnen in endlich viele Teile zu zerlegen und aus diesen Teilen durch bloßes Verschieben (ohne sie zu verformen) die andere zu bilden.[408] Hierbei muss die Zerlegung natürlich wieder nicht-messbare Teile enthalten. Ein Spezialfall hiervon ist das *Banach-Tarskische Kugelparadoxon*, dass man *eine* Kugel in endlich viele Teile zerschneiden und diese dann zu *zwei* Kugeln wieder zusammensetzen kann, und zwar so, dass jede der beiden die Größe der Ausgangskugel hat.

---

401 Vgl. HAUSDORFF, *Mengenlehre* S. 400–402 und 469–472.

402 Vgl. BANACH, *Problème de la mesure.*

403 Vgl. SOLOVAY, *Model.*

404 SOLOVAY, *Model* S. 3.

405 HAUSDORFF, *Mengenlehre* S. 469.

406 Vgl. HAUSDORFF, *Mengenlehre* S. 469–472.

407 Genauer: Punktmengen mit „nichtleerem Inneren", die also nicht nur aus Randpunkten bestehen.

408 Vgl. BANACH und TARSKI, *Décomposition* S. 263f, Théorème 24.

Bezüglich dieser „Erzeugung“ von zwei neuen Kugeln aus einer einzigen zeigte Raphael M. Robinson 1947, dass eine Zerlegung der Ausgangskugel in fünf Teile genügt: aus zwei dieser Teile setzt man die eine neue Kugel und aus den übrigen drei Teilen die andere zusammen.[409] Diese Ergebnisse wirken zweifellos schockierend. Was Galilei einst dem „gesunden Menschenverstand“ entsprechend ausgesprochen hatte:

> „Wollten wir die Körper teilen in eine endliche Anzahl von Teilen, so ist es unzweifelhaft, dass wir sie nicht zusammensetzen könnten zu Körpern, die mehr Raum einnehmen als früher“,[410]

scheint hier über den Haufen geworfen zu sein.

Zeigt all dies, dass das Auswahlaxiom falsch ist? Beginnen wir mit der dritten Argumentation, die auf *geometrische Paradoxien* hinweist. Keiner der Entdecker dieser Paradoxien, weder Hausdorff noch Banach noch Tarski haben das Axiom in Frage gestellt, und man sollte zunächst festhalten, dass Zerlegungen à la Banach-Tarski wohl grundsätzlich nicht an *physikalischen* Kugeln durchführbar sind, so dass eine „wunderbare Kugelvermehrung“ auf dieser Grundlage ausgeschlossen ist. Man weckt also unzutreffende physikalische Assoziationen, wenn man sagt, man könne eine Kugel „zerschneiden“ und sie dann zu zwei Kugeln der gleichen Größe zusammensetzen. Denn wenn man einen physikalischen Körper „zerschneidet“, so haben die entstehenden Stücke selbstverständlich eine Oberfläche, entsprechen daher geschlossenen Punktmengen und sind messbar. So ist es natürlich auch nicht ernst gemeint, wenn Stan Wagon seiner Monographie über das Banach-Tarski-Paradoxon[411] in Anspielung auf berühmte „Delische Problem der Würfelverdopplung“ das folgende Motto voranstellt:

Delians:	*„How can we be rid of the plague?“*
Delphic Oracle:	*„Construct a cubic altar of double the size of the existing one.“*
Banach and Tarski:	*„Can we use the Axiom of Choice?“*

Zu bemerken ist auch, dass der Eindruck des Paradoxen vor allem dadurch entsteht, dass die *Unendlichkeit*, die sich hinter allen diesen Konstruktionen verbirgt, dadurch verschleiert wird, dass von einer Zerlegung in «endlich viele» Teile die Rede ist. Diese Teile sind nämlich als unmessbare (!) Mengen „unendlich kompliziert“ aufgebaut. Würden wir dagegen eine Zerlegung in unendlich viele Teile zulassen, so ist leicht einzusehen, wie man durch bloßes Verschieben der Teile größere Mengen erzeugen kann. „Zerschneidet“ man etwa eine Kreislinie in *alle ihre unendlich vielen Punkte* und entfernt dann jeden Punkt radial um dieselbe Strecke vom Mittelpunkt des Kreises, so setzen sich die verschobenen Punkte zur Kreislinie eines *größeren* Kreises zusammen (siehe Abbildung 5.25 S. 235). Solche Phänomene[412] erschienen früheren Gelehrten wie Duns Scotus, Albert von Sachsen, Galilei und Torricelli paradox, während die heutige Mathematik sie als selbstverständlich hinnimmt. Vielleicht wird man später auch die Paradoxien von Hausdorff und Banach-Tarski ähnlich beurteilen.

So können die genannten Paradoxien jedenfalls nicht unmittelbar als widersprüchlich gelten, und da Gödel gezeigt hat, dass das Auswahlaxiom nicht mit den anderen Axiomen im *logischen* Widerspruch steht, müsste ein Widerspruch im Begriff der „Auswahl aus dem Unendlichen“ selbst liegen und rein *intuitiv* begründet werden. Vergleicht man nun aber die ganz klare Evidenz, die für

---

409 Vgl. Robinson, *Decomposition of spheres.*

410 Galilei, *Discorsi* Erster Tag, Werke Band 8 S. 72, Ausgabe Oettingen S. 25 (Rede Salviatis).

411 Wagon, *Banach-Tarski-Paradox.*

412 Weitere geometrische Unendlichkeits-Paradoxien dieser Art werden in Abschnitt 5.17 (siehe S. 234–238) erörtert; vgl. außerdem das von Torricelli untersuchte Horn Gabriels und die Theorie der Fraktale (siehe S. 94 mit Fußnote 215).

das Auswahlaxiom spricht, mit den doch nicht so klaren geometrischen Anschauungen, die es uns so schwer machen, die genannten Konstruktionen mit nicht-messbaren Mengen nachzuvollziehen, so kann die Entscheidung doch wohl nur *für* das Auswahlaxiom ausfallen. Wer das Auswahlaxiom abschaffen will, steht im Allgemeinen der Möglichkeit einer Einsicht in das Unendliche skeptisch gegenüber, doch gerade eine solche Einsicht müsste derjenige haben, der meint, über die Unmöglichkeit der unendlich kompliziert aufgebauten geometrischen Sachverhalte, die hinter den Sätzen von Vitali, Hausdorff, Banach und Tarski stehen, aufgrund von Intuition ein apodiktisch-negatives Urteil fällen zu können. – So bleiben noch die anderen beiden Gründe zu prüfen, die gegen das Auswahlaxiom vorgebracht werden, nämlich der konstruktivistische und der finitistische Einwand.

Soweit der *konstruktivistische* Einwand auf einer „rein konstruktivistischen" Ontologie beruht, welche mathematische Existenz schlechthin mit Konstruierbarkeit gleichsetzt, ist er nicht mit ein paar Sätzen zu widerlegen; man könnte den ganzen philosophischen und mathematischen Teil dieser Arbeit als eine Widerlegung dieser Position betrachten. Teilweise scheint der konstruktivistische Einwand aber auch einfach auf einem Missverständnis zu beruhen, das in klassischer Form 1905 von Russell ausgesprochen wurde: „Given any class w, ... the axiom asserts that we can find some rule by which to pick out one term from each existent class contained in w".[413] Das Axiom, so wie Zermelo es verstanden hat, behauptet gerade *nicht*, es existiere immer eine *durch eine Regel* (etwa eine charakteristische Eigenschaft oder einen Begriff) beschreibbare Auswahl, sondern behauptet schlicht, dass eine Auswahl existiert, ob diese nun begrifflich konstruiert werden kann oder nicht.

Wenn man allerdings – wie es bei Russell tatsächlich der Fall war – ein begriffsartiges Klassenverständnis hat, so *muss* man das Auswahlaxiom so auffassen, wie Russell es formuliert hat, und bei *dieser* Auffassung ist die Kritik am Auswahlaxiom allerdings berechtigt. So würde ich im Rahmen der *erweiterten Theorie* keinesfalls behaupten, dass es zu jeder Kollektion K disjunkter nichtleerer Kollektionen eine „Auswahlkollektion" gibt, die mit jeder zu K gehörenden Kollektion genau ein Element gemeinsam hat. Sind etwa mehr Kollektionen in K enthalten als es Individuen gibt, so könnte eine solche Auswahlkollektion keine kombinatorische Klasse mehr sein; sie müsste also eine konzeptionelle Klasse, d. h. ein Begriff sein. Die Existenz eines solchen Begriffs ist aber angesichts der Tatsache, dass es nicht zu jeder Auswahl von Objekten einen entsprechenden Begriff gibt (siehe Abschnitt 5.5) zweifelhaft. So ist damit zu rechnen, dass mitunter *keine* solche Auswahlkollektion vorhanden ist.

Der *finitistische* Einwand schließlich geht dahin, dass wir bei unendlichen Mengen aufgrund des fehlenden Überblicks nicht wie im endlichen Fall eine Auswahl durch unmittelbares Herausgreifen bilden können (vgl. das Zitat von Hermann Weyl, oben S. 157). Doch spielt für die Einsicht, die hinter dem Auswahlaxiom steht, die Frage nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit der betrachteten Klasse eigentlich gar keine Rolle. So hat nach Paul Bernays in der Infinitesimalrechnung der Mengenbegriff eine „quasi-kombinatorische" Bedeutung, die „im Sinne einer Analogie des Unendlichen zum Endlichen" auf das Unendliche ausgedehnt wird.[414] Wenn Duns Scotus recht hat, dass der Seinsbegriff „univok" ist (d. h. allen Seienden, Gott und Geschöpfen, genau im gleichen Sinn zukommt),[415] kann man sogar sagen: Bei der Bildung des Mengenbegriffs wird von der Unterscheidung

[413] Russell, *Theory of Types* S. 47.

[414] Vgl. Bernays, *Platonism* S. 54: „Mais l'analyse infinitésimal ... fait abstraction des possibilités de définir un ensemble, une suite ou une fonction. Ces notions y sont employés dans un sens „quasi-combinatoire", j'entends par là: au sens d'une analogie de l'infini au fini".

[415] Vgl. Scotus, *Lectura* Buch 1 distinctio 3 pars 1 quaestio 1–2 § 21–34, Ausgabe Hoffmann S. 12–21. Die oberste Einteilung des Seinsbegriffs ist nach Scotus diejenige in das Endliche und das Unendliche (Scotus, *Lectura* Buch 1 distinctio 8 pars 1 quaestio 3 § 107, Ausgabe Hoffmann S. 172f). Scotus scheint mir in der Tat recht zu haben (siehe Fußnote 3 auf S. 29).

zwischen endlich und unendlich *gänzlich* abstrahiert. So können wir aufgrund von Abstraktion auch *ohne* dass wir die Fähigkeit haben, unendliche Mengen *selbst* adäquat betrachten zu können, zu der Erkenntnis gelangen, dass *jemand, der diese Fähigkeit hätte, die entsprechenden Auswahlmengen „sehen“ oder ihre Elemente „herausgreifen“ könnte.* Hier liegt natürlich der Gedanke an Gott nahe. So bemerkt der Mengentheoretiker Michael Potter zum Auswahlaxiom: „Vielleicht ist dies der Punkt, in welchem die Einbringung des Begriffs Gott hilfreich sein würde“,[416] und Robert Meyer gibt einen „Beweis“ des Auswahlaxioms aus der Existenz bzw. Allmacht Gottes an.[417] Aber es ist keineswegs erforderlich, Gott als eine Art „Postulat der logischen Vernunft“ zur Stützung des Auswahlaxioms einzuführen. Eher kann man aus der logischen Widerspruchsfreiheit des Axioms und der intuitiven Einsicht in seine Richtigkeit darauf schließen, dass Gott als ein Wesen mit maximal möglicher Erkenntnis (wenn dessen Existenz anderweitig feststeht) den unendlichen Mengen ähnlich gegenübersteht wie wir den endlichen.

Wir haben nun alle Arten der Klassenbildung besprochen, sowohl die mit dem Auswahlaxiom gegebene nichtkonstruktive Art, wie auch die auf S. 150–151 zusammengefassten konstruktiven Arten. Nun bleiben noch vier Axiome der Mengenlehre zu besprechen: das Unendlichkeitsaxiom, das Fundierungs– bzw. Antizirkularitätsaxiom, das Axiom für Urelemente und das Universenaxiom. Der natürliche Zugang zu den beiden erstgenannten Axiomen ist derjenige über die Definition von Zahlenbereichen. Dies ist deshalb unser nächstes Ziel.

[416] Potter, *Sets* S. 163. Vgl. auch Wittgenstein (Fußnote 394 auf S. 157) und Gödel (S. 628–629).

[417] Vgl. Meyer, *God exists* S. 353: „the axiom of choice has as its content that an infinite number of choices can be made. God can do everything. Accordingly, he can make all those choices“.

5.12 Äquivalenzrelationen und Einführung der Fregeschen Zahlen

In diesem Abschnitt soll der von FREGE vorgedachte Weg beschrieben werden, Zahlen als „Äquivalenzklassen von Äquivalenzrelationen“ einzuführen.[418]

5.12.1 Definition Eine Relation R heißt *Äquivalenzrelation*, wenn für a, b, c aus $\mathtt{Fd}(R)$ stets gilt:

(Reflexivität) $a\ R\ a$,
(Symmetrie) wenn $a\ R\ b$, so auch $b\ R\ a$,
(Transitivität) wenn $a\ R\ b$ und $b\ R\ c$, so $a\ R\ c$.[419]

Ein erstes **Beispiel** für eine solche Relation ist die *Gleichheit*,[420] denn es gilt stets $a = a$ (Reflexivität), aus $a = b$ folgt $b = a$ (Symmetrie) und aus $a = b = c$ folgt $a = c$ (Transitivität).

Für die Theorie der FREGEschen Zahlen benötigen wir eine andere Äquivalenzrelation, nämlich die mit $\sim$ bezeichnete *Gleichmächtigkeit* oder *Gleichzahligkeit*, welche Klassen A und B genau dann aufeinander ausrichtet, wenn A und B anschaulich gesprochen „gleich groß“ sind oder „die gleiche Anzahl von Elementen“ haben. Diese „Relation“ existiert nur in der *erweiterten Theorie*, da zu ihren linken und rechten Gliedern *alle* Klassen, also auch Unmengen gehören.

Nun haben wir im Hinblick auf unendliche Klassen nur eine vage Vorstellung davon, was es bei diesen bedeuten kann, „gleich groß“ zu sein oder „gleich viele“ Elemente zu haben. Daher soll $\sim$ nicht *durch diese vage Vorstellung definiert* werden, d. h. wir wollen *nicht* $A \sim B$ durch ≪A und B haben gleich viele Elemente≫ definieren. Unser Vorgehen ist umgekehrt: Wir werden eine *exakte mengentheoretische Definition* für $\sim$ aufstellen, und dann festlegen, dass die Aussage ≪A und B haben gleichviele Elemente≫ die Bedeutung von $A \sim B$ haben soll. Wir haben demzufolge eine exakte Bedeutung für die Relationsformel $A \sim B$ zu suchen, die „in etwa“ der intuitiven Bedeutung von ≪die Anzahl der Elemente von A und B ist gleich≫ entspricht. Hätten wir schon für jede Klasse ein Objekt definiert, das die „Anzahl“ der Elemente einer Klasse ist, bestünde hier gar kein Problem: wir würden $A \sim B$ durch die Gleichung ≪Anzahl von A = Anzahl von B≫ definieren. In der Nachfolge von FREGE werden wir jedoch *zuerst* die „Gleichzahligkeit“ $\sim$ definieren, um mit ihrer Hilfe den Anzahlbegriff festzulegen. So müssen wir überlegen, wie wir „Gleichzahligkeit“ zweier Klassen feststellen können, *ohne* den Anzahlbegriff zu benutzen. Das ist wie folgt möglich.

Wollen wir wissen, ob sich „gleich viele“ Gegenstände rechts und links von uns befinden, können wir sie zu Paaren von je einem linken und einem rechten Gegenstand zusammenstellen; gelingt dies, ohne dass links oder rechts Gegenstände ohne Partner übrig bleiben, ist die Anzahl gleich, andernfalls verschieden. Diese „Partner“-Methode ist mathematisch gesehen nichts anderes als der Versuch, eine Bijektion von der Klasse A der linken in die Klasse B der rechten Gegenstände zu finden (vgl. oben Abbildung 5.14, S. 138). So gelangen wir zu der folgenden Definition der Gleichzahligkeit:

5.12.2 Definition Für Klassen A und B gelte

$$A \sim B \qquad \text{[Lesart: } A \text{ ist gleichmächtig mit } B\text{]}$$

genau dann, wenn es eine Bijektion von A in B gibt.

---

418 Zur historischen Einordnung des FREGEschen Ansatzes siehe Abschnitt 5.33. Obgleich man in der heutigen Mathematik aus praktischen Gründen bei der Einführung der Zahlen eher den Weg PEANOs und VON NEUMANNs geht (siehe S. 208–212 und S. 221–225), bleibt der FREGEsche Ansatz wichtig, weil man mit ihm direkt zeigen kann, wie die Zahlen zur Bestimmung der „Anzahl“ der Elemente einer Klasse verwendet werden können.

419 Formal: R (ist) Äquivalenzrelation $:\Leftrightarrow R$ Relation $\wedge \bigwedge_{a\in\mathtt{Fd}(R)} \bigwedge_{b\in\mathtt{Fd}(R)} \bigwedge_{c\in\mathtt{Fd}(R)} \big(aRa \wedge (aRb \to bRa) \wedge (aRbRc \to aRc)\big)$.

420 Ein Beispiel ist sowohl die uneingeschränkte, konzeptionelle Relation $=$ wie auch die auf eine Klasse C eingeschränkte, kombinatorische Gleichheitsrelation id_C (siehe Definition 5.10.42).

Gilt $A \sim B$, so sagen wir auch, dass A und B «gleich viele Elemente» oder «die gleiche Anzahl von Elementen» haben oder «gleichzahlig» oder «gleich groß» sind.[421]

In der *erweiterten Theorie* können und wollen wir $\sim$ als Bezeichnung für die *konzeptionelle Relation* auffassen, *welche genau die Paare* $\langle A, B\rangle$ *mit gleichmächtigen Klassen* A, B *enthält*.[422]
Nachdem „Gleichmächtigkeit" nun ein exakt definierter Begriff ist, können wir durch regelrechte Beweise klären, welche Eigenschaften er hat. Zu den fundamentalsten Eigenschaften, die wir intuitiv von der Gleichmächtigkeit erwarten, gehören diejenigen einer Äquivalenzrelation: Jede Klasse A hat gleich viele Elemente wie A (Reflexivität); hat A gleich viele Elemente wie B, so auch B gleich viele wie A (Symmetrie), und hat A gleich viele Elemente wie B, und B gleich viele wie C, so auch A gleich viele wie C (Transitivität). Hätte $\sim$ diese Eigenschaften nicht, so wäre unsere Definition vollkommen verfehlt. Aber es gilt in der Tat:

5.12.3 Theorem *$\sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Zur Reflexivität: Sei A eine Klasse. Bezeichne f die Identität auf dieser Klasse.[423] Dann gilt $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} A$, also $A \sim A$.[424]
Zur Symmetrie: Sei $A \sim B$, also $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} B$ für eine Funktion f. Sei g deren Umkehrung.[425] Dann gilt $B \xrightarrow[\text{BIJ}]{g} A$, also $B \sim A$.
Zur Transitivität: Sei $A \sim B$ und $B \sim C$, also $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} B$ und $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{g} C$ für Funktionen f und g. Sei h die Komposition von f mit g.[426] Dann gilt $A \xrightarrow{h} C$, also $A \sim C$. □

Eine sofort einleuchtende Eigenschaft der Gleichmächtigkeit ist die folgende. Erweitert man gleichmächtige Klassen dadurch, dass man zu jeder ein neues Element hinzufügt, so erhält man wieder gleichmächtige Klassen:

5.12.4 Theorem *Ist $A \sim B$, und sind a und b Individuen mit $a \notin A$ und $b \notin B$, so gilt auch $A \cup \{a\} \sim B \cup \{b\}$.*

Beweis. Wegen $A \sim B$ gibt es eine Bijektion f von A in B. Dann ist die Funktion, die alle Würfe von f vollzieht und außerdem a auf b wirft, trivialerweise eine Bijektion von $A \cup \{a\}$ in $B \cup \{b\}$. Also folgt $A \cup \{a\} \sim B \cup \{b\}$. □ Ebenso einleuchtend ist die Tatsache, dass wenn Klassen A und B gleichmächtig sind, man durch Wegnehmen von je einem Element aus A und aus B wieder gleichmächtige Klassen erhält:

5.12.5 Theorem *Ist $A \sim B$, und sind a und b Individuen mit $a \in A$ und $b \in B$, so gilt auch $A \setminus \{a\} \sim B \setminus \{b\}$.*

---

421 Formal: $A \sim B \;:\Leftrightarrow$ es gibt ein f, so dass $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} B$.

422 Dass die genannte konzeptionelle Relation $\sim$ existiert, ist nach dem Einfachheitsprinzip 5.7.6 S. 102 plausibel, denn die hier zugrunde liegende Intuition von „gleicher Klassengröße" scheint ähnlich simpel zu sein wie die hinter der Identität stehende, so dass es einen entsprechenden widerspruchsfreien Begriff geben dürfte. In der *elementaren Theorie* steht als Ersatz für die konzeptionelle Relation $\sim$ eine „eingeschränkte Gleichmächtigkeitsrelation" $\sim_{\mathbb{M}}$ zur Verfügung, die nur *Mengen* aufeinander ausrichtet, nämlich die Klasse aller $\langle M, N\rangle$ für gleichmächtige *Mengen* M und N.

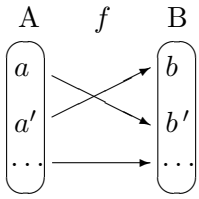
423 f soll also die Relation id_A gemäß Definition 5.10.42 S. 134 sein.

424 $A \sim A$ gilt auch, wenn A die leere Klasse ist, denn wie wir in Beispiel 4 S. 141 festgestellt haben, ist die leere Funktion eine Bijektion von $\emptyset$ in $\emptyset$, so dass $\emptyset \sim \emptyset$.

425 g soll also die Relation $f^{\rightharpoonup}$ gemäß Definition 5.10.43 S. 135 sein.

426 h soll also die Relation $f \looparrowright g$ gemäß Definition 5.10.44 S. 135 sein.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Bijektion f von A in B. Falls nun f das Element a auf b wirft, erhalten wir eine Bijektion von $A \setminus \{a\}$ in $B \setminus \{b\}$ einfach dadurch, dass wir zu der Funktion f^* übergehen, die a *nirgendwohin* wirft und sonst alles tut, was f tut.[427] So brauchen wir nur den Fall zu betrachten, dass f das Element a von A nicht auf b, sondern auf ein anderes Element b' wirft. Dann gibt es ein anderes Element a', dass f auf b wirft:



Wir vertauschen nun die Funktionswerte von a' und a, d. h. gehen von f zu der Funktion f^* über, die a auf b und a' auf b' wirft und sonst alles tut, was f tut. Offensichtlich geht durch diese Vertauschung die Eigenschaft, eine Bijektion zu sein, nicht verloren: f^* ist immer noch eine Bijektion von A in B.

Von f^* aber können wir dann weiter zu einer Funktion f^{**} übergehen, die a *nirgendwohin* wirft und sonst alles tut, was f^* tut. Diese ist nun eine Bijektion von $A \setminus \{a\}$ in $B \setminus \{B\}$. □

5.12.6 Korollar *Gilt $a \notin A$ und $b \notin B$ und $A \cup \{a\} \sim B \cup \{b\}$, so auch $A \sim B$.*

Beweis. Es liegt a in $A \cup \{a\}$ und b in $B \cup \{b\}$. Daher folgt mittels Theorem 5.12.5 aus $A \cup \{a\} \sim B \cup \{b\}$, dass die beiden Klassen $(A \cup \{a\}) \setminus \{a\}$ und $(B \cup \{b\}) \setminus \{b\}$ gleichmächtig sind. Nun ist aber $(A \cup \{a\}) \setminus \{a\}$ nichts anderes als A.[428] Ebenso ist $(B \cup \{b\}) \setminus \{b\}$ nichts anderes als B. Also gilt $A \sim B$. □ Ebenso einfach ist der folgende Satz.

5.12.7 Theorem *Stets gilt $A \times B \sim B \times A$, und für einelementiges E gilt $A \times E \sim A$.*

Beweis. $A \times B$ enthält die Paare $\langle x, y\rangle$ mit x aus A und y aus B. Die Funktion, die jedes solches Paar $\langle x, y\rangle$ auf das Paar $\langle y, x\rangle$ wirft, ist offenbar eine Bijektion von $A \times B$ in $B \times A$. Somit sind diese beiden Klassen gleichmächtig. Ist ferner e das eine Element von E, so sind die Elemente von $A \times E$ die Paare $\langle x, e\rangle$ für x aus A. Die Funktion, die jedes solche Paar $\langle x, e\rangle$ auf x wirft, ist eine Bijektion von $A \times E$ in A. Somit sind diese beiden Klassen gleichmächtig. □ Für spätere Zwecke[429] notiere ich hier noch folgendes Theorem:

5.12.8 Theorem *Für Klassen A und Mengen B und C ist stets $(A^B)^C \sim A^{(B \times C)}$.*
Ist außerdem c ein Individuum mit $c \notin B$, so gilt $A^{B \cup \{c\}} \sim A^B \times A$ und $A^{B \cup \{c\}} \sim A \times A^B$.

Beweis. Siehe Anhang S. 392–393. □ Als Nächstes erwartet man von einer Gleichzahligkeits-Relation, dass Mengen mit null, einem und zwei verschiedenen Elementen jeweils nur untereinander, nicht aber mit einer anderen Klasse gleichmächtig sind. Dies ist in der Tat richtig:

5.12.9 Theorem

Die leere Menge ist nur zu sich selbst gleichmächtig. (5.40)

Einermengen sind miteinander, aber mit keiner anderen Klasse gleichmächtig. (5.41)

Zweiermengen sind miteinander, aber mit keiner anderen Klasse gleichmächtig. (5.42)

---

427 Dieses f^* ist die Einschränkung $f/(A \setminus \{a\})$ von A auf $A \setminus \{a\}$.

428 Denn $A \cup \{a\}$ entsteht aus A durch Hinzufügen des (nach Voraussetzung nicht in A vorhandenen) Individuums a zu A, und aus $A \cup \{a\}$ enthält man dann $(A \cup \{a\}) \setminus \{a\}$, indem man a wieder fortnimmt; so erhält man A. Man beachte, dass dies falsch wäre, wenn wir $a \in A$ zugelassen hätten: dann wäre $(A \cup \{a\}) \setminus \{a\}$ nicht A, sondern $A \setminus \{a\}$.

429 Siehe den Beweis von Theorem 5.20.20 S. 264 und 5.18.8 S. 250.

Beweis. Siehe Anhang S. 393. □ Die anschauliche Vorstellung, dass Unmengen „größer“ als Mengen und somit niemals mit Mengen gleichmächtig sind,[430] lässt auch den folgende Satz von vornherein plausibel erscheinen, der 1899 von CANTOR ohne Beweis mitgeteilt wurde:[431]

5.12.10 Theorem *Für gleichmächtige Klassen A und B gilt, dass entweder beide Mengen oder beide Unmengen sind: Ist also eine der beiden eine Menge bzw. Unmenge, so auch die andere.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $A \sim B$, und per Symmetrie auch $B \sim A$. Also existiert ein f mit $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} B$ und ein g mit $B \xrightarrow[\text{BIJ}]{g} A$, und aus dem Ersetzungsaxiom 5.10.57 S. 141 folgt, dass wenn A [bzw. B] eine Menge ist, auch B [bzw. A] eine solche sein muss. Ist aber eine von ihnen eine Unmenge, so gilt dies auch für die andere: Denn wäre diese eine Menge, so müsste nach dem eben Gesagten auch die erste eine Menge sein. □

Bemerkung. Nach Theorem 5.12.10 kann eine Unmenge nicht mit einer Menge, sondern *höchstens* mit einer anderen Unmenge gleichmächtig sein. Ob sie auch tatsächlich mit einer anderen (oder gar mit jeder) Unmenge gleichmächtig ist, ist jedoch damit nicht entschieden. Zu dieser bis heute ungeklärten Frage siehe S. 171–172.

Die folgenden Überlegungen dienen dazu, die Einführung des FREGEschen Anzahlbegriffs vorzubereiten. Man stelle sich sämtliche Klassen symbolisch als Körper (etwa Kugeln) in einem räumlichen Universum vor. Dabei sollen in diesem *Klassenuniversum* gleichmächtige Klassen stets in ein und demselben zusammenhängenden Raumgebiet zusammenkommen. Diese Gebiete mögen *Inseln* heißen, und es soll Folgendes gelten:

(a) auf jeder Insel liegt *mindestens eine* Klasse,

(b) auf ein und derselben Insel liegende Klassen sind *stets gleichmächtig*,

(c) auf verschiedenen Inseln liegende Klassen sind *niemals gleichmächtig*.

Dann muss wegen Theorem 5.12.9 die leere Menge eine Insel ganz für sich haben, außerdem muss es eine „Insel der Einermengen“ geben, auf der alle Einermengen (und nur diese) liegen, ebenso eine „Insel der Zweiermengen“, und nach Theorem 5.12.10 muss jede Insel entweder *ausschließlich Mengen* oder *ausschließlich Unmengen* beherbergen. Die Frage ist nun:

Ist eine solche Aufteilung der Klassen im Prinzip[432] widerspruchsfrei möglich?

Wenn ja, können wir nämlich diese „Inseln“ (über deren mengentheoretischen bzw. ontologischen Status wir uns natürlich noch Gedanken machen müssen) als FREGEsche Zahlen oder „Anzahlen“ einführen. Jede Klasse hätte dann als „ihre“ Anzahl die Insel, auf der sie liegt, und die Klassen mit gleicher Anzahl wären aufgrund der Insel-Eigenschaften (b) und (c) passenderweise genau die gleichmächtigen Klassen. Die obige Frage lässt sich klar im positiven Sinn beantworten, und zwar liegt es nicht nur im Wesen von $\sim$, sondern *jeder* (kombinatorischen oder konzeptionellen) Äquivalenzrelation R, dass sie im „Raum“ ihrer Feldobjekte eine solche „Inselstruktur“ erzeugt. Dies lässt sich wie folgt plausibel machen.

---

430 Streng beweisen lässt sich dieser Sachverhalt erst später: Siehe 5.94 S. 201.

431 Brief an DEDEKIND vom 3. 8. 1899 (CANTOR, *Briefe* Nr. 163 S. 407): „Zwei aequivalente Vielheiten sind entweder beide ‚Mengen‘, oder beide inkonsistent“.

432 Das soll heißen: in abstrakter Weise, abgesehen von den durch die räumliche Symbolik suggerierten Platzproblemen.

Während wir uns die „Aktion“ einer Relation normalerweise nur als ein „Ausrichten“ von einem Objekt auf ein anderes vorstellen (siehe S. 132), ist es bei einer *Äquivalenzrelation* R möglich, sich vorzustellen, dass sie ihre Feldobjekte „aufeinander wirft“. Das liegt an den beiden Eigenschaften der Symmetrie und der Transitivität (siehe Definition 5.12.1). Denn wenn die Äquivalenzrelation R ein Objekt x auf y ausgerichtet, richtet sie wegen der *Symmetrie* immer auch y auf x aus, so dass man von einem „Aufeinander-Ausrichten“ reden kann: Ist $x\ R\ y$ so auch $y\ R\ x$. Wenn dies gilt, und R zunächst *kein weiteres* Objekt auf y oder x ausrichtet, so spricht nichts dagegen, sich vorzustellen, dass R die aufeinander ausgerichteten Objekte x und y „zusammenwirft“. Wenn aber die Relation nun zusätzlich ein weiteres Objekt z auf x oder auf y ausrichtet, so muss sie z wegen der *Transitivität* immer auf *beide* Objekte zugleich ausrichten (denn gilt $z\ R\ x$, so wegen $x\ R\ y$ und Transitivität auch $z\ R\ y$). Darum kann man sich das Ausrichten von z auf x oder auf y als ein „Werfen“ auf die beiden bereits zusammengeworfenen Objekte x und y vorstellen. Im Endeffekt kommen also x, y, z *zu dritt* zusammen und bilden einen „vereinigten Haufen“. Richtet die Relation nun noch ein weiteres Objekt auf x oder y oder z aus, so kann man wieder per Transitivität folgern, dass sie es auf alle drei zugleich ausrichten muss und kann sich darum vorstellen, dass dieses vierte Objekt ebenfalls auf den genannten Haufen geworfen wird, in dem jetzt jedes Objekt mit jedem durch die Relation verbunden ist. Jedoch braucht R *nicht alle* Feldobjekte auf *ein und denselben* Haufen zu werfen, und so können dann „nebeneinander“ stehende, voneinander getrennte Häufen entstehen. Diese Häufen bilden offensichtlich „Inseln“ der beschriebenen Art. Im Extremfall, wie bei der Gleichheitsrelation, bildet nur je ein einzelnes Feldobjekt einen „Haufen“ bzw. eine „einsame Insel“ für sich allein. Allgemein lässt sich für jedes Feldobjekt x die Insel, zu der x gehört, beschreiben als *Gesamtheit aller Feldobjekte, welche die Relation R mit x zusammenwirft.* Üblicherweise heißt diese „Insel“

«die *Äquivalenzklasse* von x» und wird mit $[x]$ bezeichnet.

Der folgende Satz heißt aus gleich zu erläuternden Gründen „das Abstraktionsprinzip“:[433]

5.12.11 Abstraktionsprinzip *Ist R eine Äquivalenzrelation und sind x und y Feldobjekte von R, so gilt $x\ R\ y \Leftrightarrow [x] = [y]$, d. h. $x\ R\ y$ und $[x] = [y]$ haben stets den gleichen Wahrheitswert.*

Beweis. Zu zeigen ist: Aus $[x] = [y]$ folgt $x\ R\ y$, und aus $x\ R\ y$ folgt $[x] = [y]$.
Sei zunächst $[x] = [y]$. Dann ist $x\ R\ y$ zu zeigen. Zunächst ist $y\ R\ y$, also gehört y zur Insel $[y]$. Diese ist aber nach Voraussetzung $= [x]$. Also gehört y zur Insel $[x]$. Das heißt aber: Die Relation wirft y mit x zusammen, also gilt $x\ R\ y$, was zu zeigen war.

Sei umgekehrt $x\ R\ y$ vorausgesetzt. Zu zeigen ist, dass die Insel von x gleich der Insel von y ist, d. h. dass jedes zur einen Insel gehörige Objekt auch zur anderen gehört und umgekehrt. Gehöre also Feldobjekt a zur Insel von x (so dass $x\ R\ a$). Da $x\ R\ y$ vorausgesetzt ist, folgt per Symmetrie $y\ R\ x$. Insgesamt gilt also $y\ R\ x$ und $x\ R\ a$, also per Transitivität $y\ R\ a$, was heißt, dass a zur Insel von y gehört. Damit haben wir für *beliebige* Feldobjekte x und y gezeigt:

(1a) *Wenn $x\ R\ y$* gilt, gehört jedes zur Insel von x gehörige Objekt auch zur Insel von y.

Die *Beliebigkeit* der Feldobjekte x und y erlaubt es aber auch sofort, x und y zu vertauschen:

(1b) *Wenn $y\ R\ x$* gilt, gehört jedes zur Insel von y gehörige Objekt auch zu jener von x.

Nach Voraussetzung gilt $x\ R\ y$, wegen der Symmetrie von R gilt aber auch $y\ R\ x$. Daher sind die Voraussetzungen von (1a) *und* (1b) *beide* erfüllt, so dass beide Inseln identisch sind. □

[433] Auch bei Klaua, *Mengenlehre* S. 85f wird dieser Satz das „Abstraktionsprinzip“ genannt.

Das Abstraktionsprinzip bedeutet nun: *a und b werden genau dann zusammengeworfen* ($a\ R\ b$), *wenn sie zur selben Insel gehören* ($[a] = [b]$). Damit ist auch klar, was dies mit „Abstraktion“ zu tun hat: Wir können eine Äquivalenzrelation verstehen *als eine Anweisung, die Feldobjekte einer bestimmten Abstraktion zu unterwerfen*, die genau so weit geht, dass „zusammengeworfene“ Elemente nicht mehr unterschieden werden können, also zu einem einzigen abstrakten Objekt verschmelzen. Es verwandeln sich dann die von der Relation gebildeten „Häufen“ (oder „Inseln“ oder, wie sie üblicherweise heißen, „Äquivalenzklassen“) in jeweils *ein einziges abstraktes Objekt*, so dass die Inseln diese neuen, abstrakten Objekte repräsentieren (oder sind). Das Äquivalenzprinzip besagt so gesehen, *dass die zusammengeworfenen Elemente* ($a\ R\ b$) *nicht mehr unterschieden werden* ($[a] = [b]$).

Wenn nun R eine als klarer Begriff vorliegende „konzeptionelle Relation“ der erweiterten Theorie ist (wie es bei $\sim$ der Fall ist), so können diese „Abstraktionen“ wirklich durchgeführt werden und liefern uns als Resultate Begriffe, die wir mit den „Inseln“ gleichsetzen können, deren Instanzen die jeweils zu einer „Insel“ gehörenden Feldobjekte sind. Sind alle auf einer Insel liegenden Klassen Mengen (also Individuen), so existiert außerdem eine gewöhnliche (kombinatorische) Klasse, welche diese Individuen zusammenfasst; dies ist immer der Fall, wenn R eine gewöhnliche kombinatorische Relation der elementaren Theorie ist. So können wir die genannten Häufen, Inseln oder Äquivalenzklassen wie folgt mit Kollektionen gleichsetzen:

1. Enthält eine Insel nur Individuen, identifizieren wir die Insel mit der Klasse, die genau diese Individuen enthält.

2. Enthält eine Insel mindestens eine Unmenge, so ist die Relation eine konzeptionelle und es lässt sich durch Abstraktion ein Begriff gewinnen, der die zur „Insel“ gehörigen Feldobjekte umfasst. Dieser Begriff ist dann eine entsprechende „konzeptionelle Klasse“ der *erweiterten Theorie* und wir können die Insel mit dieser Klasse gleichsetzen.

In jedem Fall gibt es eine der Insel entsprechende Kollektion, so dass wir definieren können:

5.12.12 Definition (teilweise für die erweiterte Theorie) Ist R (kombinatorische oder konzeptionelle) Äquivalenzrelation und a Feldobjekt von R, soll in der *erweiterten Theorie*

$[a]_R$ [Lesart: Insel oder Äquivalenzklasse von a bezüglich R]

die *Kollektion* bezeichnen, welche die Feldobjekte x umfasst, für die $x\ R\ a$ gilt. Sind alle diese x Individuen, so ist $[a]_R$ also die *Klasse* $\{x \mid x\ R\ a\}$. In der *elementaren Theorie* benutzen wir $[a]_R$ nur dann, wenn R eine kombinatorische Relation ist: Dann sind die x immer Individuen, und es gilt $[a]_R = \{x \mid x\ R\ a\}$. Für $[a]_R$ schreiben wir auch $[a]$, wenn der Bezug zu R klar ist. Die von R induzierte „Inselstruktur“ lässt sich nun exakt nachweisen:

5.12.13 Theorem Für die Inseln (oder Äquivalenzklassen) einer Äquivalenzrelation R gilt:

Auf jeder Insel $[a]$ liegt mindestens ein Feldobjekt, nämlich a. (5.43)

Für je zwei Feldobjekte a und b derselben Insel gilt stets $a\ R\ b$. (5.44)

Für je zwei Feldobjekte a und b verschiedener Inseln gilt niemals $a\ R\ b$. (5.45)

Beweis. Zu (5.43). Auf Insel $[a]$ liegt a, denn aufgrund der Reflexivität von R gilt $a\ R\ a$.

Zu (5.44). Gehören a und b zur Insel $[x]$, folgt $a\ R\ x$ und $b\ R\ x$ (und per Symmetrie auch $x\ R\ b$,) also insgesamt $a\ R\ x$ und $x\ R\ b$, also per Transitivität $a\ R\ b$.

Zu (5.45). Mögen a und b zu verschiedenen Inseln $[x]$ und $[y]$ gehören. Angenommen, es gilt dennoch $a\ R\ b$. Da a zu $[x]$ gehört, gilt $a\ R\ x$ und per Symmetrie $x\ R\ a$. Zusammen mit $a\ R\ b$ folgt per Transitivität $x\ R\ b$. Da b zu $[y]$ gehört, gilt $b\ R\ y$. Aus $x\ R\ b$ und $b\ R\ y$ folgt aber per Transitivität

$x\ R\ y$, also per Abstraktionsprinzip $[x] = [y]$. Doch waren $[x]$ und $[y]$ als verschieden vorausgesetzt. Somit war die ANNAHME falsch. □

Damit ist die Frage auf S. 167 positiv beantwortet und wir können die Klassen auf voneinander getrennte „Inseln“ verlegen, welche die Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ sind. Wir setzen nun die *Anzahl einer Klasse* C mit der Insel $[C]_\sim$ gleich, auf der sie liegt. Für $[C]_\sim$ schreiben wir kurz $\llbracket C \rrbracket$ und nennen diese Insel die FREGE*sche Anzahl* oder FREGE*sche Zahl* von C:

5.12.14 Definition (teilweise für die erweiterte Theorie) Für Klassen C soll

$\llbracket C \rrbracket$ [Lesarten: Fregesche Zahl, Anzahl oder Klassenstufe von C]

in der *erweiterten Theorie* die Kollektion $[C]_\sim$ aller zu C gleichmächtigen Klassen bezeichnen:
Ist C *Menge*, so ist $\llbracket C \rrbracket$ die Mengenklasse $\{X \mid X \sim C\}$.
Ist C *Unmenge*, so ist $\llbracket C \rrbracket$ die konzeptionelle Klasse der mit C gleichmächtigen Unmengen.
In der *elementaren Theorie* soll $\llbracket C \rrbracket$ nur in dem Fall benutzt werden, dass C eine Mengenbezeichnung ist, so dass hier stets $\llbracket C \rrbracket = \{X \mid X \sim C\}$ gilt.

Wegen des Abstraktionsprinzips 5.12.11 können wir für Klassen C, D ohne weiteres festhalten:

$$C \sim D \;\Leftrightarrow\; \llbracket C \rrbracket = \llbracket D \rrbracket, \text{ und wegen (5.43) gilt } C \in \llbracket C \rrbracket. \tag{5.46}$$

Betrachten wir nun wieder das „Klassenuniversum“, in dem die Klassen auf ihren Inseln, den FREGEschen Zahlen, liegen. Von „Zahlen“ erwartet man, dass sie in einer gewissen Reihenfolge „aufeinander folgen“. Man sollte sich daher die „Klasseninseln“ wenn möglich als *übereinander liegende Stufen* vorstellen. Deshalb schlage ich für FREGEsche Zahlen den Namen *Klassenstufen* vor. Dabei soll sich die Höhe einer Stufe nach der „Größe“ der darauf befindlichen Klassen richten: Haben die auf einer bestimmten Stufe t liegenden Klassen (in einem bestimmten, noch zu definierenden Sinn)[434] „mehr“ Elemente als die auf einer anderen Stufe s liegenden, möge man sich Stufe s als „unterhalb“ von t liegend vorstellen. Als relativ „tief gelegene“ Stufen wird man dann die Inseln nehmen müssen, auf denen nur Mengen liegen, die ich daher *Mengenstufen* nennen, und als „sehr hoch gelegene“ diejenigen, auf denen nur Unmengen liegen, die ich *Unmengenstufen* nenne:

5.12.15 Definition (teilweise für die erweiterte Theorie)

Die FREGEschen Zahlen $\llbracket C \rrbracket$ für Klassen C heißen *Klassenstufen*.
Die FREGEschen Zahlen $\llbracket M \rrbracket$ für Mengen M heißen *Mengenstufen*.
Die FREGEschen Zahlen $\llbracket U \rrbracket$ für Unmengen U heißen *Unmengenstufen*.

Dies gilt für die *erweiterte Theorie*. Die *elementare* Theorie betrachtet nur die *Mengenstufen* $\llbracket M \rrbracket = \{X \mid X \sim M\}$. Die Mengenstufen sind auch die *eigentlichen* FREGE*schen Zahlen*, die man normalerweise mit ≪FREGEschen Zahlen≫ meint; diesen stehen die Unmengenstufen als *uneigentliche* FREGE*sche Zahlen* gegenüber.

Die „untersten drei“ Klassenstufen oder FREGEschen Zahlen sind offenbar die Äquivalenzklassen der leeren Menge bzw. der einelementigen bzw. der zweielementigen Mengen:[435] Bezeichnet 0 die leere Menge, 1 eine einelementige Menge, etwa $\{0\}$, und 2 eine zweielementige Menge, etwa $\{0, 1\}$, können diese FREGEschen Zahlen als $\llbracket 0 \rrbracket$, $\llbracket 1 \rrbracket$ und $\llbracket 2 \rrbracket$ bezeichnet werden:

[434] Siehe Definition 5.15.1 S. 200, Zusatz 2.

[435] Inwiefern diese drei Klassenstufen wirklich in einem *präzisen* Sinn die „untersten“ oder „kleinsten“ Klassenstufen sind, wird sich erst später klären (siehe die Ausführungen nach Theorem 5.15.22 auf S. 206).

5.12.16 Die ersten Fregeschen Zahlen

$\llbracket 0 \rrbracket$, d. h. $\llbracket \emptyset \rrbracket$ ist nach Satz 5.40 S. 166 die Klasse $\{\emptyset\}$ „aller leeren Mengen“.
$\llbracket 1 \rrbracket$, d. h. $\llbracket \{0\} \rrbracket$ ist nach Satz 5.41 S. 166 die Klasse U_1 aller Einermengen.
$\llbracket 2 \rrbracket$, d. h. $\llbracket \{0,1\} \rrbracket$ ist nach Satz 5.42 S. 166 die Klasse U_2 aller Zweiermengen.

Sind $a, b, u, v, \odot, \lightning$ voneinander verschiedene Urelemente, können wir uns diese drei Mengenstufen etwa wie folgt vorstellen:

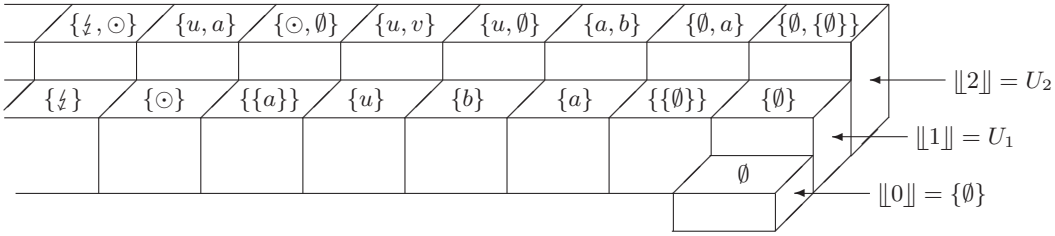


Abbildung 5.15: Die ersten drei Mengenstufen (Fregeschen Zahlen)

Die Frage, wie „groß“ eine Klassenstufe ist, kann nun einen doppelten Sinn haben: Man kann wissen wollen, wie „hoch“ die Stufe ist (hier wäre $\llbracket 0 \rrbracket$ ganz unten, gefolgt von $\llbracket 1 \rrbracket$ usw.), oder wie viele Klassen auf einer Stufe liegen. Diesbezüglich ist klar, dass $\llbracket 0 \rrbracket$ nur ein Element besitzt, während alle höheren Stufen unendlich viele Elemente haben. Es lässt sich sogar zeigen, dass alle eigentlichen Fregeschen Zahlen außer $\llbracket 0 \rrbracket$ Unmengen sind:

5.12.17 Theorem *Für Mengen A mit $A \neq \emptyset$ ist die Fregesche Zahl $\llbracket A \rrbracket$ von A eine Unmenge. Das gilt auch für jede von $\llbracket 0 \rrbracket$ verschiedene Mengenstufe.*

Beweis. Siehe Anhang S. 393–394. □ Abgesehen von den uneigentlichen Fregeschen Zahlen (oder Unmengenstufen) und $\llbracket 0 \rrbracket$ gilt also: *Die Fregeschen Zahlen sind Unmengen.*[436] Das macht sie „unhandlich“, weshalb sie in der Mathematik durch andere „Zahlen“ ersetzt wurden (siehe S. 208–212). Ein Vorteil der Fregeschen Zahlen ist aber, dass mit ihnen eine Anzahl für *jede beliebige Menge* (und in der erweiterten Theorie sogar: für *jede beliebige Klasse*) vorliegt, während gewöhnliche Zahlen nur als Anzahlen *endlicher* Mengen dienen.

Insofern nun auch die unendlichen Klassen auf verschieden hohen Stufen liegen (dass dies tatsächlich der Fall ist, wird sich später zeigen),[437] können wir in einem klar definierten Sinn von „verschiedenen Stufen des Unendlichen“ und „verschiedenen unendlichen Anzahlen“ reden. Eine noch unbeantwortete Frage ist aber die, ob es auch im allerhöchsten Bereich, im Bereich der Unmengen, verschiedene Stufen gibt, oder ob *alle Unmengen miteinander gleichmächtig sind*. Wären sie gleichmächtig, so würden sie nach den Worten von Jürgen Schmidt

> „eine einzige undifferenzierte Größe ausmachen, vergleichbar in etwa dem alten vor-Cantorschen … undifferenzierten Unendlich (∞), dem *einen* Gegensatz zu allem Endlichen“.[438]

Wir werden sehen, dass Unmengen, über denen eine sog. *Wohlordnung* existiert, immer gleichmächtig sind (Satz 5.68 S. 189), und das Gleiche gilt auch für Unmengen, die Komplemente von Mengen sind (Korollar 5.15.13 S. 203). Aber wie verhält es sich mit *beliebigen* Unmengen?

---

[436] $\llbracket 0 \rrbracket$ dagegen ist die einelementige Menge $\{\emptyset\}$ und die Unmengenstufen sind weder Mengen noch Unmengen, sondern konzeptionelle Klassen.

[437] Siehe S. 245–247 und vor allem die Abschnitte 5.20, 5.22 und 5.30.

[438] Schmidt, *Mengenlehre* S. 221.

Cantor scheint die Gleichmächtigkeit aller Unmengen als selbstverständlich vorausgesetzt zu haben, da er das „inkonsistent“ Unendliche mit dem „absolut“ Unendlichen identifizierte.[439] Einen Beweis hierfür hat er jedoch nicht erbracht. Eine Anleitung zu einem solchen findet man im Lehrbuch von Seymour Hayden und John Kennison über *Zermelo-Fraenkel Set Theory*.[440] Dieser Beweis setzt jedoch unter anderem voraus, dass es keine Urelemente gibt, also Mengen die einzigen Individuen sind: eine Einschränkung, die für eine realistische Mengenlehre nicht akzeptabel ist.[441]

John von Neumann, der Begründer der Mengenlehre mit Klassen, hat in seiner Mengenlehre unsere Frage einfach dadurch positiv entschieden, dass er ein besonderes Axiom aufstellte, welches mit der Forderung der Gleichmächtigkeit aller Unmengen äquivalent ist.[442] Dieses Neumannsche Axiom wurde anscheinend aus „ökonomischen“ Gründen aufgestellt, denn es ist ein äußerst „fruchtbares“ und mächtiges Axiom, das sich als gleichwertiger Ersatz für eine ganze Reihe von „konventionellen“ Axiomen der Mengenlehre herausgestellt hat.[443]

Wir müssen jedoch fragen, ob das Axiom wahr ist, ob es also im Bereich des unvorstellbar Großen noch Abstufungen gibt oder nicht. Dass dem so sei, ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht mehr als eine Vermutung, die ich aufgrund des genannten Neumannschen Axioms die **Neumannsche Vermutung** nennen möchte. Solange kein Beweis für oder gegen diese Vermutung erbracht werden kann, der sich *nur auf Axiome stützt, welche die unbestreitbaren elementaren Einsichten in den Aufbau des Mengen– und Klassenuniversums zum Ausdruck bringen*, muss die Frage offen gelassen werden: Denn eine direkte intuitive Einsicht in die Größenverhältnisse, die im Bereich des Unvorstellbaren walten, ist uns offenbar nicht möglich.[444] Für weitergehende Überlegungen zum Problem der Unmengenstufen verweise ich auf die Bemerkungen nach Theorem 5.15.22.

Um die hier intuitiv betrachtete Anordnung und Reihenfolge Fregescher Zahlen genauer verstehen und analysieren zu können, ist es nun jedoch notwendig, die Begrifflichkeit mit den Mitteln der mathematischen Ordnungstheorie zu schärfen.

---

439 Siehe S. 73. Wir werden diese Begriffe in Definition 5.17.39 S. 247 unterscheiden.

440 S. 156 mit Exercise 11; hierzu wird noch Exercise 7 von S. 152 benötigt.

441 Diese Voraussetzung ist bei Hayden und Kennison, *Set Theory* S. 152 enthalten im „Strong Axiom of Regularity“. Aber nicht nur dieses „strenge“ Regularitätsaxiom, sondern auch schon das darin eingeschlossene „gewöhnliche“ Fundierungsaxiom ist in einer realistischen Mengenlehre nicht in vollem Umfang zu rechtfertigen (siehe hierzu Abschnitt 5.19). Zum Ausschluss von Urelementen siehe auch S. 87.

442 Vgl. Neumann, *Die Axiomatisierung* Axiom IV.2 S. 345 und *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre* §2 S. 39, vor allem aber Neumanns Artikel *Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre*, in dem er zeigt, dass wenn die Mengenlehre in ihrem gewöhnlichen Umfang widerspruchsfrei ist, die Hinzufügung seines „Axioms IV.2“ an der Widerspruchsfreiheit nichts ändert. Aus der schwer verständlichen Formelsprache von Neumanns übersetzt, lautet dieses Axiom:

$$\ll\text{Eine Klasse } C \text{ ist genau dann eine Unmenge, wenn es eine Funktion } f \text{ mit } C \xrightarrow[\text{SRJ}]{f} \mathbb{D} \text{ gibt.}\gg$$

Zusammen mit der trivialen Tatsache, dass es eine Injektion von C in $\mathbb{D}$ gibt (nämlich die identische Funktion, die jedes Element von C auf sich selbst wirft) bedeutet die angegebene Bedingung, dass $C \sim \mathbb{D}$ gilt (dies lässt sich mit Hilfe zweier Theoreme verifizieren, die wir später beweisen werden, nämlich Theorem 5.15.3 S. 200 und 5.15.5 S. 201). So ist Neumanns Axiom gleichwertig mit der Aussage, dass die Unmengen genau die mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen Klassen sind, und dann müssen sie natürlich auch alle miteinander gleichmächtig sein. Setzt man umgekehrt die Gleichmächtigkeit aller Unmengen voraus, folgt trivialerweise, dass auch jede mit $\mathbb{D}$ gleichmächtig ist. Somit ist das Axiom mit der Forderung der Gleichmächtigkeit aller Unmengen äquivalent. Das Neumannsche Axiom wird auch in Hájek und Vopěnka, *Semisets* diskutiert (dort Axiom E2 Nr. 3141 S. 152).

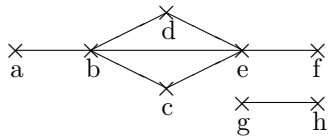
443 Neumann erkannte, dass sein Axiom das Aussonderungsaxiom, das Ersetzungsaxiom und das Auswahlaxiom („Multiplikationsaxiom“) ersetzen kann (*Die Axiomatisierung der Mengenlehre* S. 347). Azriel Levy bewies 1968, dass es zusätzlich noch das Vereinigungsmengenaxiom entbehrlich macht (Levy, *Neumann's Axiom System*). Petr Hájek schließlich benutzte es im Rahmen seiner „Halbmengenlehre“ als Regularitätsaxiom (Hájek und Vopěnka, *Semisets* Nr. 3101 S. 139).

444 Meine Vermutung geht eher dahin, dass das Neumannsche Axiom nicht wahr ist (siehe S. 351).

5.13 Ordnungstheorie

Halbordnungen und halbgeordnete Klassen

Man kann den „Einfluss“ einer Relation auf gegebene Objekte durch ein so genanntes *Ordnungsdiagramm* veranschaulichen. Hierzu identifiziert man die Objekte mit Punkten (die man durch Kreuze $\times$ markiert) und verbindet diese Punkte so durch ein Geflecht von Linien, dass genau dann $a\ R\ b$ gilt, wenn man auf diesen Linien durch eine nach rechts vorrückende Bewegung von a nach b gelangen kann. Ein Ordnungsdiagramm für eine Relation R sieht beispielsweise so aus:



Für die hier dargestellte Relation R liest man aus dem Diagramm folgende Relationsformeln ab: $a\ R\ x$ für alle $x \in \{b, c, d, e, f\}$, $b\ R\ x$ für alle $x \in \{c, d, e, f\}$, $c\ R\ x$ für alle $x \in \{e, f\}$, $d\ R\ x$ für $x \in \{e, f\}$ sowie $e\ R\ f$ und $g\ R\ h$. Die Objekte c und d sind nicht durch einen von links nach rechts gehenden Weg verbunden, also gilt weder $c\ R\ d$ noch $d\ R\ c$. Auch wenn x in $\{g, h\}$ und y außerhalb von $\{g, h\}$ liegt, gilt weder $x\ R\ y$ noch $y\ R\ x$, da dann überhaupt keine Linie x und y verbindet.

Eine Darstellung durch ein Ordnungsdiagramm kann nur dann gelingen, wenn die Relation R in Bezug auf jedes darzustellende Objekt a bzw. a, b, c die folgenden Eigenschaften hat:

(1) *Irreflexivität über a*: Es gilt *nicht* $a\ R\ a$
(denn man kann ja nicht a links von sich selbst platzieren),

(2) *Transitivität über a, b, c*: Aus $a\ R\ b$ und $b\ R\ c$ folgt $a\ R\ c$
(denn wenn man auf von rechts nach links führenden Linien von a nach b und ebenso von b nach c gelangen kann, so auch auf a nach c).

Auch umgekehrt gilt: Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, spricht nichts mehr gegen die Möglichkeit der Darstellung in einem Ordnungsdiagramm (es sei denn ein gewisser Platzmangel, der sich dann einstellen könnte, wenn die Objekte so zahlreich sind, dass „mehr“ Objekte vorhanden sind als die Ebene Punkte besitzt[445]). Man nennt daher eine Relation, welche die genannten Bedingungen (1) und (2) erfüllt, also in Bezug auf die Objekte *irreflexiv* und *transitiv* ist, eine *Ordnungsrelation* über diesen Objekten, und sagt, dass die Objekte durch die Relation *geordnet* werden. Es ist hier zu beachten, dass wir für die folgende Definition der Ordnungsrelation nicht die anschauliche Möglichkeit der Anordnung in einem Ordnungsdiagramm, sondern allein die damit verbundenen abstrakten Eigenschaften (1) und (2) benutzen:[446]

5.13.1 Definition Eine Relation heißt *Ordnung(srelation)* oder *Halbordnung über einer Klasse C*, wenn sie über allen ihren Elementen irreflexiv und transitiv ist. Sie heißt *Ordnung* oder *Halbordnung*, wenn sie über ihrem Feldbereich eine solche ist.[447]

---

445 Dann kann man nur noch einen Teil der Objekte in einem Ordnungs-Diagramm darstellen, muss also das Ganze auf mehrere sich ergänzende Ordnungs-Diagramme (eventuell in verschiedenen Anschauungsräumen) verteilen.

446 Die beiden Eigenschaften benutzte bereits Cantor in seiner Definition der „einfach geordneten Menge“ (vgl. Cantor, *Principien* § 4 S. 86).

447 Formal:

R (ist) irreflexiv über a $:\Leftrightarrow$ R Relation $\wedge\ aRa$

R (ist) transitiv über a, b, c $:\Leftrightarrow$ R Relation $\wedge\ (aRbRc \to aRc)$

R (ist) (Halb)Ordnung über C $:\Leftrightarrow$ R Relation $\wedge\ C$ Klasse $\wedge \bigwedge_{a\in C} \bigwedge_{b\in C} \bigwedge_{c\in C} ((aRa) \wedge (aRbRc \to aRc))$

R (ist) (Halb)Ordnung $:\Leftrightarrow$ R (ist) (Halb)Ordnung über $\mathtt{Fd}(R)$

Die *Halb*ordnung ist von der *Voll*ordnung zu unterscheiden, die wir auf S. 176–181 definieren werden.

Beispiele.

(1) Betrachten wir eine Klasse von Gegenständen, die sich eindeutig hinsichtlich ihrer Größe vergleichen lassen (etwa Zeiträume, Linien, Kugeln, ...), und schreiben $a < b$, wenn ein Gegenstand a dieser Klasse kleiner als ein anderer Gegenstand b dieser Klasse ist, so ist die so definierte „Kleinerrelation“ $<$ eine Ordnungsrelation, denn kein Gegenstand ist kleiner als er selbst (Irreflexivität) und aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (Transitivität).

(2) In der *erweiterten Theorie* ist die echte Teilklassenrelation $\subset$ eine Halbordnung.

(3) Über der leeren Klasse ist jede Relation eine Ordnung, wie das Leerklassen-Lemma 5.9.3 S. 117 zeigt. Die leere Relation aber ist eine Ordnung *nur* über der leeren Klasse,[448] und da die leere Klasse ihr Feldbereich ist, ist sie auch eine Ordnung schlechthin.

Ordnungsrelationen werden meist durch ein „nach rechts oder links geöffnetes“ Symbol bezeichnet wie etwa $<, \subset, \sqsubset, \prec$ oder $>, \supset, \sqsupset, \succ$. Dann bezeichnet das „andersherum“ geschriebene Symbol die Umkehrrelation, also z. B. $>$ die Umkehrrelation von $<$. Unterstreicht man das Relationszeichen (geht also etwa von $<$ zu $\leq$ über), so steht das unterstrichene Zeichen für die Relation, die x genau dann auf y ausrichtet, wenn $x\ R\ y$ *oder* $x = y$ gilt. Auch diese unterstrichenen Zeichen kann man wieder umdrehen, um die Umkehrrelation zu bezeichnen.

5.13.2 Definition Als typische Ordnungsrelation werden die in Beispiel (1) genannten „Kleinerrelationen“ betrachtet. Für *beliebige* Ordnungsrelationen $<$ und Objekte x, y sagt man daher:

x ist ≪kleiner≫ als y

bzw. x ist ≪größer≫ als y

bzw. x ist ≪kleiner oder gleich≫ (kurz ≪kleinergleich≫) y

bzw. x ist ≪größer oder gleich≫ (kurz: ≪größergleich≫) y,

wenn $x < y$ bzw. $x > y$ bzw. $x \leq y$ bzw. $x \geq y$ gilt. Wie oben erläutert, gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $x < y$ oder $x = y$ gilt, und $>$ bzw. $\geq$ ist Umkehrrelation zu $<$ bzw. $\leq$.

Für eine Ordnungsrelation $<$ und die entsprechende Relation $\leq$ können wir nun folgende (im Ordnungsdiagramm sofort anschaulich einleuchtenden) Grundeigenschaften logisch ableiten:

5.13.3 Theorem *Sei $<$ eine Ordnungsrelation über x, y, z. Dann gilt:*

Irreflexivität von $<$:	*$x < x$ ist stets falsch.*	(5.47)
Reflexivität von $\leq$:	*$x \leq x$ ist stets wahr.*	(5.48)
Asymmetrie von $<$:	*$x < y$ und $y < x$ gilt niemals zugleich.*	(5.49)
Identitivität von $\leq$:	*$x \leq y$ und $y \leq x$ gilt nur dann zugleich, wenn $x = y$.*	(5.50)
Transitivität von $<$:	*Aus $x < y < z$ folgt $x < z$.*	(5.51)
Transitivität von $\leq$:	*Aus $x \leq y \leq z$ folgt $x \leq z$.*	(5.52)
gemischte Transitivität:	*Aus $x < y \leq z$ und ebenso aus $x \leq y < z$ folgt $x < z$.*	(5.53)

[448] Über nichtleeren Klassen ist sie nicht reflexiv und daher keine Ordnung.

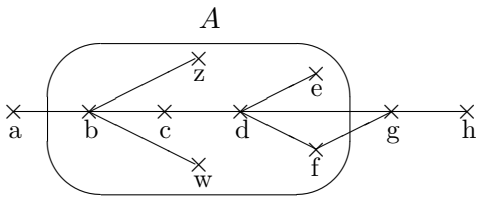
Beweis. Siehe Anhang S. 394. □ Ist $<$ eine Halbordnung und A eine Klasse von Feldobjekten von $<$, so werden bestimmte Elemente von A „minimale Elemente“, „maximale Elemente“, „Minima“ und „Maxima“ (von A bezüglich $<$) genannt:

5.13.4 Definition Sei m Element einer Klasse A von Feldobjekten von $<$.

- m ist (<-)*minimales Element* von A :⇔ *kein* Element von A ist kleiner als m
- m ist (<-)*Minimum* von A :⇔ *alle* Elemente von A sind größer oder gleich m
- m ist (<-)*maximales Element* von A :⇔ *kein* Element von A ist größer als m
- m ist (<-)*Maximum* von A :⇔ *alle* Elemente von A sind kleiner oder gleich m

Minimale und maximale Elemente heißen *extremale* Elemente, während Minima und Maxima als *Extrema* zusammengefasst werden. Unter einem *Maximum, Minimum, maximalen und minimalen Element der Relation* $<$ *schlechthin* versteht man ein solches von `Fd`($<$).

In einem Ordnungsdiagramm von $<$, das sämtliche Elemente von A enthält, erkennt man minimale und maximale Elemente x von A daran, dass man von x aus auf dem Liniengeflecht kein Element von A mehr erreichen kann, wenn man weiter nach links bzw. nach rechts läuft:



In diesem Beispiel ist b das einzige minimale Element von A, während e, f, w und z die maximalen Elemente sind. – Ein Minimum bzw. Maximum erkennt man dagegen daran, dass es von diesem aus zu jedem anderen Element von A einen nach rechts bzw. nach links gehenden Weg auf dem Liniengeflecht gibt. In obigem Beispiel ist das minimale Element b also zugleich ein Minimum, aber keines der maximalen Elemente ist ein Maximum: Von e und f aus kann man w und z nicht auf einem ständig nach links gehenden Weg erreichen; von w und z aus aber c, d, e und f nicht. Offensichtlich ist ein Minimum bzw. Maximum immer auch ein minimales bzw. maximales Element, aber nicht umgekehrt. Und während es mehrere minimale und maximale Elemente geben kann, kann es stets höchstens ein Minimum und ein Maximum geben: Denn wenn a ein Minimum bzw. Maximum ist, müssen alle anderen Elemente von A links bzw. rechts von a stehen. Diese Einsichten werden in den folgenden beiden Theoremen ohne Bezug auf die Anschauung formuliert und bewiesen:

5.13.5 Theorem *Eine Klasse A hat höchstens ein $<$-Minimum und höchstens ein $<$-Maximum.* Man spricht gegebenenfalls von ≪dem≫ Minimum bzw. Maximum und schreibt hierfür $\min_< A$ oder $\max_< A$ oder kurz $\min A$ oder $\max A$, wenn der Bezug zu $<$ klar ist.

Beweis. Sei x und ebenso y ein Minimum von A. Weil x ein Minimum ist, gilt $x \leq y$, und weil auch y ein Minimum ist, gilt $y \leq x$. Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt aber per Identitivität (Aussage 5.50 S. 174) dass $x = y$. Analog zeigt sich, dass es nur ein Maximum geben kann.[449] □

5.13.6 Theorem *Ein Minimum von A ist zugleich minimales, ein Maximum zugleich maximales Element von A.*

Beweis. Sei m Minimum von A. Dann gilt für jedes Element a von A, dass $m \leq a$. Um zu zeigen, dass m minimales Element ist, muss verifiziert werden, dass $a < m$ *nicht* gilt. Angenommen, es

[449] Man ersetze im vorstehenden Beweis ≪Minimum≫ durch ≪Maximum≫ und ≪$x \leq y$≫ durch ≪$y \leq x$≫.

gilt $a < m$. Zusammen mit $m \leq a$ würde sich dann ergeben, dass $a < m \leq a$, also per gemischter Transitivität (Satz 5.53 S. 174) $a < a$. Das ist aber falsch, da $<$ irreflexiv ist. Also ist die ANNAHME zu verwerfen, und $a < m$ gilt *nicht*. Somit ist m minimales Element. Analog zeigt sich, dass jedes Maximum m auch ein maximales Element sein muss.[450] □

Die „Umkehrung" von Theorem 5.13.6, dass also jedes extremale Element ein Extremum ist, ist falsch, weil es ja im Ordnungsdiagramm „übereinander" liegende extremale Elemente geben kann. Diese Umkehrung würde aber gelten, wenn alle Elemente im Ordnungsdiagramm auf ein und derselben, von rechts nach links verlaufenden Linie lägen. Ordnungsrelationen, bei denen dies der Fall ist, heißen lineare Ordnungen oder Vollordnungen; diese werden im folgenden Abschnitt betrachtet.

5.13.7 Definition $\mathcal{A}$ (ist) *strukturierte Klasse* $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Klasse A und ein Objekt S, so dass $\mathcal{A} = \langle A, S\rangle$. Die erste Komponente A einer Struktur heißt *Träger* oder *Trägerklasse* und die zweite Komponente S heißt *Struktur* der strukturierten Klasse.

Bemerkung. Man kann sich eine strukturierte Klasse so vorstellen, dass die Klasse A das Objekt S „trägt" und von ihm „geprägt" wird, ähnlich wie eine Form die Materie prägt, welche sie trägt. Ist A eine Menge bzw. Unmenge, heißt $\langle A, S\rangle$ auch eine strukturierte *Menge* bzw. *Unmenge*. Auch spricht man in diesem Zusammenhang $\langle A, S\rangle$ oft Eigenschaften zu, die streng genommen solche von A sind. So nennt man beispielsweise $\langle A, S\rangle$ leer, nichtleer, endlich oder unendlich, wenn A leer bzw. nichtleer bzw. endlich bzw. unendlich ist. Die für uns wichtigsten strukturierten Klassen $\langle A, S\rangle$ sind solche, bei denen die Struktur S eine ≪Relation in A≫ ist, welche also ihre „Aktivität" ganz in der Klasse A entfaltet. Dann spricht man von einer *relational strukturierten Klasse*:

5.13.8 Definition Eine *strukturierte Klasse* $\langle A, S\rangle$ heißt *relational strukturiert* oder ein *Relational*, wenn ihre Struktur S eine ≪Relation in A≫ ist: also nach Def. 5.10.38 S. 133 eine Relation, die keine Feldobjekte außerhalb von A besitzt.[451]

Vereinbarung. Ist A eine Klasse und R irgendeine Relation, so behandeln wir den Ausdruck $\langle A, R\rangle$ in ordnungstheoretischem Kontext immer so, als stehe er für ein Relational, auch wenn R Feldobjekte *außerhalb* von A besitzt. In diesem Fall ist die *Volleinschränkung* $R /\!\!/ A$ von R auf A (siehe Definition 5.10.45 S. 135) eine ≪Relation in A≫, und wir vereinbaren, dass $\langle A, R\rangle$ in solchen Fällen als Kurzbezeichnung für das Relational $\langle A, R /\!\!/ A\rangle$ zu verstehen ist. Dadurch wird die Notation oft wesentlich übersichtlicher. Aufgrund dieser Notationsvereinbarung gilt:

5.13.9 Theorem *Nehmen Relationen $<$ und $\sqsubset$ bezüglich der Elemente einer Klasse A dieselben Ausrichtungen vor, so sind die Relationale $\langle A, <\rangle$ und $\langle A, \sqsubset\rangle$ identisch.*

Beweis. Da beide Relationen in A die gleiche Aktivität entfalten, gilt $< /\!\!/ A \;=\; \sqsubset /\!\!/ A$, so dass mit obiger Notationsvereinbarung $\langle A, <\rangle = \langle A, < /\!\!/ A\rangle = \langle A, \sqsubset /\!\!/ A\rangle = \langle A, \sqsubset\rangle$ ist. □

5.13.10 Definition Eine *geordnete Klasse* oder *halbgeordnete Klasse* ist ein Relational $\langle A, R\rangle$, dessen Relation R eine Ordnungsrelation über A ist.[452]

Zum Beispiel ist $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ eine halbgeordnete Klasse.[453]

---

[450] Man ersetze im vorstehenden Beweis ≪Minimum≫ durch ≪Maximum≫, ≪minimales Element≫ durch ≪maximales Element≫, ≪$m \leq a$≫ durch ≪$a \leq m$≫, ≪$m < a$≫ durch ≪$a < m$≫, und ≪$a < m \leq a$≫ durch ≪$a \leq m < a$≫.

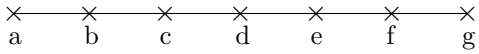
[451] Formal: $\mathcal{A}$ (ist) Relational $:\Leftrightarrow \bigvee_{AR} \Big(R$ Relation in A und $\mathcal{A} = \langle R, A\rangle\Big)$.

[452] Formal: $\mathcal{A}$ (ist) (halb)geordnete Klasse $:\Leftrightarrow \bigvee_{AR} \Big(\langle A, R\rangle$ Relational $\wedge\ R$ Ordnung über $A\ \wedge\ \mathcal{A} = \langle A, R\rangle\Big)$.

[453] Die leere Relation $\emptyset$ entfaltet außerhalb von $\emptyset$ keine Aktivität, ist also eine ≪Relation in $\emptyset$≫, so dass $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ eine relational strukturierte Klasse ist; darüber hinaus ist sie eine Ordnungsrelation über $\emptyset$ (siehe Beispiel 3 S. 174), also ist $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ eine halbgeordnete Klasse.

Vollordnungen und vollgeordnete Klassen

Eine „lineare“ Ordnungsrelation oder „Vollordnung“ ist eine Ordnungsrelation, deren Ordnungsdiagramm sich so gestalten lässt, dass alle Objekte hintereinander auf ein und derselben von links nach rechtes gezogenen Linie liegen:



Eine von der Anschauung unabhängige Definition ist die folgende:

5.13.11 Definition Eine Relation $<$ heißt *lineare Ordnungsrelation* oder *Vollordnung über einer Klasse C*, wenn sie eine Halbordnung (also irreflexiv und transitiv) und zusätzlich *linear* ist. Letzteres soll heißen, dass für beliebige Elemente x, y, z von C gilt:

$$\text{Linearität:} \qquad \begin{array}{l} x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } y < x \\ \text{d. h. } x \text{ ist kleiner, gleich oder größer als } y \end{array} \tag{5.54}$$

Weiter heißt eine Relation lineare Ordnungsrelation oder Vollordnung schlechthin, wenn sie über ihrem Feldbereich irreflexiv, transitiv und linear ist.[454] Es zeigt sich, dass für eine Vollordnung über C sogar *genau* eine der oben genannten drei Relationsformeln zutrifft:

5.13.12 Trichotomiegesetz für Vollordnungen Ist $<$ eine lineare Ordnungsrelation über C, so gilt für beliebige Elemente x, y, z von C:

$$\text{Trichotomie:} \qquad \begin{array}{l} \textit{Genau eine} \text{ der drei Relationsformeln ist wahr:} \\ x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } y < x \\ (\text{das heißt: } x \text{ ist } \textit{entweder} \text{ kleiner } \textit{oder} \text{ größer } \textit{oder} \text{ gleich } y). \end{array} \tag{5.55}$$

Beweis. Da wir (5.54) voraussetzen können, ist nur zu zeigen, dass *nicht zugleich mehr als eine der Relationsformeln wahr ist*. Wäre zugleich $x < y$ und $x = y$ wahr, könnte man in der wahren Formel $x < y$ wegen der Identität von x mit y das y durch x ersetzen und erhielte $x < x$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$. Also ist dies nicht möglich. Genau so zeigt sich, dass $x = y$ mit $y < x$ nicht vereinbar ist. Wäre schließlich $x < y$ und $y < x$ zugleich wahr, so folgte per Transitivität $x < x$, wieder im Widerspruch zur Irreflexivität. □

5.13.13 Definition Eine *vollgeordnete Klasse* ist ein Relational $\langle A, R\rangle$, dessen Relation R eine Vollordnung über A ist.[455]

Beispiel. Über die leere Klasse und die leere Relation können wir hier ähnlich wie im Abschnitt über Halbordnungen (siehe Beispiel 3 S. 174; vgl. auch Fußnote 453 auf S. 176) urteilen, dass jede Relation eine Vollordnung über der leeren Klasse ist, dass die leere Relation *nur* über sich selbst eine Vollordnung ist, dass die leere Relation eine Vollordnung schlechthin (d. h. über ihrem Feldbereich) ist, und dass schließlich $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ eine vollgeordnete Klasse ist.

Als **Standardbeispiel** für eine vollgeordnete Klasse gelte $\langle \mathfrak{g}, <\rangle$, wobei

- $\mathfrak{g}$ eine sich von rechts nach links erstreckende Gerade (genauer: die Menge der Punkte einer solchen Geraden) ist, und

---

[454] Formal:
$<$ (ist) Vollordnung über C $:\Leftrightarrow$ $<$ Halbordnung über $C \wedge \bigwedge_{x\in C} \bigwedge_{y\in C} \Big(x < y \ \vee x = y \ \vee y < x\Big)$
$<$ (ist) Vollordnung $:\Leftrightarrow$ $<$ Relation $\wedge$ $<$ Vollordnung über $\mathtt{Fd}(<)$.

[455] Formal: $\mathcal{A}$ (ist) vollgeordnete Klasse $:\Leftrightarrow \bigvee_{AR} \Big(\langle A, R\rangle$ Relational $\wedge$ R Vollordnung über A $\wedge$ $\mathcal{A} = \langle A, R\rangle\Big)$.

- $<$ die Links-Rechts-Relation auf der Geraden $\mathfrak{g}$ ist; diese ist definiert dadurch, dass $\mathtt{Vb}(<) = \mathtt{Nb}(<) = \mathfrak{g}$ ist, und dass für x, y aus $\mathfrak{g}$ genau dann $x < y$ gilt, wenn x links von y liegt.

5.13.14 Definition Seien a, b, c Feldobjekte einer Vollordnung $<$. Dann sagen wir

(0) für $a < b$: a ist ($<$-)Vorgänger von b, oder: b ist ($<$-)Nachfolger von a
(1) für $a \leq b \leq c$ b liegt (bzgl. $<$) zwischen a und c (einschließlich a und c)
(2) für $a < b < c$: b liegt (bzgl. $<$) zwischen a und c (ausschließlich a und c)
(3) für $a \leq b < c$: b liegt (bzgl. $<$) zwischen a und c (einschließlich a und ausschließlich c)
(4) für $a < b \leq c$: b liegt (bzgl. $<$) zwischen a und c (ausschließlich a und einschließlich c)

Ein besonderer Vorgänger bzw. Nachfolger ist der „unmittelbare“ Vorgänger bzw. Nachfolger:

5.13.15 Definition Ein *unmittelbarer ($<$-)Vorgänger* von a ist ein v mit $v < a$, derart dass es kein x gibt mit $v < x < a$. Das ist also ein Vorgänger v von a, zu dem es keine weiteren Vorgänger gibt, die zwischen v und a (ausschließlich v und a) liegen. Entsprechend ist ein *unmittelbarer ($<$-)Nachfolger* von a ein n mit $a < n$, derart dass es kein x gibt mit $a < x < n$.

5.13.16 Theorem *Existiert ein unmittelbarer Vorgänger bzw. Nachfolger, so nur ein einziger. Ist v unmittelbarer Vorgänger von n, so ist n unmittelbarer Nachfolger von v und umgekehrt.*

Beweis. Sind v_1, v_2 unmittelbare Vorgänger von a, so gilt $v_1 < a$ und $v_2 < a$. Es kann dann v_1 nicht kleiner als v_2 sein (sonst wäre insgesamt $v_1 < v_2 < a$ im Widerspruch dazu, dass v_2 *unmittelbarer* Vorgänger von a ist), und analog sieht man, dass v_2 nicht kleiner als v_1 sein kann, also bleibt wegen der Trichotomie nur übrig, dass $v_1 = v_2$, und so gibt es nur *einen* Vorgänger. Analog sieht man, dass a nur *einen* unmittelbaren Nachfolger haben kann. Damit ist die erste Behauptung des Theorems bewiesen. Die zweite folgt unmittelbar aus den Definitionen. □

5.13.17 Definition Die Klassen der zwischen a und b liegenden Individuen im Sinne von Definition 5.13.14 (1) bis (4) heißen *Intervalle mit Grenzen a und b*. Es sind dies die vier Klassen $\{x \mid a \leq x \leq b\}$, $\{x \mid a < x < b\}$, $\{x \mid a \leq x < b\}$ und $\{x \mid a < x \leq b\}$, für die man folgende Abkürzungen einführt:

$[a, b]_<$	[Lesart: *geschlossenes $<$-Intervall* von a bis b]	für $\{x \mid a \leq x \leq b\}$,
$(a, b)_<$	[Lesart: *offenes $<$-Intervall* von a bis b]	für $\{x \mid a < x < b\}$,
$[a, b)_<$	[Lesart: *linksgeschlossen-rechtsoffenes $<$-Intervall* von a bis b]	für $\{x \mid a \leq x < b\}$,
$(a, b]_<$	[Lesart: *linksoffen-rechtsgeschlossenes $<$-Intervall* von a bis b]	für $\{x \mid a < x \leq b\}$.

Neben diesen sog. «endlichen» Intervallen spielen auch sog. «unendliche» Intervalle eine Rolle:

$[a, \infty)_<$	[Lesart: *geschlossenes $<$-Intervall* von a bis unendlich]	für $\{x \mid a \leq x\}$,
$(a, \infty)_<$	[Lesart: *offenes $<$-Intervall* von a bis unendlich]	für $\{x \mid a < x\}$,
$(-\infty, a]_<$	[Lesart: *geschlossenes $<$-Intervall* von minus unendlich bis a]	für $\{x \mid x \leq a\}$,
$(-\infty, a)_<$	[Lesart: *offenes $<$-Intervall* von minus unendlich bis a]	für $\{x \mid x < a\}$.

Ist der Bezug zu $<$ klar, lässt man den Index weg, schreibt also $[a, b], (a, b), [a, b), (b, a]$ usw. Die Zeichen ∞ für «unendlich» und $-\infty$ für «minus unendlich» zeigen den Mangel einer oberen bzw. unteren Schranke in dem betreffenden Intervall an, bezeichnen aber selbst keine Objekte. Gewissermaßen sind es daher Zeichen für das „potentiell Unendliche“. Ob eines der «unendlichen» Intervalle tatsächlich unendlich viele Elemente hat, hängt von der Relation $<$ ab. Hat sie nur endlich viele Feldobjekte, so kann kein Intervall unendlich viele Elemente haben. (a, ∞) enthält also zwar *alle* Nachfolger von a, aber das könnten insgesamt nur endlich viele sein. Besonderes wichtig sind die „offenen“ Intervalle $(-\infty, a)$ und (a, ∞), für die es eigene Bezeichnungen gibt. Das erste ist die

Klasse aller *Vorgänger* von a und wird auch der *Abschnitt* von a genannt; das zweite ist die Klasse aller *Nachfolger* von a und wird auch der *Restschnitt* von a genannt. Man schreibt

$\mathtt{Ab}_<(a)$	[Lesart: <-Abschnitt von a]	für $(-\infty, a)$, das ist $\{x \mid x < a\}$,
$\mathtt{Re}_<(a)$	[Lesart: <-Restschnitt von a]	für (a, ∞), das ist $\{x \mid a < x\}$.

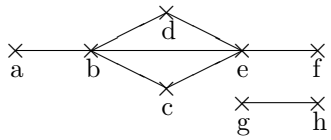
Ist der Bezug zu $<$ klar, lässt man den Index weg, schreibt also $\mathtt{Ab}(a)$ oder $\mathtt{Re}(a)$).

5.13.18 Lemma *Aus $a < b$ folgt stets $\mathtt{Ab}(a) \subseteq \mathtt{Ab}(b)$.*

Beweis. $x \in \mathtt{Ab}(a)$ bedeutet $x < a$, und wegen $a < b$ folgt per Transitivität $x < b$, d. h. $x \in \mathtt{Ab}(b)$. □

5.13.19 Definition Ist $<$ eine Halbordnung und K eine Teilklasse von $\mathtt{Fd}(<)$, so heißt K eine «*Kette von <*» oder eine «*<-Kette*», wenn $<$ über K linear, also dort eine Vollordnung ist.[456]

Bemerkung. Ist $<$ eine Vollordnung, so ist offenbar *jede* Teilklasse des Feldbereichs von $<$ eine Kette; wir können dann statt *Kette* also *Teilklasse von* $\mathtt{Fd}(<)$ sagen.
Die leere Klasse ist eine Kette einer jeden Relation R (die «leere Kette»), ebenso wie jede einelementige Teilklasse von $\mathtt{Fd}(R)$ stets eine Kette von R ist.
Die übrigen Ketten von R erkennt man im Ordnungsdiagramm daran, dass alle Elemente der Kette auf einer einzigen von links nach rechts gehenden Linie liegen. So sind die Ketten der nachfolgend dargestellten Ordnungsrelation die Mengen $\{g, h\}, \{a, b, c, e, f\}, \{a, b, d, e, f\}$ und deren Teilklassen:



Keine Ketten sind dagegen die Oberklassen von $\{d, c\}$ (weil weder $d < c$ noch $c < d$ gilt). Auch Klassen, die zusammen mit einem Element x von $\{g, h\}$ auch ein Element y von $\{a, b, c, d, e, f\}$ enthalten, sind keine Ketten (weil weder $x < y$ noch $y < x$ gilt).

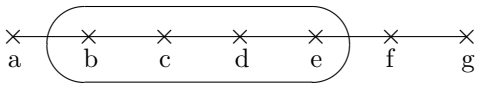
5.13.20 Definition Für Halbordnungen $<$ und Ketten K von $<$ definiert man:

s (ist) *obere (<-)Schranke* von K	$:\Leftrightarrow$	$s \in \mathtt{Fd}(<)$ und für jedes k aus K gilt $k \leq s$,
s (ist) *echte obere (<-)Schranke* von K	$:\Leftrightarrow$	$s \in \mathtt{Fd}(<)$ und für jedes k aus K gilt $k < s$,
s (ist) *untere (<-)Schranke* von K	$:\Leftrightarrow$	$s \in \mathtt{Fd}(<)$ und für jedes k aus K gilt $s \leq k$,
s (ist) *echte untere (<-)Schranke* von K	$:\Leftrightarrow$	$s \in \mathtt{Fd}(<)$ und für jedes k aus K gilt $s < k$,
K(ist) *nach oben (<-)beschränkt*	$:\Leftrightarrow$	es gibt eine obere <-Schranke von K,
K(ist) *nach unten (<-)beschränkt*	$:\Leftrightarrow$	es gibt eine untere<-Schranke von K,
K(ist) *(<-)beschränkt*	$:\Leftrightarrow$	K ist nach oben *und* nach unten <-beschränkt.

Bemerkung. Jedes Feldobjekt s von $<$ ist zugleich eine echte obere und eine echte untere Schranke der leeren Kette $\emptyset$, wie sofort aus dem Leerklassen-Lemma 5.9.3 S. 117 folgt. Daher ist $\emptyset$ auch stets eine *<-beschränkte* Kette (es sei denn, $<$ besitzt gar keine Feldobjekte, ist also die leere Relation).
Auch jede einelementige Kette $\{x\}$ ist beschränkt, denn ihr einziges Element x ist zugleich eine obere und eine untere Schranke von $\{x\}$.
Für alle übrigen Ketten K erkennt man untere bzw. obere Schranken s von K in einem Ordnungsdiagramm daran, dass man von s aus auf nach rechts bzw. links gehenden Linien alle übrigen Elemente von K erreichen kann. So gilt bezüglich der auf dieser Seite dargestellten Relation $<$, dass

[456] Formal: K (ist) (<-)Kette $:\Leftrightarrow$ $<$ Halbordnung $\wedge\ K \subseteq \mathtt{Fd}(<) \wedge \bigwedge_{a \in K} \bigwedge_{b \in K} (a < b \ \vee\ a = b \ \vee\ b < a)$.

die Kette $\{a, b\}$ die oberen Schranken b, c, d, e, f besitzt, während ihre einzige untere Schranke a ist. In folgendem Beispiel hat die Klasse $\{b, c, d, e\}$ die unteren Schranken a und b und die oberen Schranken e, f, g:



Obere und untere Schranken können auch selbst Elemente der Kette sein (wie b und e in diesem Beispiel), aber sie müssen es nicht (wie a, f und g in diesem Beispiel). Während Schranken, die nicht in der Kette liegen, *echte* obere oder *echte* untere Schranken sind, handelt es sich bei einer Schranke, die der Kette angehört, stets um ein Minimum oder Maximum von K:

5.13.21 Theorem Bezüglich einer Halbordnung $<$ und einer ihrer Ketten K gilt:

m ist Minimum von A $\Leftrightarrow$ m ist untere Schranke und zugleich Element von A.
m ist Maximum von A $\Leftrightarrow$ m ist obere Schranke und zugleich Element von A.

Beweis. Dies folgt sofort aus Definition von Maximum und Minimum (5.13.4 S. 175). □ So ist in obigem Beispiel b ein Minimum und e ein Maximum von $\{b, c, d, e\}$.

Wir haben bereits in Theorem 5.13.6 S. 175 festgestellt, dass es in einer Halbordnung höchstens *ein* Minimum und höchstens *ein* Maximum gibt, und dass jedes Minimum ein minimales Element und jedes Maximum ein maximales Element ist. In einer Vollordnung gilt nun auch das Umgekehrte, so dass hier die Unterscheidung zwischen Maxima und maximalen Elementen bzw. Minima und minimalen Elementen gegenstandslos wird:

5.13.22 Theorem Bezüglich einer Vollordnung $<$ gilt, dass von den beiden Aussagen

m ist Minimum von A [d. h. $m \in A$ und für alle a aus A gilt $m \leq a$] und
m ist minimales Element von A [d. h. $m \in A$ und für kein a aus A gilt $a < m$]

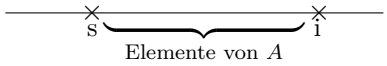
die eine aus der anderen folgt. Entsprechendes gilt für Maxima und maximale Elemente.

Beweis. Ist m Minimum, so ist m nach Theorem 5.13.6 auch minimales Element. Sei nun umgekehrt m ein minimales Element von A, so dass $a < m$ für kein a aus A gilt. Ist dann a ein Element aus A, so muss wegen der Linearität von den Aussagen $m < a$ oder $a < m$ oder $a = m$ mindestens eine gelten. Da nun $a < m$ *nicht* gilt, muss also $m < a$ oder $m = a$ sein. In beiden Fällen gilt $m \leq a$. Also ist m Minimum. Analog führt man den Beweis für Maxima und maximale Elemente. □ Eine Klasse A kann nun aus verschiedenen Gründen kein Minimum oder Maximum haben:

(1) A hat überhaupt keine Elemente, ist also die leere Klasse.

(2) A hat Elemente, aber keine unteren bzw. oberen Schranken. Dann ist A nach unten bzw. oben unbeschränkt, und es ist anschaulich klar, dass A in diesem Fall «unendlich viele» Elemente haben muss. In unserem Standardbeispiel für $<$ (oben S. 177) wäre ein solches A zum Beispiel die aus sämtlichen Punkten der Geraden $\mathfrak{g}$ bestehende Klasse.

(3) A hat sowohl Elemente als auch untere bzw. obere Schranken, aber *dennoch* kein Minimum bzw. Maximum. Dann müssen *alle* unteren bzw. oberen Schranken *außerhalb* von A liegen. In unserem Standardbeispiel wäre ein solches A die Klasse (s, t), deren Elemente alle Punkte zwischen zwei Punkten i und s *ausschließlich* i und s sind:



Hier ist i eine nicht zu A gehörige untere Schranke von A und alle weiteren unteren Schranken von A liegen *links* von i, während die Elemente von A *rechts* von i liegen. Es gibt also keine untere Schranke, die Element von A wäre: d. h. es gibt kein Minimum. Ein gewisser Ersatz für das Minimum ist der Punkt i, der hier eine „größte untere Schranke“ von A ist. Ebenso hat A kein Maximum, dafür aber eine „kleinste obere Schranke“, nämlich s. Die folgende Definition führt für derartige Elemente i und s die Bezeichnungen Infimum bzw. Supremum ein.

5.13.23 Definition Sei $<$ eine Vollordnung und A eine Teilklasse von $\mathtt{Fd}(<)$.

i (ist) (<-)*Infimum* von A $:\Leftrightarrow$ i ist Maximum der Klasse $\{x \mid x$ ist untere $<$-Schranke von $A\}$ aller unteren Schranken von A, d. h. die «größte untere Schranke» von A.

s (ist) (<-)*Supremum* von A $:\Leftrightarrow$ s ist Minimum der Klasse $\{x \mid x$ ist obere $<$-Schranke von $A\}$ aller oberen Schranken von A, d. h. s ist «kleinste obere Schranke» von A.

Wie für Minima und Maxima gilt für Infima und Suprema ein Eindeutigkeitssatz, und im Fall der Existenz des Minimums bzw. Maximums stimmt dieses mit dem Infimum bzw. Supremum überein:

5.13.24 Theorem *Sei $<$ eine Vollordnung und A eine Teilklasse von $\mathtt{Fd}(<)$. Dann gilt:*

A hat höchstens ein Infimum und höchstens ein Supremum. (5.56)

Hat A ein Minimum bzw. Maximum, so ist dieses auch das Infimum bzw. Supremum. (5.57)

Für das Infimum bzw. Supremum von A schreiben wir $\inf_< A$ bzw. $\sup_< A$, oder auch $\inf A$ und $\sup A$, wenn der Bezug zu $<$ klar ist.

Beweis. Zu (5.56). Da das Infimum [bzw. Supremum] als das Maximum [bzw. Minimum] der Klasse aller unteren [bzw. oberen] Schranken von A definiert ist, folgt die Behauptung aus dem Eindeutigkeitssatz 5.13.5 für das Maximum und das Minimum.

Zu (5.57). Sei s das Minimum von A. Dieses ist per Definition eine untere Schranke von A. Annahme: Es gibt eine weitere untere Schranke t von A, die größer als s ist. Zunächst ist dann also $s < t$. Da t untere Schranke und s Element von A ist, muss aber zugleich $t \leq s$ gelten, insgesamt also $s < t \leq s$. Mittels gemischter Transitivität (Satz 5.53 S. 174) folgt daraus $s < s$ im Widerspruch zur Irreflexivität. Die Annahme war also falsch, und es gibt keine weitere untere Schranke von A, die größer ist als s. Mithin ist s die größte untere Schranke von A, das heißt das Infimum von A. Analog beweist man die Behauptung über das Supremum. □

Wohlordnungen und wohlgeordnete Klassen

Wenn eine Klasse A bezüglich einer Vollordnung ein Minimum a und ein Maximum b besitzt, ist der Bereich der Elemente von A in gewisser Weise begrenzt: es müssen dann alle Elemente von A „zwischen“ a und b liegen, das heißt A ist eine Teilklasse des Intervalls $[a, b]$. Wenn man nun «Endlichkeit» mit «Begrenztheit» in Verbindung bringt, könnte man meinen, A müsse endlich sein, wenn A Minimum und Maximum habe. Nun werden wir sehen (Theorem 5.17.29 S. 243), dass sich tatsächlich aus dem *Fehlen* von Maximum oder Minimum auf die *Un*endlichkeit schließen lässt, aber umgekehrt darf man aus dem *Vorhandensein* beider nicht auf die Endlichkeit schließen. Sind z. B. a und b Punkte auf der Geraden $\mathfrak{g}$ mit $a < b$, so ist die Menge aller in dem Intervall $[a, b]$ liegenden Punkte ja offenbar unendlich, *obgleich* sie ein Minimum und ein Maximum besitzt.

So stellt sich die Frage, was noch zum Vorhandensein von Maximum und Minimum *hinzukommen* muss, damit A endlich wird. Eine naheliegende Verschärfung dieser Maximum-und-Minimum-Bedingung wäre die Forderung, dass nicht nur A selbst, sondern auch *alle nichtleeren Teilklassen von A ein Minimum und ein Maximum haben*. Wie wir sehen werden (Theorem 5.17.31 S. 244),

erzwingt dies in der Tat die Endlichkeit, wenn zusätzlich vorausgesetzt ist, dass A eine Menge ist. Man kann diese Endlichkeitsbedingung in die folgenden vier Bedingungen „aufspalten“:

(1a)	(Minimumsbedingung)	jede nichtleere Teilklasse von A hat ein Minimum,
(1b)	(Abschnittsbedingung)	für jedes a aus A ist die Klasse $\mathtt{Ab}(a) \cap A$ eine Menge,
(2a)	(Maximumsbedingung)	jede nichtleere Teilklasse von A besitzt ein Maximum,
(2b)	(Restschnittsbedingung)	für jedes a aus A ist die Klasse $\mathtt{Re}(a) \cap A$ eine Menge.

Hierbei ist $\mathtt{Ab}(a) \cap A$ die Klasse der *in A liegenden* Vorgänger von a und $\mathtt{Re}(a) \cap A$ die Klasse der *in A liegenden* Nachfolger von a. Falls die zugrunde liegende Relation $<$ eine ≪Relation in A≫ ist, ist $\mathtt{Ab}(a) \cap A$ einfach mit $\mathtt{Ab}(a)$, und $\mathtt{Re}(a) \cap A$ mit $\mathtt{Re}(a)$ identisch. Die Ab- und Restschnittsbedingung sind zusammengenommen äquivalent damit, dass A eine Menge ist.[457]

Sind nun Bedingungen (1a) und (1b) erfüllt, heißt die zugrunde liegende Vollordnung $<$ eine *Wohlordnung* über A. Dann muss A zwar nicht endlich sein, aber es stellt sich heraus, dass A unter diesen Bedingungen für die mathematische Behandlung fast ebenso „handlich“ ist wie eine endliche Menge.[458] Da nun der sog. Wohlordnungssatz (siehe 5.14.18 S. 198) zeigen wird, dass über *jeder* Menge eine Wohlordnung existiert, ist so gesehen *jede* Menge gewissermaßen „halbwegs endlich“, und hierauf basiert die wesentliche Rolle, welche die Wohlordnungen in der CANTORschen Lehre über das Transfinite haben.[459] Sind die Bedingungen (2a) und (2b) erfüllt, heißt $<$ eine *Gegenwohlordnung* über A,[460] und offenbar ist $<$ genau dann eine solche, wenn die Umkehrrelation $>$ eine Wohlordnung über A ist. Sind schließlich alle Bedingungen erfüllt, spricht man von einer *Biwohlordnung*,[461] und es wird sich herausstellen, dass eine derartige Ordnungsrelation nur über endlichen Mengen existiert (Theorem 5.17.31 S. 244). Die folgende Definition fasst diese Begriffe zusammen:

5.13.25 Definition

R (ist) *Wohlordnung* über A $:\Leftrightarrow$ R ist Vollordnung über A und es gilt:
Jede nichtleere Teilklasse von A hat ein Minimum und für jedes a aus A ist $\mathtt{Ab}(a) \cap A$ Menge.

R (ist) *Gegenwohlordnung* über A $:\Leftrightarrow$ R ist Vollordnung über A und es gilt:
jede nichtleere Teilklasse von A hat ein Maximum und für jedes a aus A ist $\mathtt{Re}(a) \cap A$ Menge.

R (ist) *Biwohlordnung* über A $:\Leftrightarrow$ R ist Vollordnung über A und es gilt:
jede nichtleere Teilklasse von A hat ein Minimum und ein Maximum und A ist eine Menge.

---

457 Beweis: Gelte die Abschnitts– und Restschnittsbedingung. Entweder ist nun A leer oder nicht. Im ersten Fall ist A nach dem Nullmengenaxiom eine Menge. Im zweiten Fall können wir ein a aus A wählen. Da dann wegen der Trichotomie der Vollordnung jedes Element von A entweder ein Vorgänger von a oder ein Nachfolger von a oder $= a$ ist, ist A die Vereinigung der drei Klassen $\mathtt{Ab}(a) \cap A$, $\mathtt{Re}(a) \cap A$ und $\{a\}$, und diese drei Klassen sind (wegen der Abschnitts– und Restschnittsbedingung sowie wegen Korollar 5.9.15 S. 119) Mengen. Folglich ist A nach dem Vereinigungsmengenaxiom ebenfalls eine Menge. – Ist umgekehrt vorausgesetzt, dass A eine Menge ist, so sind nach dem Teilmengenaxiom auch die Teilklassen $\mathtt{Ab}(a) \cap A$ und $\mathtt{Re}(a) \cap A$ von A Mengen. Folglich gilt dann die Abschnitts– und die Restschnittsbedingung. □

458 Konkret heißt dies: Man kann rekursive Definitionen und Induktionsbeweise durchführen, die in endlich vielen Schritten die ganze Menge „erfassen“ bzw. „durchleuchten“ (siehe 5.13.29 und 5.13.31).

459 Der Begriff der Wohlordnung wurde von CANTOR eingeführt (vgl. *Punktmannigfaltigkeiten* Nr. 5 § 2, Ausgabe Zermelo S. 168 und *Transfinite Mengenlehre* § 12, Ausgabe Zermelo S. 312). CANTOR befasste sich aber nur mit Mengen, weshalb man bei ihm die „Abschnittsbedingung“ nicht findet. Bei FELSCHER, *Mengen und Zahlen* Band 1 S. 90 heißt diese Bedingung „Lokalität“ (vgl. ebd. S. 86) und unter dem Namen „Abschnittsbedingung“ ist sie bei OBERSCHELP, *Allgemeine Mengenlehre* S. 163 zu finden.

460 Die Bezeichnung ≪*Gegenwohlordnung*≫ fand ich bei KLAUA, *Mengenlehre* S. 186.

461 Die Bezeichnung ≪*biwohlgeordnet*≫ ist zu finden bei FELSCHER, *Mengen und Zahlen* Band 1 S. 175. Bei KLAUA, *Mengenlehre* S. 186 heißt eine solche Ordnung eine ≪*Doppeltwohlordnung*≫.

Bemerkung. Ist A eine Menge, so sind nach Fußnote 457 auch $\mathtt{Ab}(a) \cap A$ und $\mathtt{Re}(a) \cap A$ Mengen und umgekehrt. Daher ist R genau dann eine Biwohlordnung, wenn R zugleich eine Wohl– und Gegenwohlordnung ist; und ist A eine Menge, so ist R genau dann eine Wohlordnung bzw. Gegenwohlordnung, wenn die Minimums– bzw. Maximumsbedingung erfüllt ist. In der *erweiterten Theorie* wird man auch Wohlordnungen über konzeptionellen Klassen A betrachten wollen, die Unmengen enthalten. Dann sollte die Abschnitts– und Restschnittsbedingung geändert werden, denn die Forderung, dass $\mathtt{Ab}(a) \cap A$ bzw. $\mathtt{Re}(a) \cap A$ eine *Menge* sein soll, impliziert, dass kein Vorgänger bzw. Nachfolger von a eine Unmenge sein kann. Um dies zu vermeiden, könnte man statt dessen fordern, dass es *eine auf einer Menge M definierte (eventuell unmengenwertige) Funktion gibt, deren Wertebereich $\mathtt{Ab}(a) \cap A$ bzw. $\mathtt{Re}(a) \cap A$ ist.*

5.13.26 Definition Eine *wohlgeordnete Klasse* ist ein Relational $\langle A, R\rangle$, dessen Relation R eine Wohlordnung über A ist. Ist zusätzlich A eine Unmenge bzw. Menge, sprechen wir von einer *wohlgeordneten Menge* bzw. *wohlgeordneten Unmenge.*[462]
Entsprechend werden gegenwohlgeordnete und biwohlgeordnete Klassen definiert.

Ist $\langle A, R\rangle$ ein Relational, also R Relation in A, so sind $\mathtt{Ab}(a)$ und $\mathtt{Re}(a)$ für jedes a aus A stets Teilmengen von A. Also ist dann $\mathtt{Ab}(a) \cap A = \mathtt{Ab}(a)$ und $\mathtt{Re}(a) \cap A = \mathtt{Re}(a)$. Daher gilt:

5.13.27 Theorem *Sei $\langle A, R\rangle$ ein Relational.*

$\langle A, R\rangle$ (ist) wohlgeordnete Klasse $\Leftrightarrow$ $\langle A, R\rangle$ ist vollgeordnete Klasse und es gilt:
Jede nichtleere Teilklasse von A hat ein Minimum und für jedes a aus A ist $\mathtt{Ab}(a)$ eine Menge.

$\langle A, R\rangle$ (ist) gegenwohlgeordnete Klasse $\Leftrightarrow$ $\langle A, R\rangle$ ist vollgeordnete Klasse und es gilt:
jede nichtleere Teilklasse von A hat ein Maximum und für jedes a aus A ist $\mathtt{Re}(a)$ eine Menge.

Bevor ich Beispiele für wohlgeordnete Klassen angebe, notiere ich ein triviales Theorem:

5.13.28 Theorem Sei $T \subseteq A$ und $\langle A, <\rangle$ eine halb– bzw. voll– bzw. wohlgeordnete Klasse.
Dann ist auch $\langle T, <\rangle$ eine halb– bzw. voll– bzw. wohlgeordnete Klasse.[463]

Beweis. Siehe Anhang S. 394–395. □

Beispiele. Aufgrund des Leerklassen-Beispiels für Vollordnungen (oben S. 177) und des Leermengen-Lemmas 5.9.3 S. 117 ist klar, dass jede Relation über der leeren Klasse eine Biwohlordnung ist. Die leere Relation ist *nur* über der leeren Klasse eine Biwohlordnung, und sie ist eine solche schlechthin. Schließlich ist $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ eine biwohlgeordnete Klasse.

Weitere Beispiele für Wohlordnungen sind Vollordnungen über „hinreichend kleinen“ nichtleeren Mengen A. Hat etwa A vier Elemente a_1, a_2, a_3, a_4, und gilt

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4,$$

so ist leicht einzusehen, dass $<$ eine Wohlordnung über A ist. Hierzu muss man nur zeigen, dass jede nichtleere Teilmenge T von A ein Minimum besitzt. Von den vier Möglichkeiten

$$(1)\ a_1 \in T, \quad (2)\ a_2 \in T, \quad (3)\ a_3 \in T, \quad (4)\ a_4 \in T$$

---

[462] Formal: $\mathcal{A}$ (ist) wohlgeordnete Klasse $:\Leftrightarrow \bigvee_{AR} \Big(\langle A, R\rangle$ Relational $\wedge$ R Wohlordnung über $A \wedge \mathcal{A} = \langle A, R\rangle\Big)$.

[463] Da $\langle A, <\rangle$ ein Relational ist, ist $<$ eine Relation in der Klasse A, aber $<$ ist nicht notwendigerweise auch eine Relation in der (eventuell „kleineren“) Klasse T. Es ist daher unsere Notationsvereinbarung (oben S. 176) zu beachten, wonach $\langle T, <\rangle$ für $\langle T, <\!/\!/T\rangle$ steht.

muss mindestens eine zutreffen (weil T nichtleer ist). Wenn (1) zutrifft, so ist a_1 das Minimum. Treffe also (1) nicht zu. Wenn dann (2) zutrifft, so ist a_2 das Minimum. Wenn nicht, trifft weder (1) noch (2) zu. Wenn dann (3) zutrifft, so ist a_3 das Minimum. Wenn nicht, trifft weder (1) noch (2) noch (3) zu. Dann trifft (4) zu und a_4 ist das einzige Element von T, also ist a_4 das Minimum. Analog lässt sich zeigen, dass Vollordnungen über «endlichen» Mengen A *immer* Wohlordnungen sein müssen, was wir allerdings erst später, nach einer exakten Definition von Endlichkeit und Unendlichkeit, streng beweisen können (siehe Korollar 5.17.30 S. 243).

Über «unendlichen» Mengen müssen dagegen Vollordnungen keine Wohlordnungen sein. So ist etwa die Links-Rechts-Relation $<$ über der Menge aller Punkte einer Geraden $\mathfrak{g}$ keine Wohlordnung, denn die Gerade selbst besitzt kein Minimum. Aber auch über einer *begrenzten* Strecke s zwischen zwei Punkten P und Q ist $<$ keine Wohlordnung, denn die Menge T der zwischen P und Q liegenden und von P und Q selbst verschiedenen Punkte ist eine nichtleere Teilmenge von s, die kein Minimum hat. Freilich *existiert* nach dem noch zu besprechenden sog. *Wohlordnungssatz* (5.14.18 S. 198) über *jeder* Menge, also auch über der Strecke s und der Gerade $\mathfrak{g}$ eine Wohlordnung, nur ist die Links-Rechts-Relation keine solche. In Abschnitt 5.14 werden wir schließlich auch eine wohlgeordnete *Un*menge kennen lernen: diejenige der *Ordinalzahlen*.

Als Nächstes soll das sog. *Beweisprinzip der ordnungstheoretischen Induktion* erläutert werden, mit dem man simultan nachweisen kann, dass *alle* (eventuell unendlich vielen) Elemente der Trägerklasse W einer Wohlordnung eine Eigenschaft E besitzen: Man zeigt, dass sich die Eigenschaft immer dann, wenn sie auf alle Vorgänger eines $a \in W$ zutrifft, auf a überträgt: So „pflanzt“ sich gewissermaßen die Eigenschaft von den kleineren auf die größeren Elemente fort, bis sie sich über die ganze Klasse W „ausgebreitet“ hat. Analog zu diesem Beweisprinzip ist das *Definitionsprinzip der ordnungstheoretischen Rekursion*, wonach man zu jedem Element a von W ein Objekt $f(a)$ festlegen kann, ohne $f(a)$ für jedes a unmittelbar angeben zu müssen. Man legt statt dessen nur fest, was $f(a)$ *unter der Voraussetzung, dass* $f(x)$ *schon für alle Vorgänger* x *von* a *feststeht*, sein soll.

5.13.29 Beweisprinzip der ordnungstheoretischen Induktion Sei $\langle W, < \rangle$ wohlgeordnet. Um zu zeigen, dass alle Elemente von W eine Eigenschaft E haben, genügt es, zu zeigen:

(I) Wann immer ein a aus W die sog. *Induktionsvoraussetzung* erfüllt, dass jeder Vorgänger von a die Eigenschaft besitzt, so besitzt auch a die Eigenschaft.

Auf direkte Weise könnte man wie folgt versuchen, das Prinzip zu beweisen. Sei (I) zutreffend. Ist W leer, gilt aufgrund des Leerklassen-Lemmas, dass alle Elemente von W die Eigenschaft besitzen und wir sind fertig. Ist W nichtleer, so sei a das Minimum von W. Da a keinen Vorgänger hat, trifft es per Leerklassen-Lemma zu, dass jeder Vorgänger von a die Eigenschaft hat. Also muss wegen (I) auch a die Eigenschaft besitzen. Wenn a das einzige Element von W ist, sind wir fertig. Andernfalls ist die Klasse $W \setminus \{a\}$ nichtleer, besitzt also ein Minimum b. Der einzige Vorgänger von b ist nun a, und a besitzt die Eigenschaft. Also muss wegen (I) auch b die Eigenschaft besitzen. Hat W außer a und b keine weiteren Elemente, sind wir fertig. Andernfalls überträgt sich wieder wegen (I) die Eigenschaft auf das nächst größere Element c usw. So erhalten wir, wenn W entsprechend viele Elemente hat, eine unendliche Reihe $a, b, c \ldots$ von Elementen, welche die Eigenschaft besitzen. Hat W noch weitere Elemente, muss es ein kleinstes Element ω geben, das größer ist als alle in der unendlichen Reihe befindlichen; aber dann besitzen alle Vorgänger von ω die Eigenschaft, also überträgt sie sich wieder wegen (I) auch auf ω usw. Auf diese Weise sieht man, wie die Eigenschaft sich auf immer größere (auch unendliche) Bereiche von W ausdehnt, allerdings ist damit noch nicht streng bewiesen, dass so tatsächlich *alle* Elemente von W erreicht werden. Es ist also ein strenger Beweis notwendig, und ein solcher ist in diesem Fall erstaunlich einfach:

Beweis. Es treffe Bedingung (I) zu. Angenommen, es gibt Elemente von W, welche die Eigenschaft E *nicht* besitzen. Dann ist die Klasse C dieser Elemente nichtleer und hat, weil $\langle W, < \rangle$ wohlgeordnet

ist, ein Minimum m. Während m als Element von C die Eigenschaft nicht besitzt, müssen dann alle Vorgänger von m, weil sie nicht in C liegen, die Eigenschaft besitzen. Doch dann folgt aus (I), dass auch m die Eigenschaft besitzt. Dieser Widerspruch zeigt, dass die ANNAHME falsch war. □

5.13.30 Ordnungstheoretisches Rekursionstheorem Sei $\langle W, < \rangle$ wohlgeordnet. Sei Z eine Klasse und sei F eine Funktion, die jedes Paar $\langle a, f \rangle$, für das $a \in W$ und $f\colon \mathtt{Ab}(a) \longrightarrow Z$ gilt, auf ein Element von Z wirft. *Dann gibt es genau eine Funktion f von W in Z mit*

$$f(a) = F(\langle a, f/\ \mathtt{Ab}(a) \rangle) \textit{ für jedes } a \textit{ aus } W.$$

Beweis. Dies ist im Anhang S. 395–397 durch ordnungstheoretische Induktion bewiesen. □
Dieser Satz ermöglicht nun folgendes Definitionsverfahren:

5.13.31 Definition durch ordnungstheoretische Rekursion Eine Funktion f von W in Z wird dadurch definiert (eindeutig festgelegt), dass man für jedes Element a von W *unter der Voraussetzung, dass f eine Funktion ist, die alle Vorgänger x von a auf Elemente $f(x)$ von Z wirft*, ein Element ρ von Z festlegt, welches $f(a)$ sein soll. Formal nimmt man hierzu einen nach Interpretation der Variablen a und f geschlossenen Term $\rho(a, f)$ („Rekursionsterm“), der so gebaut ist, dass er immer dann, wenn «für alle x mit $x < a$ gilt $f(x) \in Z$» wahr ist, ein Element von Z bezeichnet,[464] und man fordert, dass f eine Funktion von W in Z sein soll, die für jedes a aus W die sog. „Rekursionsgleichung“ $f(a) = \rho(a, f)$ erfüllt.

Beweis. Zunächst gilt stets $\rho(a, f) = \rho(a, f/\ \mathtt{Ab}(a))$,[465] und für die Funktion F, die jedes $\langle a, g \rangle$ mit $a \in W$ und $g\colon \mathtt{Ab}(a) \longrightarrow Z$ auf $\rho(a, g)$ wirft, gilt weiter $\rho(a, f/\ \mathtt{Ab}(a)) = F(\langle a, f/\ \mathtt{Ab}(a) \rangle)$. Insgesamt ist also $\rho(a, f) = F(\langle a, f/\ \mathtt{Ab}(a) \rangle)$, und so können wir die Forderung $f(a) = \rho(a, f)$ auch durch $f(a) = F(\langle a, f/\ \mathtt{Ab}(a) \rangle)$ ausdrücken. Da es nach 5.13.30 genau eine Funktion f von W in Z mit $f(a) = F(\langle a, f/\ \mathtt{Ab}(a) \rangle)$ für jedes a aus W gibt, ist diese Funktion f auch eine (und zwar die einzige), welche für jedes a aus W die Forderung $f(a) = \rho(f, a)$ erfüllt. □

Bemerkung. Eine rekursive Definition von der Form «sei f die Funktion von W in Z mit $f(a) = \rho$ für alle $a \in W$» ist bloß eine interne Definition (vgl. oben S. 109), in welcher wir die Variable f als Abkürzung für die Funktion einführen, welche die angeführten Bedingungen erfüllt. Formal könnten wir dafür $f := \imath f(f\colon W \longrightarrow Z \ \wedge \bigwedge_{a \in W} f(a) = \rho)$ schreiben. Wir benutzen daher das für solche Definitionen dienende Zeichen := auch für die Rekursionsgleichung, schreiben also $f(a) := \rho$.

Im Beweis des folgenden für die Unmengen-Theorie äußerst wichtigen Theorems kann die rekursive Definition und die Benutzung des Epsilon-Operators (Axiom 5.11.8 S. 156) illustriert werden; es ist zugleich ein Beispiel für ein Theorem, welches ohne Benutzung des maximalen Auswahlaxioms anscheinend nicht bewiesen werden kann.[466]

5.13.32 Theorem *Wann immer $\langle W, < \rangle$ eine wohlgeordnete Klasse und U eine Unmenge ist, gibt es eine Injektion von W in U.*

Beweis. Ist W leer, so ist die leere Funktion eine solche Injektion (Beispiel 4 S. 141). Ist aber W nichtleer, können wir durch ordnungstheoretische Rekursion eine Funktion f von W in U definieren,

---

464 ρ nimmt also nicht auf Werte $f(x)$ mit $a > x$ oder auf andere Eigenschaften von f Bezug. Wenn man daher f in dem Term ρ als Bezeichnung für verschiedene Funktionen interpretiert, deren Werte $f(x)$ aber für $x < a$ übereinstimmen, beschreibt ρ genau denselben Wert von Z.

465 Denn $\rho(f, a)$ ist nach Voraussetzung stets ein Element von Z, das nur von den Werten $f(x)$ für $x < a$ (d. h. für x aus $\mathtt{Ab}(a)$) abhängt. Da nun $f(x)$ und $(f/\ \mathtt{Ab}(a))(x)$ gemäß (5.30 S. 143) für jedes x aus $\mathtt{Ab}(a)$ stets derselbe Wert ist, folgt $\rho(a, f) = \rho(a, f/\ \mathtt{Ab}(a))$.

466 Ein weiteres Beispiel hierfür dürfte Theorem 5.15.12 S. 203 sein.

die sich als injektiv herausstellen wird. Um f rekursiv zu definieren, müssen wir für jedes a aus W *unter der Voraussetzung, dass* $f/\ \mathtt{Ab}(a)$ *bereits eine Funktion von* $\mathtt{Ab}(a)$ *in* U *ist*, ein Element von U benennen, welches $f(a)$ sein soll. Nun ist unter der genannten Voraussetzung $\varepsilon(U \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(a)))$ ein Element von U, was man wie folgt einsehen kann:
Da $\langle W, <\rangle$ wohlgeordnet ist, ist die Abschnittsbedingung erfüllt, dass $\mathtt{Ab}(a)$ stets eine *Menge* ist. Da demnach der Definitionsbereich von $f/\ \mathtt{Ab}(a)$ eine Menge ist, muss aufgrund des Ersetzungsaxioms auch der Wertebereich $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(a))$ eine Menge sein. Und da $f/\ \mathtt{Ab}(a)$ eine Funktion von $\mathtt{Ab}(a)$ in U ist, ist $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(a))$ eine *Teilklasse von* U. Da nun aber U eine *Un*menge ist, kann U nicht mit der *Menge* $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(a))$ identisch sein, also ist letztere eine *echte* Teilklasse von U. Dann aber muss es in U Elemente geben, die nicht in $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(a))$ liegen, so dass $U \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(a))$ eine *nichtleere Klasse* bezeichnet, und $\varepsilon(U \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(a)))$ nach Axiom 5.11.8 S. 156 schließlich ein Element von U ist. So können wir rekursiv definieren:

f sei die Funktion von W in U mit $f(a) := \varepsilon(U \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(a)))$ für jedes a aus W.

Dieses f ist injektiv, wirft also zwei *verschiedene* Elemente von W stets auf zwei *verschiedene* Elemente von U: Liegen zwei verschiedene Elemente von W vor, muss wegen der Linearität von $<$ das eine (es heiße a) größer sein als das andere (es heiße b). Es gilt also $a < b$, weshalb a in $\mathtt{Ab}(b)$ liegt, also Element des Definitionsbereichs von $f/\ \mathtt{Ab}(b)$ ist. Aus $a \in \mathtt{Db}(f/\ \mathtt{Ab}(a))$ folgt aber $f(a) \in \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(b))$. Andererseits liegt $f(b)$, d. h. nach Rekursionsgleichung $\varepsilon(U \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(b))$, in $U \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(b))$ und ist darum *kein* Element von $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(b))$. Dieser Gegensatz zeigt, dass $f(a) \neq f(b)$. □

Isomorphie von Ordnungen und Hauptsatz der Wohlordnungstheorie

Für den Vergleich geordneter Klassen $\langle C, <\rangle$ und $\langle C^*, <^*\rangle$ ist die Frage entscheidend, ob es eine bijektive Funktion von C in C^* gibt, die „ordnungserhaltend“ bzgl. $<$ und $<'$ ist:

5.13.33 Definition f ist *ordnungserhaltend* bzgl. $<$ und $<^*$ oder *$<$-$<^*$-ordnungserhaltend*, wenn für alle x, y aus $\mathtt{Db}(f)$ gilt, dass $x < y \ \leftrightarrow\ f(x) <^* f(y)$, also $x < y$ und $f(x) <^* f(y)$ immer denselben Wahrheitswert haben.[467]
Bemerkung: Für Vollordnungen $<$ und $<^*$ genügt es, $x < y \ \rightarrow\ f(x) <^* f(y)$ nachzuweisen.[468]

Sind geordnete Klassen $\langle C, <\rangle$ und $\langle C^*, <^*\rangle$ gegeben, und ist es möglich, auf zwei verschiedenen Folien I und II Ordnungsdiagramme zu zeichnen, deren markierte Punkte genau die Elemente von C bzw. von C^* sind, und diese Folien so aufeinander zu legen, dass sowohl die markierten Punkte als auch die Linien der beiden Ordnungsdiagramme ohne Rest aufeinander fallen, so zeigt dies anschaulich, dass die beiden geordneten Klassen „strukturell gleichartig“ sind. Betrachten wir dann die Funktion f mit $f\colon C \longrightarrow C^*$, die jedes Element a von C auf dasjenige Element a^* von C^* wirft, mit dem a bei der Folienüberdeckung zusammenfällt, so ist unmittelbar ersichtlich, dass diese Funktion bijektiv und ordnungserhaltend ist. Auch ist es anschaulich klar, dass man umgekehrt aus der Existenz einer Bijektion von C in C^*, die $<$-$<^*$-ordnungserhaltend ist, darauf schließen kann, dass eine entsprechende „strukturelle Gleichartigkeit“ vorhanden ist, die man (wenn man von möglichen Platzproblemen absieht) durch eine entsprechende „Folienüberdeckung“ veranschaulichen könnte. Diese Überlegung motiviert die folgende Definition der „strukturellen Gleichartigkeit“ oder „Isomorphie“ geordneter Klassen:

---

[467] Formal: f (ist) $<$-$<^*$-ordnungserhaltend $:\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in \mathtt{Db}(f)} \bigwedge_{y \in \mathtt{Db}(f)} (x < y \ \leftrightarrow\ f(x) <^* f(y))$.

[468] Hat man für Vollordnungen $<$ und $<^*$ nachgewiesen, dass aus $x < y$ stets $f(x) <^* f(y)$ folgt, so folgt immer auch das Umgekehrte. Ist nämlich $f(x) <^* f(y)$, so muss per Linearität von $<$ entweder $x < y$ oder $y < x$ oder $x = y$ sein. Falls $y < x$, müsste aber (wie man nachgewiesen hat) $f(x) <^* f(y)$ sein, und wenn $x = y$ natürlich $f(x) = f(y)$, aber beides stünde per Trichotomie von $<^*$ im Widerspruch zu $f(x) <^* f(y)$. Also muss $x < y$ sein.

5.13.34 Definition Geordnete Klassen $\langle C, < \rangle$ und $\langle C^*, <^* \rangle$ heißen *(ordnungs-)isomorph*, wenn es eine bijektive und bzgl. $<$ und $<^*$ ordnungserhaltende Funktion f von C in C^* gibt. Ein solches f heißt ein *(Ordnungs-)Isomorphismus* von $\langle C, < \rangle$ in $\langle C^*, <^* \rangle$. Für «$\langle C, < \rangle$ und $\langle C^*, <^* \rangle$ sind isomorph» bzw. für «f ist Isomorphismus von $\langle C, < \rangle$ in $\langle C^*, <^* \rangle$» schreibt man

$$\langle C, < \rangle \simeq \langle C^*, <^* \rangle \qquad \text{bzw.} \qquad \langle C, < \rangle \overset{f}{\simeq} \langle C^*, <^* \rangle.^{469}$$

Zur Notation. Das Folgende wird übersichtlicher, wenn man für strukturierte Klassen nur *einen* Buchstaben verwendet. Ich nehme hierfür kalligraphische Buchstaben ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$), und zwar stets denjenigen, der eine kalligraphische Abwandlung der Bezeichnung für die Trägerklasse ($A, B, C, \dots$) ist. So kürze ich $\langle C, < \rangle$ mit $\mathcal{C}$ ab, $\langle D, < \rangle$ mit $\mathcal{D}$ usw.

Die Isomorphie $\simeq$ ist eine konzeptionelle Relation der *erweiterten Theorie*, welche gewisse geordnete Klassen aufeinander ausrichtet. Das nächste Theorem zeigt, dass $\simeq$ reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation ist (vgl. Abschnitt 5.12):

5.13.35 Theorem Für geordnete Klassen $\mathcal{C} := \langle C, <^1 \rangle$, $\mathcal{D} := \langle D, <^2 \rangle$, $\mathcal{E} := \langle E, <^3 \rangle$ gilt

$$\mathcal{C} \overset{\mathrm{id}_C}{\simeq} \mathcal{C}, \qquad \textit{d. h. } \simeq \textit{ ist reflexiv,} \tag{5.58}$$

$$\textit{Wenn } \mathcal{C} \overset{f}{\simeq} \mathcal{D}, \textit{ so auch } \mathcal{D} \overset{f^{\rightharpoonup}}{\simeq} \mathcal{C}, \qquad \textit{d. h. } \simeq \textit{ ist symmetrisch,} \tag{5.59}$$

$$\textit{Wenn } \mathcal{C} \overset{f}{\simeq} \mathcal{D} \textit{ und } \mathcal{D} \overset{g}{\simeq} \mathcal{E}, \textit{ so auch } \mathcal{C} \overset{f \circ g}{\simeq} \mathcal{E}, \qquad \textit{d. h. } \simeq \textit{ ist transitiv.} \tag{5.60}$$

Beweis. Siehe Anhang S. 397. □

Um die nächste Eigenschaft (5.61) bequem formulieren zu können, führe ich analog zum Begriff des Abschnitts $\mathtt{Ab}(a)$ *bzgl. einer Vollordnung* den Begriff des Abschnitts *einer vollgeordneten Klasse* ein. Ist $\mathcal{A} := \langle A, < \rangle$ vollgeordnete Klasse und $a \in A$, so ist $\mathtt{Ab}(a) \subseteq A$. Nach Theorem 5.13.28 S. 183 ist daher $\langle \mathtt{Ab}(a), < \rangle$ eine vollgeordnete Klasse (deren Relation für den Fall, dass $<$ außerhalb von $\mathtt{Ab}(a)$ Feldobjekte besitzt, eigentlich die auf $\mathtt{Ab}(a)$ „zugeschnittene" Relation $< /\!\!/ \mathtt{Ab}(a)$ ist; siehe die Notationsvereinbarung S. 176). $\langle \mathtt{Ab}(a), < \rangle$ nenne ich den *Abschnitt von a in der vollgeordneten Klasse $\mathcal{C}$* und bezeichne diesen Abschnitt mit $\mathcal{AB}(a)$:

5.13.36 Definition Für vollgeordnete Klassen $\mathcal{A} := \langle A, < \rangle$ und Elemente a von A soll

$\mathcal{AB}_{\mathcal{A}}(a)$ [Lesart: Abschnitt von a in $\mathcal{A}$, oder: $\mathcal{A}$-Abschnitt von a]

die vollgeordnete Klasse $\langle \mathtt{Ab}(a), < \rangle$ bezeichnen. Ist der Bezug zu $\mathcal{A}$ klar, schreibe ich $\mathcal{AB}(a)$.

5.13.37 Theorem Für vollgeordnete Klassen $\mathcal{C} := \langle C, <^1 \rangle$ und $\mathcal{D} := \langle D, <^2 \rangle$ gilt:

$$\textit{Ist } \mathcal{C} \overset{h}{\simeq} \mathcal{D} \textit{ und } c \in C, \textit{ so ist auch } \mathcal{AB}(c) \overset{h/\,Ab(c)}{\simeq} \mathcal{AB}(h(c)).^{470} \tag{5.61}$$

Für (halb)geordnete Klassen $\mathcal{C} = \langle C, <^1 \rangle$ und $\mathcal{D} = \langle D, <^2 \rangle$ gilt:

$$\textit{Ist } \mathcal{C} \textit{ wohlgeordnet und } \mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, \textit{ so ist auch } \mathcal{D} \textit{ wohlgeordnet.} \tag{5.62}$$

---

469 Formal: $\langle C, < \rangle \overset{f}{\simeq} \langle C^*, <^* \rangle \;:\Leftrightarrow\; C \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} C^* \;\wedge\; f$ $<$-$<^*$-ordnungserhaltend.

$\langle C, < \rangle \simeq \langle C^*, <^* \rangle \;:\Leftrightarrow\;$ es gibt ein f, so dass $\langle C, < \rangle \overset{f}{\simeq} \langle C^*, <^* \rangle$.

470 Ohne die Notationsvereinbarungen auf S. 176 und auf dieser Seite sowie Definition 5.13.36 würde diese Formel die folgende unübersichtliche Form erhalten:

Wenn $\langle C, <^1 \rangle \overset{h}{\simeq} \langle D, <^1 \rangle$ und $c \in C$, so ist auch $\langle \mathtt{Ab}(c), <^1 /\!\!/ \mathtt{Ab}(c) \rangle \overset{h/\,\mathtt{Ab}(c)}{\simeq} \langle \mathtt{Ab}(h(c)), <^2 /\!\!/ \mathtt{Ab}(h(c)) \rangle$.

Beweis. Siehe Anhang S. 397–398. □ Mit Hilfe dieser Eigenschaften lässt sich das folgende Theorem ableiten, welches aussagt, dass sich die Eigenschaft, wohlgeordnet werden zu können, von einer Klasse A auf jede mit A gleichmächtige Klasse „überträgt“.

5.13.38 Theorem *Sei $\langle A, < \rangle$ eine wohlgeordnete Klasse und sei $A \sim B$. Dann gibt es eine Relation $<'$, so dass $\langle B, <' \rangle$ eine mit $\langle A, < \rangle$ isomorphe wohlgeordnete Klasse ist.*

Beweis. Siehe Anhang S. 398–399. □ Wenn $\langle C, < \rangle$ und $\langle C^*, <^* \rangle$ isomorph sind, gibt es nach Definition (mindestens) *einen* Isomorphismus von $\langle C, < \rangle$ in $\langle C^*, <^* \rangle$; damit ist nicht ausgeschlossen, dass es *mehrere* Isomorphismen geben könnte. Während dies bei vollgeordneten Klassen tatsächlich sein kann, gibt es bei *wohlgeordneten* Klassen immer nur *einen einzigen*, so dass man in der Einzahl von „dem“ Isomorphismus von $\langle C, < \rangle$ in $\langle C^*, <^* \rangle$ sprechen kann. Ich stelle diese Tatsache im folgenden Theorem mit dem ebenfalls wichtigen Satz zusammen, dass keine Klasse mit einem ihrer Abschnitte isomorph ist:

5.13.39 Theorem Für wohlgeordnete Klasse $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}^*$ gilt:

Ist $\mathcal{W}$ mit $\mathcal{W}^*$ isomorph, so gibt es nur einen einzigen *Isomorphismus von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}^*$.* (5.63)

Es gibt keinen Isomorphismus von $\mathcal{W}$ in einen Abschnitt von $\mathcal{W}$. (5.64)

Beweis. Siehe Anhang S. 399–400. □ Der folgende „Hauptsatz“ der Wohlordnungstheorie besagt, dass sich zwei Wohlordnungen immer hinsichtlich ihrer „Größe“ vergleichen lassen:

5.13.40 Hauptsatz der Wohlordnungstheorie
Für wohlgeordnete Klassen $\mathcal{W} = \langle W, < \rangle$ und $\mathcal{W}^* = \langle W^*, <^* \rangle$ gilt genau eine der Aussagen:

(1) *$\mathcal{W}$ ist isomorph mit $\mathcal{W}^*$.*

(2) *$\mathcal{W}$ ist isomorph mit einem Abschnitt von $\mathcal{W}^*$.*

(3) *$\mathcal{W}^*$ ist isomorph mit einem Abschnitt von $\mathcal{W}$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 400–401. □ Anschaulich besagt der Hauptsatz, dass zwei wohlgeordnete Klassen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}^*$ entweder strukturell gleich sind (Fall 1), oder dass $\mathcal{W}$ strukturell nur einem „Anfangsstück“ von $\mathcal{W}^*$ entspricht, d. h. einem Teil, der aus den Vorgängern eines bestimmten Elements von W^* besteht (Fall 2), oder dass schließlich umgekehrt $\mathcal{W}^*$ strukturell einem „Anfangsstück“ von $\mathcal{W}$ entspricht (Fall 3). Wir können somit die wohlgeordneten Klassen der Größe nach ordnen:

5.13.41 Definition Eine wohlgeordnete Klasse $\mathcal{W}_1$ heißt *kleiner* als eine wohlgeordnete Klasse $\mathcal{W}_2$, in Zeichen $\mathcal{W}_1 <_{wo} \mathcal{W}_2$, wenn $\mathcal{W}_1$ mit einem Abschnitt von $\mathcal{W}_2$ isomorph ist.[471]

5.13.42 Theorem *Für wohlgeordnete Klassen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gilt:*

Irreflexivität:	*$\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{A}$ ist stets falsch,*
Transitivität:	*aus $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} <_{wo} \mathcal{C}$ folgt $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{C}$,*
Vergleichbarkeit:	*von den Aussagen $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} <_{wo} \mathcal{A}$ gilt genau eine.*
Ersetzungsregel:	*Gilt $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$, so bleibt dies wahr,*
	wenn man $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ durch ein isomorphes $\mathcal{X}$ ersetzt.

[471] Formal: $\mathcal{W}_1 <_{wo} \mathcal{W}_2 \;:\Leftrightarrow\; \bigvee_{\mathcal{X}} (\mathcal{W}_1 \simeq \mathcal{X} \;\wedge\; \mathcal{X}$ Abschnitt von $\mathcal{W}_2)$.

Bemerkung. Wegen der Irreflexivität und Transitivität kann man $<_{wo}$ (in der erweiterten Theorie) als eine Ordnungsrelation über allen wohlgeordneten Klassen auffassen.

Beweis. Die Irreflexivität folgt sofort aus Satz (5.64) von Theorem 5.13.39 und die Vergleichbarkeit ist nichts anderes als der Hauptsatz 5.13.40.

Zur Transitivität: Gilt $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B} <_{wo} \mathcal{C}$, so ist $\mathcal{A}$ mit einem Abschnitt $\mathcal{AB}(b)$ von $\mathcal{B}$ isomorph, und $\mathcal{B}$ mit einem Abschnitt $\mathcal{AB}(c)$ von $\mathcal{C}$. Nach Satz (5.61) folgt aus der Isomorphie von $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{AB}(c)$, dass der Abschnitt $\mathcal{AB}(b)$ von $\mathcal{B}$ mit einem Abschnitt $\mathcal{AB}(c')$ von $\mathcal{AB}(c)$ isomorph ist. Insgesamt ist $\mathcal{A} \simeq \mathcal{AB}(b) \simeq \mathcal{AB}(c')$, und per Transitivität von $\simeq$ folgt $\mathcal{A} \simeq \mathcal{AB}(c')$, wobei nun $\mathtt{Ab}(c')$ ein Abschnitt von $\mathcal{AB}(c)$ und diese wieder ein Abschnitt von $\mathcal{C}$ ist, so dass trivialerweise $\mathcal{AB}(c')$ auch ein Abschnitt von $\mathcal{C}$ ist. Daher gilt $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{C}$.

Zur Ersetzungsregel: Sei $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$, also $\mathcal{A} \simeq \mathcal{AB}(b)$ für einen Abschnitt $\mathcal{AB}(b)$ von $\mathcal{B}$. Ist $\mathcal{X}$ mit $\mathcal{A}$ isomorph, so gilt $\mathcal{X} \simeq \mathcal{A} \simeq \mathcal{AB}(b)$, also folgt per Transitivität von $\simeq$, dass $\mathcal{X} \simeq \mathcal{AB}(b)$, also $\mathcal{X} <_{wo} \mathcal{B}$. Ist aber $\mathcal{X}$ mit $\mathcal{B}$ isomorph, so gilt auch $\mathcal{B} \simeq \mathcal{X}$, und nach Satz 5.61 gibt es einen Abschnitt $\mathcal{AB}(x)$ von $\mathcal{X}$, so dass $\mathcal{AB}(b) \simeq \mathcal{AB}(x)$. Mithin folgt $\mathcal{A} \simeq \mathcal{AB}(b) \simeq \mathcal{AB}(x)$, also $\mathcal{A} \simeq \mathcal{AB}(x)$, also $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{X}$. □

Das folgende Theorem ist für die Theorie der Unmengen von Bedeutung: Er stellt klar, dass wohlgeordnete *Un*mengen miteinander, nicht aber mit wohlgeordneten Mengen isomorph sind.

5.13.43 Theorem *Für wohlgeordnete Unmengen* $\mathcal{U} := \langle U, < \rangle$, $\mathcal{U}_1 := \langle U_1, <^1 \rangle$, $\mathcal{U}_2 := \langle U_2, <^2 \rangle$ *und wohlgeordnete Mengen* $\mathcal{M} := \langle M, <' \rangle$ *gilt:*

$\mathcal{U}_1$ *ist mit* $\mathcal{U}_2$ *isomorph.* (5.65)

$\mathcal{M}$ *ist mit einem Abschnitt von* $\mathcal{U}$ *isomorph.* (5.66)

$\mathcal{U}$ *ist mit* $\mathcal{M}$ *nicht isomorph.* (5.67)

Unmengen A *und* B*, über denen eine Wohlordnung existiert, sind gleichmächtig.* (5.68)

Beweis. Zu (5.65). Angenommen, die Behauptung ist falsch, dann muss nach Hauptsatz 5.13.40 eine der beiden wohlgeordneten Unmengen mit einem Abschnitt der anderen isomorph sein, zum Beispiel $\mathcal{U}_1$ mit einem Abschnitt $\mathcal{AB}(u)$ von $\mathcal{U}_2$. Der Isomorphismus von $\mathcal{U}_1$ in $\mathcal{AB}(u)$ ist dann eine Bijektion von U_1 in $\mathtt{Ab}(u)$. Andererseits folgt aus der Abschnittsbedingung für wohlgeordnete Klassen (siehe Definition 5.13.26), dass $\mathtt{Ab}(u)$ eine *Menge* ist; nach Theorem 5.12.10 S. 167 gibt es aber keine Bijektion von der Unmenge U_1 in eine Menge. Somit war die Annahme falsch und die Behauptung richtig.

Zu (5.66). Angenommen, die Behauptung ist falsch, dann muss nach Hauptsatz 5.13.40 die wohlgeordnete Unmenge $\mathcal{U}$ entweder mit $\mathcal{M}$ oder mit einem Abschnitt $\mathcal{AB}(m)$ von $\mathcal{M}$ isomorph sein. Der entsprechende Isomorphismus ist dann entweder eine Bijektion von U in M oder von U in $\mathtt{Ab}(m)$. Doch M ist eine Menge, und deren Teilklasse $\mathtt{Ab}(m)$ ist per Teilmengenaxiom ebenfalls eine Menge. Aber nach Satz 5.12.10 S. 167 kann es keine Bijektion von der Unmenge U in eine Menge geben. Somit war die Annahme falsch und die Behauptung richtig.

Zu (5.67). Nach (5.66) ist $\mathcal{U}$ bereits mit einem Abschnitt von $\mathcal{M}$ isomorph, so dass nach dem Hauptsatz 5.13.40 die Isomorphie von $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{M}$ nicht mehr in Frage kommt.

Zu (5.68). Nach Voraussetzung sind die Unmengen A und B Träger von wohlgeordneten Unmengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Wegen (5.65) sind nun $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph, und der Isomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist eine Bijektion von A in B. Deren Existenz bedeutet nach Definition 5.12.2 S. 164, dass A und B gleichmächtig sind. □

5.14 Ordinalzahlen und tiefere Sätze der Wohlordnungstheorie

Nach CANTOR ist die *Ordinalzahl* oder *Ordnungszahl* einer wohlgeordneten Menge $\mathcal{M}$ der Allgemeinbegriff, der das Gemeinsame aller wohlgeordneten Mengen umfasst, die mit $\mathcal{M}$ isomorph sind.[472] Da die Isomorphie $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist, könnten wir als Ordinalzahl einer wohlgeordneten Menge $\mathcal{M}$ im Sinne CANTORs die Äquivalenzklasse $[\mathcal{M}]_{\simeq}$ ansehen, und uns diese Äquivalenzklassen (ähnlich wie wir uns die FREGEschen Zahlen S. 167–170 als „Klasseninseln" dachten) als „Wohlordnungs-Inseln" vorstellen, auf denen zueinander isomorphe wohlgeordnete Klassen liegen. Dann würde ohne weiteres für wohlgeordnete Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gelten:

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ haben genau dann dieselbe Ordinalzahl, wenn $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. (5.69)

Die so festgelegten Ordinalzahlen nichtleerer wohlgeordneter Mengen sind jedoch Unmengen. Wir wollen daher als Ordinalzahlen wohlgeordneter Mengen lieber gewisse Mengen einführen, und zwar derart, dass das Grundprinzip 5.69 trotzdem gültig ist. Eine solche Definition der Ordinalzahlen ist erstmals von John VON NEUMANN vorgelegt worden.[473] In der hier vorgestellten Form wurden die Ordinalzahlen im Wesentlichen von Raphael Robinson definiert.[474]

5.14.1 Definition Für Mengenklassen α definieren wir:

(1) α ist $\in$-*transitiv* $:\Leftrightarrow$ Jedes Element x eines jeden Elements y von α liegt in α, genauer: wenn $x \in y \in \alpha$, folgt stets $x \in \alpha$.
(2) α ist $\in$-*linear* $:\Leftrightarrow$ Für jedes x und y aus α gilt $x \in y$ oder $x = y$ oder $y \in x$.
(3) α ist $\in$-*fundiert* $:\Leftrightarrow$ Jede nichtleere Teilklasse T von α hat ein $\in$-minimales Element (d. h. ein Element m, so dass für *kein* t aus T gilt, dass $t \in m$), genauer: wenn $\emptyset \neq T \subseteq \alpha$, hat T ein $\in$-minimales Element.
(4) α ist *Ordinalzahl* $:\Leftrightarrow$ α ist $\in$-transitive, $\in$-lineare und $\in$-fundierte Mengenmenge.

Die Klasse der Ordinalzahlen heißt $\mathtt{On}$ oder Ω.[475]

Diese Definition der Ordinalzahlen hat (gegenüber der CANTORschen Beschreibung) den Nachteil, dass man sich zunächst wohl kaum etwas Konkretes darunter vorstellen kann. Man kann aber präzise damit arbeiten und gelangt dann durch beweisbare Theoreme zu einer genaueren Vorstellung. Als erstes Beispiel für eine Ordinalzahl erweist sich die leere Klasse:

5.14.2 Theorem und Definition *Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Ordinalzahl.* Diese bezeichnet man auch mit 0, also $0 :\equiv \emptyset$ [Lesart: Null].

Beweis. Die leere Mengenklasse $\emptyset$ ist eine Menge, also eine Mengenmenge. Außerdem ist $\emptyset$ $\in$-transitiv: Für x und y ist «$x \in y \in \emptyset$» immer falsch und daher jede Aussage der Form «Wenn $x \in y \in \emptyset$, dann ...» wahr.[476] Analog ist $\emptyset$ auch $\in$-fundiert: $\emptyset$ hat keine nichtleere Teilklasse, also ist für beliebiges

---

472 Vgl. CANTOR, *Lehre vom Transfiniten* Teil 1, Ausgabe Zermelo S. 388: „Unter [der] ... *Ordnungszahl* einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{M}$ verstehe ich den *Allgemeinbegriff* ..., welchen man erhält, indem man bei der wohlgeordneten Menge $\mathfrak{M}$ von der Beschaffenheit ... ihrer Elemente abstrahiert und nur auf die Rangordnung reflektiert, durch welche die Elemente in Beziehung zueinander stehen ...".

473 Vgl. NEUMANN, *Definition durch transfinite Induktion* sowie *Die Axiomatisierung* Kap. 5 S. 380–391.

474 ROBINSON, *Theory of classes* S. 35. ROBINSON lässt allerdings die dritte Bedingung (die $\in$-Fundiertheit) aus, weil sein Axiomensystem ein dem Fundierungsaxiom entsprechendes Axiom (ROBINSONs Axiom 7) besitzt. Als Ersatz für das fehlende Fundierungsaxiom müssen wir die $\in$-Fundiertheit fordern.

475 Formal: α (ist) $\in$-*transitiv* $:\Leftrightarrow \bigwedge_{xy}(x \in y \in \alpha \rightarrow x \in \alpha)$. α (ist) $\in$-*linear* $:\Leftrightarrow \bigwedge_{x\in\alpha}\bigwedge_{y\in\alpha}(x \in y \vee x = y \vee y \in x)$.
m (ist) $\in$-minimales Element von T $:\Leftrightarrow m \in T \wedge \neg\bigvee_{t\in T}(t \in m)$.
α ist $\in$-*fundiert* $:\Leftrightarrow \bigwedge_{T}\big(\emptyset \neq T \subseteq \alpha \rightarrow \bigvee_{m}(m$ ist $\in$-minimales Element von $T)\big)$.
α (ist) Ordinalzahl $:\Leftrightarrow$ α Mengenmenge $\wedge$ α $\in$-transitiv $\wedge$ α $\in$-linear $\wedge$ α $\in$-fundiert.
$\mathtt{On} \equiv \{x \mid x$ Ordinalzahl$\}$. In einem bestimmten Kontext werden wir Ω für $\mathtt{On}$ schreiben (siehe 5.14.15).

476 Wie auf S. 112 erläutert (vgl. dort auch Fußnote 269) ist «wenn α dann β» immer wahr, wenn α falsch ist.

T stets «$\emptyset \neq T \subseteq \emptyset$» falsch und daher jede Aussage «wenn $\emptyset \neq T \subseteq \emptyset$, dann ...» wahr.[477] Gemäß dem Leerklassen-Lemma 5.9.3 S. 117 ist schließlich jede Aussage «für jedes x aus $\emptyset$ ...» wahr, so dass die leere Mengenklasse auch $\in$-linear ist. □

Das folgende Theorem spricht fundamentale Eigenschaften von Ordinalzahlen aus, gipfelnd in der Eigenschaft, das die Klasse $\mathtt{On}$ aller Ordinalzahlen eine Unmenge ist.

5.14.3 Theorem Für Ordinalzahlen α und β gilt:

$\alpha \notin \alpha$, d. h. keine Ordinalzahl ist Element von sich selbst. (5.70)

Jedes Element von α ist eine Ordinalzahl. (5.71)

$\alpha \in \beta$ gilt genau dann, wenn $\alpha \subset \beta$. (5.72)

$\mathtt{On}$ *ist eine Unmenge, die $\in$-transitiv, $\in$-linear und $\in$-fundiert ist.*[478] (5.73)

Beweis. Aus inhaltlichen Erwägungen ist klar, dass überhaupt keine Menge Element von sich selbst sein kann; um dies formal zu zeigen, benötigen wir jedoch das noch nicht besprochene Antizirkularitätsaxiom.[479] Für Ordinalzahlen aber folgt $\alpha \notin \alpha$ *auch ohne* Antizirkularitätsaxiom, und zwar wie folgt. Angenommen, es gilt $\alpha \in \alpha$, so wäre $\{\alpha\}$ wäre eine nichtleere Teilklasse von α ohne $\in$-minimales Element: das Element α von $\{\alpha\}$ wäre nämlich wegen $\alpha \in \alpha$ nicht $\in$-minimal, im Widerspruch zur $\in$-Fundiertheit von α. Damit ist (5.70) bewiesen. Zu den übrigen Behauptungen siehe Anhang S. 401–403. □ Da $\mathtt{On}$ nach (5.73) eine Unmenge ist, muss es außer $\emptyset$ noch etliche andere Ordinalzahlen geben. Das folgende Theorem zeigt konkret, wie man aus gegebenen Ordinalzahlen weitere gewinnt:

5.14.4 Theorem und Definition Sei α Element, M Teilmenge und C nichtleere Teilklasse von $\mathtt{On}$. *Dann sind $\bigcap C$, $\bigcup M$ und $\alpha \cup \{\alpha\}$ Ordinalzahlen.*
Für diese schreibt man auch $\inf C$ bzw. $\sup M$ bzw. α' (oder $\alpha + 1$), und für $0'$ auch 1:

$$\inf C :\equiv \bigcap C \qquad \text{[Lesart: Infimum von } C\text{]} \tag{5.74}$$

$$\sup M :\equiv \bigcup M \qquad \text{[Lesart: Supremum von } M\text{]} \tag{5.75}$$

$$\alpha' :\equiv \alpha + 1 :\equiv \alpha \cup \{\alpha\} \qquad \text{[Lesart: Nachfolger von } \alpha\text{]} \tag{5.76}$$

$$1 :\equiv 0', \text{ das ist } = \emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \qquad \text{[Lesart: Eins]} \tag{5.77}$$

Beweis. Siehe Anhang S. 403–404. □ Die Bezeichnungen „Nachfolger“, „Infimum“ und „Supremum“ sind im Hinblick darauf gewählt, dass bezüglich der nun einzuführenden Ordnungsrelation α' der unmittelbare Nachfolger von α, $\sup M$ das Supremum von M und $\inf C$ das Infimum von C ist:[480]

5.14.5 Definition Die *Kleinerrelation $<_{\mathtt{On}}$ für Ordinalzahlen* sei die Relation, die x genau dann auf y ausrichtet, wenn x und y Ordinalzahlen sind und $x \in y$ gilt.[481] Sind Missverständnisse ausgeschlossen, schreiben wir für $<_{\mathtt{On}}$ kurz $<$ (siehe aber auch 5.14.15 S. 196).

---

477 Siehe Fußnote 476.

478 Das heißt $\mathtt{On}$ besitzt wie eine Ordinalzahl die drei in Def 5.14.1 eingeführten Eigenschaften:
- $\in$-Transitivität: aus $x \in y \in \mathtt{On}$ folgt $x \in \mathtt{On}$,
- $\in$-Linearität: für x und y aus $\mathtt{On}$ gilt $x \in y$ oder $x = y$ oder $y \in x$ und
- $\in$-Fundiertheit: Jede nichtleere Teilklasse T von $\mathtt{On}$ besitzt ein $\in$-minimales Element, d. h. eine Ordinalzahl, die nicht Element einer anderen Ordinalzahl aus T ist.

479 Siehe Abschnitt 5.19 und besonders Korollar 5.19.8 S. 257.

480 Siehe Theorem 5.14.6 und Sätze (5.82), (5.80) und (5.81).

Die Relation $<_{\mathtt{On}}$ ist eine Wohlordnung über $\mathtt{On}$, genauer gilt:

5.14.6 Theorem $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ ist eine wohlgeordnete Unmenge mit folgenden Eigenschaften:

Für jede Ordinalzahl α ist $\mathtt{Ab}(\alpha) = \alpha$. (5.78)

Für Ordinalzahlen α und β gilt $\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subset \beta$ und ebenso $\alpha \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subseteq \beta$. (5.79)

Jede Klasse C von Ordinalzahlen hat ein Infimum, nämlich $\bigcap C$ $(= \inf C)$. (5.80)

Jede Menge M von Ordinalzahlen hat ein Supremum, nämlich $\bigcup M$ $(= \sup M)$. (5.81)

Jedes α aus $\mathtt{On}$ hat einen unmittelbaren Nachfolger, nämlich $\alpha \cup \{\alpha\}$ $(= \alpha' = \alpha + 1)$. (5.82)

$\emptyset$ $(= 0)$ *ist das Minimum von* $\mathtt{On}$, *aber* $\mathtt{On}$ *hat kein Maximum.* (5.83)

Beweis. Siehe Anhang S. 404–405. □

5.14.7 Theorem und Definition Wann immer M eine Menge von Ordinalzahlen ist, sei

$$M^{/\!/} \text{ [Lesart: Nachfolger aller Elemente von } M] \;:\equiv \begin{cases} (\max M)' & \text{falls } M \text{ ein Maximum besitzt,} \\ \sup M & \text{falls } M \text{ kein Maximum besitzt.} \end{cases}$$

Dieses $M^{/\!/}$ ist stets «die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als jedes Element von M».

Beweis. Nach (5.82) und (5.81) ist in jedem Fall $M^{/\!/}$ eine Ordinalzahl. Ist M leer, so hat M kein Maximum und so ist $M^{/\!/}$ als $\sup \emptyset$ definiert, also als $\bigcup \emptyset$, was $\emptyset$ ist, d. h. $M^{/\!/}$ ist die kleinste Ordinalzahl überhaupt, also auch die kleinste, die größer ist als jedes Element von M.[482] Auch wenn M nichtleer ist, so $M^{/\!/}$ stets eine Ordinalzahl, die größer ist als jedes Element von M,[483] und zwar ist $M^{/\!/}$ von allen Ordinalzahlen, die größer als jedes Element von M sind, die kleinste.[484] □

Die genannten Tatsachen vermitteln nun von der Reihenfolge der Ordinalzahlen in etwa folgende Vorstellung (die ich in Abschnitt 5.28 noch genauer analysieren werde). Nach Satz 5.83 ist die leere Klasse $\emptyset$ die „kleinste“ Ordinalzahl, sie steht also in einem Ordnungsdiagramm ganz links. Nach Satz 5.82 ist dann $\emptyset'$ die nächst größere Ordinalzahl, dann kommt $\emptyset''$, dann $\emptyset'''$ usw.:

$$\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \ldots$$

Später werden wir die Zahlen dieser Reihe als „natürliche Zahlen“ $0, 1, 2, \ldots$ bezeichnen und sehen, dass die Klasse aller dieser Zahlen immer noch eine *Menge* (wenn auch eine unendliche) ist.[485] Dann

---

481 Formal: $<_{\mathtt{On}} := \{p \mid \bigvee_{x \in \mathtt{On}} \bigvee_{y \in \mathtt{On}} (x \in y \;\wedge\; p = \langle x, y \rangle)\}$.

482 Nach dem Leerklassen-Lemma 5.9.3 S. 117 gilt ja «für jedes Element von $\emptyset$» was immer man will, also auch, dass unser $M^{/\!/}$ $(= \emptyset)$ größer ist als dieses Element.

483 Fall 1: M hat ein Maximum m. Dann gilt $x \leq m$ für alle x aus M, und nach Definition ist $M^{/\!/}$ der Nachfolger m' von m, so dass (nach Satz 5.82) $m < M^{/\!/}$ ist. Insgesamt gilt für alle x aus M, dass $x \leq m < M^{/\!/}$, also ist nach Satz 5.53 S. 174 $x < M^{/\!/}$, so dass $M^{/\!/}$ größer als jedes Element von M ist.
Fall 2: M hat kein Maximum. Dann ist $M^{/\!/}$ nach Definition das Supremum von M, also die kleinste Ordinalzahl, die eine obere Schranke von M ist. Da $M^{/\!/}$ obere Schranke von M ist, gilt für alle x aus M, dass $x \leq M^{/\!/}$. Wäre nun für ein x sogar $x = M^{/\!/}$, so läge $M^{/\!/}$ in M, und wäre (als obere Schranke von M, die selbst in M liegt) das Maximum von M, was aber im hier betrachteten Fall nicht existiert. Also ist $x = M^{/\!/}$ für alle x aus M falsch, und zusammen mit $x \leq M^{/\!/}$ folgt $x < M^{/\!/}$.

484 Sei C die Klasse aller Ordinalzahlen s, die größer sind als jedes Element von M. Wie bereits begründet, ist $M^{/\!/}$ ein solches s. Hier ist zu zeigen, dass M das kleinste solche s ist, also das Minimum von C.
Fall 1: M hat ein Maximum m. Dann ist $M^{/\!/} = m'$. Wann immer nun s zu C gehört, also größer als jede in M liegende Ordinalzahl ist, gilt insbesondere $m < s$. Angenommen, es ist zugleich $s < M^{/\!/}$, so folgt $m < x < M^{/\!/}$, d. h. $m < x < m'$ im Widerspruch dazu, dass (nach Satz 5.82) m' der *unmittelbare* Nachfolger von m ist. Also war die Annahme falsch und es muss $M^{/\!/} \leq s$ gelten. Somit ist $M^{/\!/}$ das Minimum von C.
Fall 2: M hat kein Maximum. Dann ist $M^{/\!/}$ das Supremum von M. Wann immer s zu C gehört, ist s eine obere Schranke von M. Da $M^{/\!/}$ nun das Supremum, also die *kleinste* obere Schranke von m ist, folgt sofort $M \leq s$, und so ist M wieder das Minimum von C.

485 Siehe Korollar 5.17.27 S. 243. Diese Tatsache ist äquivalent zum sog. *Unendlichkeitsaxiom* (5.17.26 S. 242).

gibt es aber gemäß Theorem 5.14.7 eine kleinste Ordinalzahl, die größer ist als jedes Element dieser Klasse, und diese Ordinalzahl wird ω genannt.[486] Sie eröffnet eine zweite unendliche Reihe, nämlich:

$$\omega, \omega', \omega'', \ldots \ .$$

Offensichtlich sind die beiden unendlichen Reihen $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \ldots$ und $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ isomorph: Man kann sie übereinander legen, indem man $\emptyset$ auf ω, $\emptyset'$ auf ω' usw. legt. So gibt es eine Bijektion von der Menge der ersten unendlichen Reihe in jene der zweiten: Setzen sich daher die Ordinalzahlen der ersten Reihe zu einer Menge M_1 zusammen, so müssen nach dem Ersetzungsaxiom auch jene der zweiten Reihe eine Menge M_2 bilden, und nach Theorem 5.10.20 ist auch die Vereinigung $M := M_1 \cup M_2$ dieser Mengen eine Menge, welche alle bislang genannten Ordinalzahlen enthält. Gemäß Theorem 5.14.7 existiert dann eine Ordinalzahl, die größer ist als alle bisher genannten, nämlich $M^{/\!/}$. Diese nennen wir $\omega 2$, und so erhalten wir eine dritte unendliche Reihe

$$\omega 2, (\omega 2)', (\omega 2)'', \ldots \ .$$

Es ist offensichtlich, dass wir immer so weitermachen können, weshalb sich unendlich viele solcher unendlichen Reihen aneinander reihen, denn solange der im Geist bereits zurückgelegte Abschnitt in der Wohlordnung der Ordinalzahlen noch eine *Menge* bildet, muss die Reihe immer noch weitergehen. Die *gesamte* Reihe der Ordinalzahlen aber bekommt dann eine *unvorstellbar große* Ausdehnung, wie wir es für eine Unmenge ja auch erwarten müssen.

$\mathtt{On}$ selbst ist nun nach den Unmengen $\mathbb{D}$, $\mathbb{M}$ und $\mathbb{U}$[487] eine weitere uns begegnende Unmenge, aber es besteht zwischen dieser neuen Unmenge und $\mathbb{D}, \mathbb{M}$ und $\mathbb{U}$ ein wesentlicher Unterschied: Aufgrund der über $\mathtt{On}$ existierenden Wohlordnung gibt es gewissermaßen einen „Weg“, auf dem wir die Elemente von $\mathtt{On}$ „von unten nach oben hin“ alle erreichen können, und zwar so, dass auf diesem Weg die jeweils zurückgelegte Strecke immer eine *Menge* bleibt. Falls es überhaupt im Bereich der Unmengen verschiedene Mengenstufen gibt, sollte man daher erwarten, dass $\mathtt{On}$ auf der *niedrigsten* dieser Stufen liegt, also eine Unmenge „der kleinsten Sorte“ ist, während $\mathbb{D}$, $\mathbb{M}$ und $\mathbb{U}$ zu der Unmengen der „größten Art“ gehören.[488]

Da $\mathtt{On}$ eine *wohlgeordnete* Unmenge ist, können wir, um Eigenschaften von Ordinalzahlen nachzuweisen bzw. um Funktionen mit Definitionsbereich $\mathtt{On}$ einzuführen, das *Verfahren der ordnungstheoretischen Induktion* bzw. *Rekursion* benutzen (siehe 5.13.29 S. 184 und 5.13.31). Für das Rekursionsprinzip gibt es in seiner Anwendung auf Ordinalzahlen eine einfachere Formulierung als im allgemeinen Fall, denn wenn man beachtet, dass gemäß Satz 5.78 S. 192 für Ordinalzahlen α stets $\mathtt{Ab}(\alpha) = \alpha$ gilt, kann man es wie folgt formulieren:

5.14.8 Ordnungstheoretische rekursive Definition für Ordinalzahlen Eine Funktion f von $\mathtt{On}$ in Z wird dadurch definiert, dass man für jede Ordinalzahl α *unter der Voraussetzung, dass* f/α *bereits eine Funktion von* α *in* Z *ist, d. h. dass* f/α *alle Vorgänger* ξ *von* α *bereits auf Elemente* $f(\xi)$ *von* Z *wirft*, ein Element von Z festlegt, das $f(\alpha)$ sein soll.

Oft ist für Ordinalzahlen eine andere Form von Induktion und Rekursion angemessener, für welche man die sog. Sukzessor– und Limeszahlen gesondert betrachtet:

5.14.9 Definition Die von 0 (d. h. $\emptyset$) verschiedenen Elemente von $\mathtt{On}$ teilt man ein in sog. Sukzessor– und Limeszahlen: *Sukzessorzahlen* sind die unmittelbaren Nachfolger α' für Elemente α aus $\mathtt{On}$, und *Limeszahlen* sind die übrigen von 0 verschiedenen Zahlen.[489]

---

[486] Es wird sich herausstellen, dass ω mit der Klasse der natürlichen Zahlen identisch ist. Siehe Definition 5.16.40 S. 222 und Korollar 5.17.28 S. 243.

[487] Der Unmengencharakter von $\mathbb{D}$ und $\mathbb{M}$ wurde in Theorem 5.10.12 S. 123 bewiesen. Dass $\mathbb{U}$ Unmenge ist, haben wir in Satz 5.2 S. 88 aus inhaltlichen Erwägungen festgestellt. Formal kann dies erst später aus dem *Axiom für Urelemente* (5.15.20 S. 205) abgeleitet werden (Korollar 5.15.21 S. 205).

[488] Dies wird später exakt formuliert und bewiesen (siehe Theorem 5.15.19 S. 205 und Satz 5.118 S. 206).

Beispiele. $0', 0'', \omega', \omega'', (\omega 2)', (\omega 2)''$ usw. sind Sukzessorzahlen; $\omega, \omega 2$ usw. sind Limeszahlen.

5.14.10 Beweisprinzip der Sukzessor-Limes-Induktion Um zu zeigen, dass alle Elemente a von $\mathtt{On}$ eine Eigenschaft E besitzen, genügt es, Folgendes zu zeigen:

(1) 0 (d. h. $\emptyset$) hat die Eigenschaft.
(2) Hat eine Ordinalzahl ξ die Eigenschaft, so auch ihr Nachfolger $\xi + 1$ (d. h. ξ').
(3) Haben alle Vorgänger einer Limeszahl λ die Eigenschaft, so auch λ.

(1) heißt Induktionsanfang, (2) Sukzessor-Schritt, (3) Limes-Schritt des Beweises.

Beweis bzw. Rechtfertigung des Beweisprinzips. Seien (1), (2) und (3) erfüllt. Um zu zeigen, dass jede Ordinalzahl α die Eigenschaft hat, muss man gemäß dem Prinzip der ordnungstheoretischen Induktion (5.13.29 S. 184) nur zeigen, dass α sie hat, *wenn alle Vorgänger von α sie haben*. Sei also vorausgesetzt, dass jeder Vorgänger von α die Eigenschaft hat. Nun gibt es drei Fälle: Entweder ist α identisch mit $\emptyset$ oder α ist eine Sukzessorzahl mit einem unmittelbaren Vorgänger ξ (dann ist $\xi' = \alpha$ und ξ hat nach Voraussetzung die Eigenschaft) oder α ist eine Limeszahl. Im jedem Fall hat dann auch α die Eigenschaft: im ersten Fall wegen (1), im zweiten wegen (2), im dritten wegen (3). □ Grundlage für das entsprechende Definitionsprinzip ist das folgende Theorem:

5.14.11 Rekursionssatz für Sukzessor-Limes-Rekursion

Sei Z eine Klasse,
z_0 ein Element von $\mathbb{Z}$,
F_s eine Funktion von $\mathtt{On} \times Z$ in Z und
F_ℓ eine Funktion, die jedes Paar $\langle \lambda, f \rangle$, dessen erste Komponente λ eine Limeszahl und dessen zweite Komponente f eine Funktion von λ in Z ist, auf ein z aus Z wirft.

Dann gibt es genau eine Funktion f von $\mathtt{On}$ in Z mit
(1) $f(0) = z_0$,
(2) $f(\alpha + 1) = F_s(\alpha, f(\alpha))$ für alle Ordinalzahlen α, und
(3) $f(\lambda) = F_\ell(\langle \lambda, f/\lambda \rangle)$ für alle Limeszahlen λ.

Beweis. Siehe Anhang S. 405–406. □ Dieser Satz ermöglicht folgendes Definitionsverfahren:

5.14.12 Definition durch Sukzessor-Limes-Rekursion Eine Funktion f von $\mathtt{On}$ in eine Klasse Z wird dadurch definiert, dass man

(1) als Funktionswert $f(0)$ bzw. $f(\emptyset)$ ein Element von Z festlegt,
(2) für jede Sukzessorzahl $\alpha + 1$ einen Funktionswert $f(\alpha + 1)$ aus Z festlegt
unter der Voraussetzung, dass $f(\alpha)$ bereits ein Element von Z ist
(die geforderte Gleichung $f(\alpha + 1) = \ldots$ heißt *Sukzessor-Rekursionsgleichung* für $\alpha + 1$),
(3) für jede Limeszahl λ einen Funktionswert $f(\lambda)$ aus Z festlegt
unter der Voraussetzung, dass f/λ bereits eine Funktion von λ in Z ist, oder
gleichbedeutend: *dass $f(\xi)$ für alle $\xi \in \lambda$ (das heißt $\xi < \lambda$) schon ein Element von Z ist*
(die geforderte Gleichung $f(\lambda) = \ldots$ heißt die *Limes-Rekursionsgleichung* für λ).

Beweis. Nach dem Komprehensionstheorem 5.10.55 S. 140 für Funktionen gibt es

[489] Formal: β (ist) Sukzessorzahl $:\Leftrightarrow \beta \in \mathtt{On} \setminus \{0\} \wedge \bigvee_{\alpha \in \mathtt{On}} (\beta = \alpha')$.
λ (ist) Limeszahl $:\Leftrightarrow \lambda \in \mathtt{On} \setminus \{0\} \wedge \neg \bigvee_{\alpha \in \mathtt{On}} (\lambda = \alpha')$.

- eine Funktion F_s, die jedes Paar $\langle \alpha, z\rangle$ aus $\mathtt{On} \times Z$ auf dasjenige Element von Z wirft, welches gemäß (2) *unter der Voraussetzung, dass $f(\alpha)$ die Zahl z ist*, der Funktionswert von $f(\alpha+1)$ sein soll; die durch (2) geforderte Rekursionsgleichung kann dann also in der Form $f(\alpha+1) = F_s(\alpha, f(\alpha))$ formuliert werden, sowie
- eine Funktion F_ℓ, die jedes Paar $\langle \lambda, g\rangle$ (worin λ eine Limeszahl und g eine Funktion von λ in Z ist) auf dasjenige Element von Z wirft, welches gemäß (3) *unter der Voraussetzung, dass die Einschränkung f/λ der zu definierenden Funktion f die Funktion g ist*, der Funktionswert $f(\lambda)$ sein soll; die durch (3) geforderte Rekursionsgleichung kann dann also in der Form $f(\lambda) = F_s(\langle \lambda, f/\lambda\rangle)$ formuliert werden.

Da es nach dem Prinzip 5.14.11 genau eine Funktion f von $\mathtt{On}$ in Z gibt mit $f(\emptyset) = z_0$, $f(\alpha+1) = F_s(\alpha, f(\alpha))$ für Ordinalzahlen α und $f(\lambda) = F_\ell(\lambda, f/\lambda)$ für Limeszahlen λ, ist dies dann die einzige, welche die Forderungen (1) bis (3) erfüllt. □ Nun kann der Zusammenhang zwischen den Ordinalzahlen und der allgemeinen Wohlordnungstheorie hergestellt werden:

5.14.13 Theorem und Definition *Zu jeder wohlgeordneten Menge $\mathcal{A} := \langle A, <_A\rangle$ gibt es genau eine Ordinalzahl α, so dass $\langle A, <_A\rangle$ und $\langle \alpha, <\rangle$ isomorph sind.* Diese heißt die ≪*Ordinalzahl von $\mathcal{A}$*≫ und wird mit $\mathtt{ord}(\mathcal{A})$ bezeichnet.[490]
Für wohlgeordnete Mengen $\mathcal{A} := \langle A, <_A\rangle$ und $\mathcal{B} := \langle B, <_B\rangle$ gelten dann die Äquivalenzen:

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind isomorph $(\mathcal{A} \simeq \mathcal{B})$ *genau dann, wenn* $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) = \mathtt{ord}(\mathcal{B})$, *und*
(b) $\mathcal{A}$ ist kleiner als $\mathcal{B}$ $(\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B})$ *genau dann, wenn* $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$.

Beweis. Siehe Anhang S. 406–407. □ Damit haben wir also jeder Menge eine Ordinalzahl so zugeteilt, dass das *Grundprinzip* (5.69), das für die CANTORschen Ordinalzahlen charakteristisch war, gültig bleibt: Eigenschaften (a) und (b) zeigen, dass die Ordinalzahlen sich als „Messzahlen" für Wohlordnungs-Typen (Isomorphieklassen von Wohlordnungen) eignen, welche wegen (b) die „Größe" dieser Typen anzeigen. Nun möchte man jeder wohlgeordneten *Un*menge $\mathcal{U} := \langle U, <\rangle$ ebenfalls ein Objekt als ≪Ordinalzahl $\mathtt{ord}(\mathcal{U})$ von $\mathcal{U}$≫ zuordnen. Im Gegensatz zu den eigentlichen Ordinalzahlen, die ja Elemente von $\mathtt{On}$ sind, sollen diese neuen Ordinalzahlen *uneigentliche* Ordinalzahlen heißen. Zusammen nenne ich eigentliche und uneigentliche Ordinalzahlen *verallgemeinerte Ordinalzahlen*. Dabei soll die Wahl natürlich so sein, dass die beiden fundamentalen Zusammenhänge (a) und (b) von Theorem 5.14.13 für beliebige wohlgeordnete Klassen $\mathcal{A}$ gelten. Das folgende Theorem ist die Grundlage dafür, dass hierzu *eine einzige* uneigentliche Ordinalzahl Ω ausreicht:

5.14.14 Theorem *Alle wohlgeordneten Unmengen sind miteinander isomorph, und wann immer $\mathcal{M}$ eine wohlgeordnete Menge und $\mathcal{U}$ eine wohlgeordnete Unmenge ist, gilt $\mathcal{M} <_{wo} \mathcal{U}$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 407. □ Hieraus folgt, dass wir nur *eine einzige* uneigentliche Ordinalzahl benötigen, und zwar eignet sich hierzu jedes fest gewählte Objekt Ω, für das $\Omega \notin \mathtt{On}$ gilt. Haben wir nämlich ein solches Ω, so definieren wir für jede wohlgeordnete Unmenge $\mathcal{U}$, dass $\mathtt{ord}(\mathcal{U}) :\equiv \Omega$; außerdem legen wir fest, dass für verallgemeinerte Ordinalzahlen α, β, von denen mindestens eine Ω ist, $\alpha < \beta$ dann und nur dann gelten soll, wenn α eigentliche Ordinalzahl und $\beta = \Omega$ ist. *Dann lässt sich $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathtt{ord}(\mathcal{A}) = \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ sowie $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ für beliebige wohlgeordnete Klassen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beweisen*: Zu zeigen ist dies wegen Theorem 5.14.13 nur noch für den Fall, dass mindestens eine der wohlgeordneten Klassen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eine Unmenge ist. Gilt in diesem Fall $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, so müssen *beide* wohlgeordnete Unmengen sein,[491] also gilt nach Definition $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) = \Omega = \mathtt{ord}(\mathcal{B})$.

---

490 Formal: $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) :\equiv \imath\, \alpha(\mathcal{A} = \langle \alpha, <\rangle)$.

491 Ist nämlich die eine von ihnen eine wohlgeordnete Menge und die andere eine wohlgeordnete Unmenge, so ist nach Theorem 5.14.14 die eine kleiner als die andere, so dass sie wegen der Vergleichbarkeit von $<_{wo}$ (Theorem 5.13.42 S. 188) *nicht* isomorph sein können.

Ist umgekehrt $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) = \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ vorausgesetzt, so müssen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ebenfalls beide wohlgeordnete Unmengen sein,[492] und es folgt nach Theorem 5.14.14, dass $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Gilt $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$, so muss $\mathcal{A}$ eine wohlgeordnete Menge und $\mathcal{B}$ eine wohlgeordnete Unmenge sein,[493] also ist $\mathtt{ord}(\mathcal{A})$ eine eigentliche Ordinalzahl und $\mathtt{ord}(\mathcal{B}) = \Omega$, und es folgt $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$. Ist schließlich $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ vorausgesetzt, so muss wieder $\mathcal{A}$ eine wohlgeordnete Menge und $\mathcal{B}$ eine wohlgeordnete Unmenge sein,[494] und so gilt nach Theorem 5.14.14, dass $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$. □

Da wir nun als Ω ein beliebiges nicht in $\mathtt{On}$ gelegenes Objekt nehmen können, und da $\mathtt{On} \notin \mathtt{On}$ gilt ($\mathtt{On}$ ist ja eine Unmenge und kann daher nicht Element einer Menge sein), liegt es nahe, als Ω die Unmenge $\mathtt{On}$ zu verwenden:

5.14.15 Definition Die *uneigentliche Ordinalzahl* Ω sei $\mathtt{On}$; diese gelte als die Ordinalzahl $\mathtt{ord}(\mathcal{U})$ aller wohlgeordneten Unmengen $\mathcal{U}$. Die *verallgemeinerten Ordinalzahlen* seinen die bisherigen (eigentlichen) Ordinalzahlen und Ω. Außerdem erweitern wir die zunächst in 5.14.5 festgelegte Bedeutung von $<$ durch die Bestimmung, dass $\alpha < \beta$ genau dann gelten soll, wenn (1) auch bislang schon $\alpha < \beta$ galt, oder (2) $\alpha \in \Omega$ und $\beta = \Omega$ ist.[495]

Bemerkung. Nach dieser Definition ist die Beziehung $\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \beta$, die für eigentliche Ordinalzahlen gemäß Definition 5.14.5 gilt, für *alle* verallgemeinerten Ordinalzahlen gültig.[496] Außerdem ist das erweiterte $<$ eine Vollordnung,[497] die allerdings *keine* Wohlordnung mehr darstellt,[498] und es gilt $\alpha < \Omega$ (wegen $\alpha \in \Omega$) für jede eigentliche Ordinalzahl α, und demzufolge $\alpha \leq \Omega$ für jede verallgemeinerte Ordinalzahl α. *Also ist Ω die maximale verallgemeinerte Ordinalzahl.*

---

492 Andernfalls würde einer der beiden Terme $\mathtt{ord}(\mathcal{A})$ oder $\mathtt{ord}(\mathcal{B})$ ein Element von $\mathtt{On}$ und der andere Ω bezeichnen, und da Ω nach Wahl *kein* Element von $\mathtt{On}$ ist, wäre $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) \neq \mathtt{ord}(\mathcal{B})$.

493 Sind beides wohlgeordnete Unmengen, so ist nach Theorem 5.14.14 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$; ist aber $\mathcal{A}$ wohlgeordnete Unmenge und $\mathcal{B}$ wohlgeordnete Menge, so ist nach demselben Theorem $\mathcal{B} <_{wo} \mathcal{A}$. Beides widerspricht wegen der Vergleichbarkeitsaussage in Theorem 5.13.42 der Voraussetzung $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$.

494 Nach unserer Festlegung der erweiterten Relation $<$ ist die Ordinalzahl Ω einer jeden wohlgeordneten Unmengen das Maximum von $<$. Wegen $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ kann daher $\mathcal{A}$ *keine* wohlgeordnete Unmenge sein, ist also eine wohlgeordnete Menge. Da wir aber hier nur den Fall betrachten, dass $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ eine wohlgeordnete Unmenge ist, muss dann $\mathcal{B}$ eine wohlgeordnete Unmenge sein.

495 Formal führen wir diese Verallgemeinerungen wie folgt ein:
(a) $\Omega :\equiv \mathtt{On}$.
(b) α (ist) verallgemeinerte Ordinalzahl $:\Leftrightarrow\; \alpha \in \mathtt{On}$ oder $\alpha = \mathtt{On}$.
(c) $\overline{\mathtt{ord}}(\mathcal{X}) :\equiv \imath\, \alpha\, \big((\mathcal{X}$ wohlgeordnete Menge $\wedge\, \alpha = \mathtt{ord}(\mathcal{X})) \vee (\mathcal{X}$ wohlgeordnete Unmenge $\wedge\, \alpha = \Omega)\big)$.
(d) $\alpha <_{\overline{\mathtt{On}}} \beta \;:\Leftrightarrow\; (\alpha \in \Omega \wedge \beta \in \Omega \wedge \alpha < \beta) \vee (\alpha \in \Omega \wedge \beta = \Omega)$.
Für $\overline{\mathtt{ord}}(\mathcal{X})$ können wir vereinfacht $\mathtt{ord}(\mathcal{X})$ schreiben. Denn der Fall, für den die Bezeichnung $\mathtt{ord}(\mathcal{X})$ gemäß Definition 5.14.13 konzipiert war, war ja der, dass $\mathcal{X}$ eine wohlgeordnete Menge bezeichnet, und in diesem Fall stimmen $\overline{\mathtt{ord}}(\mathcal{X})$ und $\mathtt{ord}(\mathcal{X})$ überein. Ebenso schreiben wir für $\alpha <_{\overline{\mathtt{On}}} \beta$ vereinfacht $\alpha <_{\mathtt{On}} \beta$ oder $\alpha < \beta$, denn der Fall, für den die Relationsformeln $\alpha <_{\mathtt{On}} \beta$ konzipiert waren, war der, dass α und β eigentliche Ordinalzahlen sind, und in diesem Fall haben $\alpha <_{\overline{\mathtt{On}}} \beta$ und $\alpha <_{\mathtt{On}} \beta$ denselben Wahrheitswert.

496 Zu zeigen ist dies nur noch, wenn mindestens eine der verallgemeinerten Ordinalzahlen α, β mit Ω identisch ist. Ist dann $\alpha < \beta$, gilt nach Definition 5.14.15 in jedem Fall $\alpha \in \beta$. Gilt umgekehrt $\alpha \in \beta$, so kann nicht $\alpha = \Omega$ sein (da Ω als Unmenge nicht Element einer Klasse ist); also ist $\alpha \in \Omega$. Folglich ist β diejenige der beiden verallgemeinerten Ordinalzahlen, die mit Ω identisch ist. So gilt $\alpha \in \Omega = \beta$, d. h. $\alpha \in \beta$.

497 Zum Beweis der *Irreflexivität* ist nur nachzutragen, dass $\Omega \notin \Omega$ gilt (weil Ω Unmenge ist). Zum Beweis der *Transitivität* sind verallgemeinerte Ordinalzahlen α, β, γ zu betrachten, von denen mindestens eine Ω ist. Ist dann $\alpha < \beta < \gamma$, so ist $\alpha \in \beta \in \gamma$, also sind α und β als Elemente von Klassen Individuen, also eigentliche Ordinalzahlen, so dass nur übrig bleibt, dass $\gamma = \Omega$. Also folgt $\alpha \in \beta \in \Omega$ und per $\in$-Transitivität von Ω ($= \mathtt{On}$) ist $\alpha \in \Omega$, d. h. $\alpha < \Omega$, d. h. $\alpha < \gamma$. Auch die *Linearität* ist nur noch für verallgemeinerte Ordinalzahlen α, β zu zeigen, von denen mindestens eine $= \Omega$ ist. Ist nun die eine von ihnen (nennen wir sie y) mit Ω identisch und die andere (nennen wir sie x) nicht, so gilt $x \in y$, also je nachdem $\alpha \in \beta$ oder $\beta \in \alpha$. Sind aber beide $= \Omega$, gilt $\alpha = \beta$.

498 Sonst müsste die Abschnittsbedingung gelten, wonach insbesondere der Abschnitt $\mathtt{Ab}(\Omega)$ aller $<$-Vorgänger von Ω eine Menge wäre. Doch die x mit $x < \Omega$ sind die Elemente von Ω, und so ist $\mathtt{Ab}(\Omega)$ mit der Unmenge Ω identisch.

Wir sind nun in der Lage, das 1897 entdeckte **Paradoxon von Burali-Forti** oder *Ordinalzahlen-Paradoxon* zu besprechen, welches nach MIRIMANOFF „die älteste und vielleicht wichtigste" Antinomie der CANTORschen Mengenlehre darstellt.[499] Es besagt, dass einerseits jede Ordinalzahl einen Nachfolger hat (siehe 5.82 S. 192), es aber andererseits dennoch eine größte Ordinalzahl Ω zu geben scheint (siehe Bemerkung nach Definition 5.14.15). Das Paradoxon wurde 1897 von Césare BURALI-FORTI veröffentlicht.[500] BURALI-FORTI wies auf die absurde Konsequenz hin, dass Ω sowohl kleiner als auch größergleich dem Nachfolger Ω' sein müsse.[501]
In unserer Theorie ist der Widerspruch durch die Unterscheidung von Mengen und Unmengen und damit verbunden von eigentlichen und uneigentlichen (bzw. verallgemeinerten) Ordinalzahlen aufgehoben: Der Satz, dass jede Ordinalzahl einen Nachfolger hat, gilt nur für die eigentlichen Ordinalzahlen, während der Satz, dass die Ordinalzahlen ein Maximum Ω haben, nur gilt, wenn man unter „Ordinalzahlen" die verallgemeinerten Ordinalzahlen versteht.[502]

Abschließend sollen mit Hilfe der Ordinalzahlen zwei der tiefgründigsten Sätze der Mengenlehre bewiesen werden: der Wohlordnungssatz und das ZORNsche Lemma. Diese Sätze tauchen im Zusammenhang mit Unendlichkeitsfragen immer wieder auf, und das ZORNsche Lemma werden wir in einem Gottesbeweis benötigen (siehe S. 706–707). Als Vorbereitung kann das folgende Theorem dienen, das zudem die Grundlage der Kardinalzahltheorie (siehe Abschnitt 5.30) bereitstellt.

5.14.16 Theorem *Jede Menge ist mit einer Ordinalzahl gleichmächtig.*

Beweis. Siehe Anhang S. 407–408. □ Wir halten für spätere Zwecke noch ein Korollar fest:

5.14.17 Korollar *Auf jeder Mengenstufe liegt mindestens eine Ordinalzahl.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ eine Mengenstufe, also nach Definition 5.12.15 S. 170 die FREGEsche Zahl $\|M\|$ einer Menge M. Nach Theorem 5.14.16 gibt es eine Ordinalzahl α, die mit M gleichmächtig ist; diese liegt dann mit M auf derselben Stufe $\mathfrak{M}$. □ Mit Theorem 5.14.16 lässt sich nun der Wohlordnungssatz

499 MIRIMANOFF, *Les Antinomies* S. 45: „la plus ancienne et peut-être la plus importante des antinomies cantoriennes connues". Man spricht auch von der „ersten CANTORschen Antinomie" (siehe Fußnote 500).

500 Vgl. BURALI-FORTI, *Una Questione*. Nach MESCHKOWSKI, *Cantor* S. 144 war CANTOR bereits 1895 auf das Paradoxon gestoßen und hatte HILBERT 1896 in einem Brief darauf hingewiesen. Demnach wäre eigentlich Cantor der erste Entdecker, und so nennt MESCHKOWSKI das Paradoxon die „erste CANTORsche Antinomie", während er das zweifellos von Cantor entdeckte Kardinalzahl-Paradoxon die „zweite CANTORsche Antinomie" nennt. In HILBERTs Nachlass fand man allerdings keinen 1896 geschriebenen Brief CANTORs, weshalb PURKERT und ILGAUDS, *Cantor* S. 150f seine Existenz, die erstmals 1904 von JOURDAIN erwähnt wird, bezweifeln. Allerdings gehen auch PURKERT und ILGAUDS davon aus, dass „Cantor die Existenz von Antinomien schon viele Jahre vor den Veröffentlichungen von Burali-Forti und Russell bekannt war" (S. 150). So kann man durchaus vom ersten und zweiten CANTORschen Paradoxon sprechen, dem ich noch ein drittes hinzufügen würde (siehe Fußnote 218 auf S. 95).

501 Vgl. BURALI-FORTI, *Una Questione* § 10 S. 111.

502 Ein Analogon zum Burali-Forti-Paradoxon würde allerdings in der erweiterten Theorie neu zu bedenken sein, wenn man dort einen allgemeineren Wohlordnungsbegriff *ohne die Abschnittsbedingung* aufstellt. Bezüglich eines solchen Wohlordnungsbegriffs müsste man sinnvollerweise verallgemeinerte Ordinalzahlen *größer als* Ω zulassen. Dann scheint aber einerseits *jede* verallgemeinerte Ordinalzahl einen Nachfolger zu haben und andererseits dennoch die Kollektion *aller* (verallgemeinerten) Ordinalzahlen das Maximum zu sein. Ich sehe mindestens zwei Möglichkeiten, diesem Paradoxon zu entgehen. Erstens könnte die genannte allumfassende Ordinalzahlkollektion widersprüchlich sein, also schlechthin „nicht existieren". Doch halte ich das nicht für sehr plausibel, da diese Kollektion einem relativ einfachen Begriff entspricht. Die zweite Möglichkeit wäre, dass die Kollektion K aller verallgemeinerten Ordinalzahlen Element von sich selbst ist: $K \in K$ würde dann aber bedeuten, dass man $<$ nicht mehr sinnvoll auf K ausdehnen könnte, ohne $K < K$ zu behaupten und dadurch den Ordnungscharakter von $<$ zu zerstören. Die Ordnung der Ordinalzahlen besäße also kein Maximum im eigentlichen Sinn, und die Überzeugung, es müsse ein solches geben, würde auf einer Täuschung unserer (hier nicht sehr klaren) logischen Intuition beruhen.

beweisen. Bereits CANTOR hatte diesen als ein „grundlegende[s] und folgenreiche[s], durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige[s] Denkgesetz“ bezeichnet,[503] einen Beweis dafür aber nie vorgelegt. Der Satz konnte erst 1904 durch Ernst ZERMELO mit Hilfe des von ihm aufgestellten „Auswahlaxioms“ bewiesen werden.[504]

5.14.18 Wohlordnungssatz *Über jeder beliebigen Menge existiert eine Wohlordnung.*

Beweis. Anstelle der gewöhnlich sehr langen Beweise des Wohlordnungssatzes kann hier aufgrund der schon bereitgestellten Ergebnisse ein äußerst kurzer geführt werden. Ist M eine Menge, so gibt es nach Theorem 5.14.16 eine Ordinalzahl μ, die mit M gleichmächtig ist. Nun ist die Kleinerrelation für Ordinalzahlen eine Wohlordnung über μ, und so muss es nach Theorem 5.13.38 S. 188 auch eine Wohlordnung über M geben. □ Eine anschauliche Konsequenz dieses Satzes ist, dass man sich die Elemente einer Menge stets in einem Ordnungsdiagramm als Punkte auf einer Linie denken kann. Freilich kann diese „Linie“ so groß sein, dass sie in einem einzigen Anschauungsraum nicht mehr untergebracht werden kann; sie muss sich also gegebenenfalls durch mehrere unendlich große Räume ziehen. Ob der Wohlordnungssatz auch für *Un*mengen gilt, ist eine offene Frage. VON NEUMANN beweist den Wohlordnungssatz zwar allgemein für beliebige Klassen,[505] doch sein Beweis *steht und fällt* mit der NEUMANNschen Vermutung: dem Posutulat, das alle Unmengen gleichmächtig sind:[506]

5.14.19 Theorem *Die Behauptung, dass über jeder Unmenge eine Wohlordnung existiert, ist äquivalent mit der Behauptung, dass alle Unmengen gleichmächtig sind.*

Beweis. Wenn alle Unmengen gleichmächtig sind, so sind auch alle mit der Unmenge $\mathtt{On}$ gleichmächtig, über der es eine Wohlordnung gibt; also gibt es dann wegen Theorem 5.13.38 auch über jeder Unmenge eine solche. Wenn aber nicht alle Unmengen gleichmächtig sind, gibt es mindestens eine Unmenge U, die *nicht* mit $\mathtt{On}$ gleichmächtig ist, und über einem solchen U kann es wegen Theorem 5.14.14 keine Wohlordnung geben.[507] □

Wenn also die NEUMANNsche Vermutung nicht zutrifft, gilt der Wohlordnungssatz nicht für alle Unmengen. Dann könnte man noch fragen, ob es über allen Unmengen wenigstens eine „wohlordnungsähnliche“ Relation gibt, welche die Eigenschaften einer Wohlordnung *mit Ausnahme der Abschnittsbedingung* besitzt – die Antwort ist jedoch bis heute unbekannt.[508]

Kommen wir nun zum ZORNschen Lemma, das von 1922 von Casimir KURATOWSKI angegeben und 1935 von Max ZORN wieder entdeckt wurde:[509]

---

503 CANTOR, *Punktmannigfaltigkeiten* Nr. 5 § 3, Ausgabe Zermelo S. 169.

504 Vgl. ZERMELO, *Beweis*; einen weiteren Beweis veröffentlichte ZERMELO im Jahre 1908 (ZERMELO, *Neuer Beweis*). Zum Auswahlaxiom siehe Abschnitt 5.11.

505 NEUMANN, *Die Axiomatisierung* Sätze 54 und 55.

506 Siehe S. 172.

507 Wäre nämlich $<$ eine Wohlordnung über U, so wäre $\langle U, < \rangle$ nach Theorem 5.14.14 mit $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ isomorph, und der entsprechende Isomorphismus wäre eine Bijektion von U in $\mathtt{On}$. Also wären $\mathtt{On}$ und U gleichmächtig.

508 Versucht man, die klassischen Beweise für das ZORNsche Lemma und den Wohlordnungssatz (etwa bei HALMOS, *Set Theory* S. 81–89) von Mengen auf allgemeine Klassen zu verallgemeinern, so liegt das eigentliche Problem nicht darin, dass man ein stärkeres Auswahlaxiom als das klassische braucht (denn wir haben ja das maximale Auswahlaxiom 5.11.8 plausibel gemacht), sondern dass zugleich eine verallgemeinerte Potenzklasse $\mathcal{P}(U)$ im Sinne einer „Klasse aller Teilklassen“ (und nicht nur aller Teilmengen) von U benötigt wird. Ein solches $\mathcal{P}(U)$ wäre aber im Fall, dass U eine Unmenge ist, *keine Klasse der elementaren Theorie* mehr, sondern eine konzeptionelle Klasse, deren Existenz im allgemeinen Fall nicht ohne weiteres als gegeben angenommen werden kann. Ohne tieferes Eindringen in die *erweitere Theorie* scheint also eine weitere Klärung dieser und ähnlicher Fragen nicht möglich zu sein.

509 Vgl. KURATOWSKI, *Méthode* S. 89 und ZORN, *Transfinite algebra*.

5.14.20 ZORN**sches Lemma** Sei $\sqsubset$ Halbordnung über einer Menge M. *Hat dann jede $\sqsubset$-Kette, die Teilklasse von M ist, in M eine obere Schranke, so besitzt M ein $\sqsubset$-maximales Element.* Zusatz: *Die Behauptung bleibt wahr, wenn man „obere Schranke“ durch „untere Schranke“ und zugleich „maximales Element“ durch „minimales Element“ ersetzt.*

Beweis. Ein strenger Beweis ist im Anhang S. 408–409 ausgeführt. Die folgende Bemerkung beinhaltet außerdem eine Plausibilitätsbetrachtung für das Lemma. □

Bemerkung. Die Bedeutsamkeit dieses Satzes für Unendlichkeitsfragen wird deutlich, wenn man versucht, das Lemma zu widerlegen. Man nehme an, dass M die Voraussetzungen des ZORNschen Lemmas erfüllt und überlege, wie die Menge M beschaffen sein müsste, wenn sie *kein* maximales Element hätte. Zunächst liegt mindestens ein Element m in M (denn $\emptyset$ ist eine Kette und Teilklasse von M, hat also eine obere Schranke m in M). Zu m muss es ein größeres Element m' geben (sonst wäre m maximales Element), zu m' muss es ebenfalls ein größeres Element m'' geben (sonst wäre m' maximales Element) usw. Die unendliche Reihe $m, m', m'', \ldots$ ist eine Kette, die Teilklasse von M ist. Auch sie besitzt also eine obere Schranke s, die größer als alle Elemente der Kette ist. Zu s muss es wieder ein größeres Element s' geben, und so beginnt eine zweite unendliche Reihe usw. Nun gibt es zwei Alternativen: (1) entweder kann man immer so weitermachen oder (2) man gelangt irgendwann zu einem Element ω, zu dem es kein größeres gibt. Hat nun M kein maximales Element, trifft Alternative (1) zu, und M muss dann offenbar unvorstellbar groß, also eine Unmenge sein. Da M aber nach Voraussetzung eine Menge ist, hat M ein maximales Element. – Diese Überlegung ist kein strenger Beweis, macht aber das Lemma gewissermaßen „anschaulich plausibel“. Zugleich zeigt sie, *dass eine Ausdehnung des* ZORN*schen Lemmas auf Unmengen problematisch ist.* Wäre nämlich M eine Unmenge, so ist es (wenigstens für mich) vollkommen undurchsichtig, ob Alternative (1) auch jetzt ausgeschlossen ist oder tatsächlich eine Möglichkeit beschreibt. Da sich auch die bekannten Beweise für das ZORNsche Lemma nicht einfach auf diesen Fall übertragen lassen,[510] gehört die Frage der Erweiterbarkeit des ZORNschen Lemmas auf Unmengen zu den ungelösten Problemen.

Erwähnenswert ist noch, dass Wohlordnungssatz und ZORNsches Lemma zum (klassischen) Auswahlaxiom äquivalent sind: Zum einen genügt das klassische Auswahlaxiom, um diese Sätze zu beweisen,[511] und zum anderen lässt sich das klassische Auswahlaxiom herleiten, wenn man statt seiner den Wohlordnungssatz oder das ZORNsche Lemma voraussetzt.[512]

Mit den nun hinreichend erläuterten ordnungstheoretischen Grundlagen soll im folgenden Abschnitt die Untersuchung über das Klassenuniversum fortgesetzt werden.

---

[510] Man begegnet hier den gleichen Schwierigkeiten, die auch beim Versuch auftreten, den Wohlordnungssatz auf Unmengen zu übertragen (vgl. Fußnote 508).

[511] Im Beweis des ZORNschen Lemmas und des für den Wohlordnungssatz entscheidenden Theorems 5.14.16 habe ich zwar den Operator $\boldsymbol{\varepsilon}$ (also das *maximale* Auswahlaxiom 5.11.8) verwendet, aber man kann $\boldsymbol{\varepsilon}$ dort durch eine Auswahlfunktion von $\mathcal{P}(M)\setminus\{\emptyset\}$ ersetzen, deren Existenz das klassische Auswahlaxiom garantiert (5.11.4 S. 153).

[512] Ist $\mathfrak{M}$ eine Mengenklasse nichtleerer Mengen, folgt sowohl aus dem Wohlordnungssatz wie auch aus dem ZORNschen Lemma, dass eine Auswahlfunktion von $\mathfrak{M}$ existiert.
(1) Beweis aus dem Wohlordnungssatz: Nach diesem Satz existiert eine Wohlordnung $<$ über der Menge $\bigcup\mathfrak{M}$, und die Funktion f, die jedes M aus $\mathfrak{M}$ auf das kleinste Element von M (das $<$-Minimum von M) wirft (beachte, dass die Elemente von M in $\bigcup\mathfrak{M}$ liegen), ist eine Auswahlfunktion von $\mathfrak{M}$.
(2) Beweis aus dem ZORNschen Lemma: Sei $\mathfrak{F}$ die Klasse der Funktionen f mit $\mathtt{Db}(f) \subseteq \mathfrak{M}$ und der Eigenschaft $f(x) \in x$ für alle x aus $\mathtt{Db}(f)$. Diese Funktionenklasse ist Teilklasse der Menge $\mathcal{P}(\mathfrak{M} \times \bigcup\mathfrak{M})$ und daher eine Menge. Ferner ist die Relation $\sqsubset$, die ein f aus $\mathfrak{F}$ genau dann auf ein g von $\mathfrak{F}$ ausrichtet, wenn f echte Teilklasse von g ist, eine Halbordnung über $\mathfrak{F}$, und bezüglich $\sqsubset$ hat jede Kette $\mathfrak{K}$ eine obere Schranke: nämlich die Funktion $\bigcup\mathfrak{K}$. Nach dem ZORNschen Lemma besitzt also $\mathfrak{F}$ ein maximales Element f_{max}. Ein solches f_{max} muss aber als Definitionsbereich ganz $\mathfrak{M}$ haben (andernfalls gäbe es eine Menge M aus $\mathfrak{M}$, die nicht im Definitionsbereich von f liegt, und dann wäre für jedes x aus M die Funktion $f_x := f \cup \{\langle M, x\rangle\}$ bezüglich $\sqsubset$ größer als f), also wirft f_{max} jede Menge M aus $\mathfrak{M}$ auf ein Element von M und ist eine Auswahlfunktion von $\mathfrak{M}$.

5.15 Größenvergleich von Klassen

Um festzustellen, ob zwei Klassen „gleich viele“ Elemente haben, haben wir auf S. 164 die „Partner-Methode“ betrachtet: Man versucht, für jedes Element von A genau einen Partner aus B zu finden, derart dass jedes Element von B Partner *nur eines einzigen* Elements von A ist. Mathematisch gesprochen versucht man also, eine Bijektion von A in B zu bilden. Gibt es eine solche, heißen die Klassen „gleichmächtig“. Andernfalls kann es immer noch sein, dass es (a) eine Injektion von A in B gibt oder (b) eine Injektion von B in A. Im ersten Fall kann man für jedes Element von A zwar einen Partner finden, jedoch nur so, dass in B noch „alleinstehende“ Elemente übrig bleiben. Das ist offenbar ein Anzeichen dafür, dass die Klasse A in gewissem Sinn „kleiner“ als die Klasse B sein muss. Im zweiten Fall ist es genau umgekehrt, also B „größer“ als A. Bemerkenswert an diesem Größenvergleich ist, dass man ihn unabhängig davon durchführen kann, ob die beiden Klassen (in irgendeiner Weise) „zählbar“ oder möglicherweise „unzählbar“ sind; das liegt daran, dass bei diesem Größenvergleich gar nicht gezählt, sondern nur gegenübergestellt wird. Diese Überlegungen motivieren nun folgende Definition:

5.15.1 Definition Für Klassen A und B definieren wir:

$A \sim B$ [Lesart: A ist *gleichmächtig* mit B] $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Bijektion von A in B.
$A \prec B$ [Lesart: A ist *schmächtiger* als B] $:\Leftrightarrow$ es gibt keine Bijektion von A in B, aber eine Injektion A in B.
$A \succ B$ [Lesart: A ist *mächtiger* als B] $:\Leftrightarrow$ es gibt keine Bijektion von A in B, aber eine Injektion B in A.

Gleichbedeutend mit der Aussage, dass A mächtiger bzw. schmächtiger als B ist, sagen wir: A hat „mehr“ bzw. „weniger“ Elemente als B. Weiter kürzen wir ab:

$A \precsim B$ [Lesart: A ist schmächtiger als oder gleichmächtig mit B] $:\Leftrightarrow$ $A \prec B$ oder $A \sim B$

$A \succsim B$ [Lesart: A ist mächtiger als oder gleichmächtig mit B] $:\Leftrightarrow$ $A \succ B$ oder $A \sim B$

$\prec, \succ, \precsim$ und $\succsim$ sind in der erweiterten Theorie konzeptionelle Relationen, zu deren Vor– und Nachbereich Mengen und Unmengen gehören. – Es ergeben sich nun aus den Definitionen zunächst folgende Sätze, die ganz den Erwartungen an eine Größenrelation entsprechen:

5.15.2 Theorem

$$A \prec B \;\Leftrightarrow\; B \succ A. \tag{5.84}$$
$$A \precsim B \;\Leftrightarrow\; B \succsim A. \tag{5.85}$$

Für jede nichtleere Klasse A gilt $\emptyset \prec A$. (5.86)

Für jede Klasse A gilt $\emptyset \precsim A \precsim \mathbb{D}$. (5.87)

$A \prec B \;\Leftrightarrow\;$ *es gilt $A \precsim B$ und* nicht $A \sim B$. (5.88)

Wenn $A \subseteq B$, so ist $A \precsim B$. (5.89)

Beweis. Siehe Anhang S. 409–410. □ Manchmal benötigt man die folgende „relationstheoretische“ Charakterisierung der Größenrelationen $\precsim$ und $\succsim$:

5.15.3 Theorem

$A \precsim B \;\Leftrightarrow\;$ *es gibt eine Funktion f, so dass $A \xrightarrow[\text{INJ}]{f} B$.* (5.90)

$A \succsim B \;\Leftrightarrow\;$ *es gibt eine Funktion f, so dass $A \xrightarrow[\text{SRJ}]{f} B$, oder es ist $B = \emptyset$.* (5.91)

Beweis. Siehe Anhang S. 410. □ Hat man einen wahren Sachverhalt über Größenverhältnisse, und ersetzt hierin gewisse Objekte durch andere „gleich große“, müsste man wieder einen wahren Sachverhalt bekommen. Dies bestätigt das folgende Theorem:

5.15.4 Theorem *Ist $A \precsim B$ oder $A \prec B$ wahr, erhält man wieder eine wahre Aussage, wenn man A oder B durch eine gleichmächtige Klasse A^* bzw. B^* ersetzt.*

Beweis. Siehe Anhang S. 410–411. □ Wenn eine Klasse A «gleich viele oder weniger Elemente als B» hat, also $A \precsim B$ gilt, und *zugleich* auch B «gleich viele oder weniger Elemente als A», also $B \precsim A$ gilt, so scheint nur übrig zu bleiben, dass dann A und B «gleich viele Elemente» haben müssen, also $A \sim B$ gilt. Obgleich dies „anschaulich klar“ zu sein scheint, benötigen wir doch einen Beweis aus den Definitionen, vor allem dann, wenn wir unsere Begriffe auch im Bereich der unendlichen Klassen anwenden wollen, wo die unmittelbare Anschauung versagt. Der Beweis des genannten Theorems erwies sich angesichts der Anschaulichkeit des Sachverhalts als erstaunlich kompliziert. Er wurde 1897 von Felix Bernstein erbracht, weshalb man vom „Bernsteinschen Mächtigkeitstheorem“ spricht:[513]

5.15.5 Bernsteins Mächtigkeitstheorem *Aus $A \precsim B$ und $B \precsim A$ folgt $A \sim B$.*

Beweis. Im Anhang S. 411–412 ist ein relativ einfacher Beweis ausgeführt, der auf dem sog. Fixpunktsatz von Tarski basiert, der dort ebenfalls bewiesen wird. □ Man stellt sich Unmengen „größer“ vor als Mengen. Das folgende Theorem bestätigt, dass dies im Sinn unserer exakt definierten Größenrelationen tatsächlich zutrifft:

5.15.6 Theorem

Ist M Menge,	*und $C \prec M$, $C \sim M$ oder $C \precsim M$,*	*so ist C Menge.*	(5.92)
Ist U Unmenge,	*und $U \prec C$, $U \sim C$ oder $U \precsim C$,*	*so ist C Unmenge.*	(5.93)
Ist U Unmenge,	*und M Menge,*	*so ist $M \prec U$.*	(5.94)

Beweis. Siehe Anhang S. 412–413. □ Nun wird man sich $\prec$ der Anschauung gemäß als Ordnungsrelation vorstellen. Auch dies lässt sich bestätigen und präzisieren:

5.15.7 Theorem *Für Klassen A, B, C gilt:*

$A \precsim A$ ist wahr (Reflexivität) *und aus $A \precsim B \precsim C$ folgt $A \precsim C$* (Transitivität). (5.95)

$A \prec A$ ist falsch (Irreflexivität) *und aus $A \prec B \prec C$ folgt $A \prec C$* (Transitivität). (5.96)

Gilt $A \precsim B \prec C$ oder $A \prec B \precsim C$, so gilt auch $A \prec C$ (gemischte Transitivität). (5.97)

Weiter ergeben sich folgende Vergleichbarkeitsaussagen:

Es gilt höchstens eine der drei Aussagen $A \prec B$ oder $B \succ B$ oder $A \sim B$. (5.98)

Sind A, B Mengen, gilt mindestens eine der Aussagen $A \precsim B$ oder $A \succsim B$. (5.99)

Sind A, B Mengen, gilt genau eine der Aussagen $A \prec B$ oder $A \succ B$ oder $A \sim B$. (5.100)

Zwischen der Kleinerrelation $<$ für Ordinalzahlen und $\prec$ besteht folgende Beziehung:

Für Ordinalzahlen α und β mit $\alpha \prec \beta$ gilt stets $\alpha < \beta$. (5.101)

[513] Über die historischen Hintergründe und den Anteil von Cantor und Schrödinger an diesem Satz siehe Potter, *Sets* Theorem 5.1.2. S. 99.

Beweis. Siehe Anhang S. 413–414. Bemerkenswert ist, dass der Beweis dieser einfach erscheinenden Sachverhalte anspruchsvolle Hilfsmittel benötigt: Die Transitivität wird mit Hilfe des Bernsteinschen Theorems und die Vergleichbarkeit mit dem Wohlordnungssatz bewiesen. □

Bemerkung. Die Vergleichbarkeitsaussagen stellen sicher, dass alle Mengen hinsichtlich ihrer Größe vergleichbar sind. Wäre Satz 5.99 falsch, so müsste es Mengen geben, die nicht gleich viele Elemente hätten, und von denen dennoch die eine weder größer noch kleiner als die anderen wäre. Dann aber würde entweder unsere Anschauung von Größe oder diejenige einer Menge einer erheblichen Korrektur bedürfen.

Für Unmengen kommen wir im allgemeinen Fall allerdings nicht ohne weiteres über Satz 5.98 hinaus, denn der Beweis der fundamentalen Vergleichbarkeitsaussage (Satz 5.99) benutzt den Wohlordnungssatz 5.14.18, den wir nur *für Mengen* beweisen konnten. Daher ist eine unmittelbare Übertragung von Satz 5.99 und des davon abhängigen Satzes 5.100 auf Unmengen nicht möglich. Für den Fall, dass *nur eine* der Mengen A und B eine Unmenge U und die andere eine Menge M ist, ist allerdings schon wegen Satz 5.94 klar, dass $M \prec U$ (also erst recht $M \precsim U$) gilt, so dass die Sätze 5.99 und 5.100 auch in diesem Fall ihre Gültigkeit behalten. Fragwürdig wird die Sachlage aber, wenn A und B *zwei Unmengen* sind. Solange die NEUMANNsche Vermutung nicht bewiesen ist, dass alle Unmengen gleichmächtig sind,[514] können wir also nicht ausschließen, dass Unmengen U, V existieren, die „miteinander der Größe nach unvergleichlich“ sind, so dass also weder $U \precsim V$ noch $V \precsim U$ richtig wäre. Andererseits könnte natürlich die allgemeine Vergleichbarkeit von Klassen auch dann gelten, wenn die NEUMANNschen Vermutung falsch ist, und nach meiner Auffassung entspricht es tatsächlich unserer Intuition, alle Klassen größenmäßig für vergleichbar zu halten. Sicher ist aber, dass alle Klassen C größenmäßig zwischen $\emptyset$ und $\mathbb{D}$ liegen (siehe 5.87 S. 200), dass es sich bei der leeren Klasse sowie bei den ein– und zweielementigen Klassen um die „kleinsten“ Klassen handelt, und dass die mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen Unmengen die „größten“ Klassen sind:

5.15.8 Theorem Sei $C_1 = \{a\}$ eine einelementige, $C_2 = \{b, c\}$ eine zweielementige und C_3 eine Klasse, die mehr als zwei Elemente besitzt. Dann gilt:

$$\emptyset \prec C_1 \prec C_2 \prec C_3. \tag{5.102}$$

Es gibt keine „Zwischenklasse“ Z mit $\emptyset \prec Z \prec C_1$ oder $C_1 \prec Z \prec C_2$. (5.103)

$\emptyset$ ist das $\prec$-Minimum und die mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen Klassen sind $\prec$-maximal. (5.104)

Beweis. Siehe Anhang S. 414. □ Da für gleichmächtige Klassen (also zum Beispiel zwei ein– oder zwei zweielementige Klassen)[515] A und B wegen Satz 5.98 weder $A \prec B$ noch $B \prec A$ gilt, dürfen diese in einem Ordnungsdiagramm von $\prec$ nicht auf von links nach rechts gehenden Wegen verbunden sein; man stellt sie also am besten übereinander, und so bekommt das Ordnungsdiagramm der Halbordnung $\prec$ folgende Gestalt:

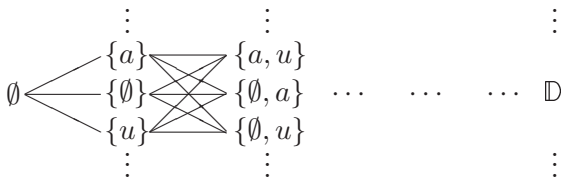


Abbildung 5.16: Ordnungsdiagramm von $\prec$

[514] Siehe S. 172. Diese Vermutung würde die Frage natürlich sofort entscheiden. Denn dann wäre für zwei Unmengen A und B stets $A \sim B$ und erst recht $A \precsim B$, und so wären die Sätze 5.99 und 5.100 (wenn man noch 5.94 berücksichtigt) für beliebige Klassen A und B bewiesen.

[515] Vgl. Theorem 5.12.9 S. 166.

Außer $\emptyset$ und $\mathbb{D}$ spielt auch die Klasse $\mathtt{On}$ für die Ordnungsrelation $\prec$ eine fundamentale Rolle:

5.15.9 Theorem

Ist M eine Menge und U eine Unmenge, so gilt $M \prec \mathtt{On} \precsim U$. (5.105)

Gilt umgekehrt $C \prec \mathtt{On}$ bzw. $\mathtt{On} \precsim C$, so ist C eine Menge bzw. eine Unmenge. (5.106)

Beweis. Siehe Anhang S. 414. □ Anschaulich bedeutet dies, dass die Unmenge $\mathtt{On}$ „an der Grenze zwischen Mengen und Unmengen“ liegt:

5.15.10 Korollar *C ist genau dann Menge, wenn $C \prec \mathtt{On}$, und genau dann Unmenge, wenn $\mathtt{On} \precsim C \precsim \mathbb{D}$.* Zusatz: *Dies bleibt wahr, wenn man $\mathtt{On}$ durch eine gleichmächtige Klasse ersetzt.*

Beweis. Ist C eine Menge, so gilt $C \prec \mathtt{On}$ (Satz 5.105). Ist $C \prec \mathtt{On}$, so ist C eine Menge (Satz 5.106). Ist C eine Unmenge, gilt $\mathtt{On} \precsim C$ (Satz 5.105) und $C \precsim \mathbb{D}$ (Satz 5.87), also $\mathtt{On} \precsim C \precsim \mathbb{D}$. Ist $\mathtt{On} \precsim C \precsim \mathbb{D}$, so ist C eine Unmenge (Satz 5.106). Der Zusatz folgt nun unmittelbar mittels Theorem 5.15.4. □ Aus diesem Korollar ergibt sich für die NEUMANNsche Vermutung, dass alle Unmengen gleichmächtig sind, folgendes Kriterium:

5.15.11 Korollar *Die* NEUMANN*sche Vermutung ist genau dann wahr, wenn $\mathtt{On} \sim \mathbb{D}$ ist.*

Beweis. Ist die Vermutung wahr, gilt $\mathtt{On} \sim \mathbb{D}$, weil $\mathtt{On}$ und $\mathbb{D}$ Unmengen sind. Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass $\mathtt{On} \sim \mathbb{D}$ ist, so kann man in der nach Korollar 5.15.10 für alle Unmengen U gültigen Beziehung $\mathtt{On} \precsim U \precsim \mathbb{D}$ wegen Theorem 5.15.4 das $\mathtt{On}$ durch das gleichmächtige $\mathbb{D}$ ersetzen und erhält $\mathbb{D} \precsim U \precsim \mathbb{D}$, woraus mit dem Bernsteinschen Theorem 5.15.5 folgt, dass $U \sim \mathbb{D}$. Also sind dann alle Unmengen mit $\mathbb{D}$ und folglich auch miteinander gleichmächtig. □

Für die Theorie der Unmengen ist nun das folgende Theorem sehr aufschlussreich: Eine Unmenge ist nicht nur größer als jede Menge, sondern so groß, dass das Wegnehmen oder Hinzufügen einer Menge ihre Größe nicht verändert, so dass die Menge im Vergleich zur Unmenge als ein quantitatives „Nichts“ anzusehen ist.

5.15.12 Theorem *Ist U Unmenge und M Menge, so gilt $U \sim (U \cup M)$ und $U \sim (U \setminus M)$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 415–416. □ Ein analoges Verhältnis herrscht zwischen unendlichen und endlichen Klassen, wie wir später sehen werden.[516] Zu beachten ist, dass $U \setminus M$ für nichtleeres M eine *echte Teilklasse* von U ist und dann trotzdem mit U gleichmächtig ist. Die Gleichmächtigkeit einer Klasse mit einer ihrer echten Teilklassen ist, wie wir in Abschnitt 5.17 sehen werden, *ein Charakteristikum für die Unendlichkeit*, weshalb aufgrund des obigen Satzes Unmengen unsere ersten Beispiele für unendliche Klassen sind. Als Korollar folgt nun:

5.15.13 Korollar *Alle Komplemente $\complement M$ von Mengen M sind mit $\mathbb{D}$ gleichmächtig, und daher sind diese Komplemente auch untereinander gleichmächtige Unmengen.*

Beweis. Da $\mathbb{D}$ eine Unmenge ist, folgt aus dem vorhergehenden Theorem die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{D}$ mit $\mathbb{D} \setminus M$, was mit $\complement M$ identisch ist. □

Bemerkung. Das Komplement $\complement M$ einer Menge M ist die Klasse der „Außenindividuen“ dieser Menge. Das Korollar besagt also, dass *jede beliebige Menge so viele Außenindividuen hat, dass die Klasse ihrer Außenindividuen eine Unmenge ist*, die sogar zu der allergrößten (mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen) Unmengen gehört. Eine weitere Folgerung ist:

[516] Vgl. Theorem 5.20.8 S. 259 und vgl. auch die Korollare 5.20.10 und 5.20.11.

5.15.14 Korollar *Sei M_1 eine beliebige Menge, so gibt eine Menge M_2, so dass M_1 und M_2 gleichmächtig sind und kein gemeinsames Element haben.*

Beweis. $\complement M_1$ ist nach Korollar 5.15.13 mit $\mathbb{D}$ gleichmächtig, also gibt es eine Bijektion f von $\mathbb{D}$ in $\complement M_1$. Die Einschränkung von f auf M_1 ist dann eine Bijektion von M_1 in die Teilklasse $M_2 := \mathtt{Wb}(f)$ von $\complement M_1$. Dieses M_2 ist daher mit M_1 gleichmächtig und kann (als Teilklasse von $\complement M_2$) nur Außenindividuen von M_1 enthalten. □

Mit Hilfe der Relation $\prec$ zwischen Klassen kann nun *eine entsprechende Größenrelation für Klassenstufen* eingeführt werden. Man betrachte hierzu Klassenstufen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (vgl. Definition 5.12.14), auf $\mathfrak{A}$ liegenden Klassen A_1 und A_2, und auf $\mathfrak{B}$ liegenden Klasse B_1 und B_2. Da A_1 und A_2 auf derselben Stufe liegen, sind sie gleichmächtig, und ebenso sind B_1 und B_2 gleichmächtig. Wenn dann $A_1 \prec B_1$ gilt, können wir in dieser Aussage gemäß Theorem 5.15.4 das A_1 durch das gleichmächtige A_2 und das B_1 durch das gleichmächtige B_2 ersetzen und erhalten $A_2 \prec B_2$. Damit ist also bewiesen:

Liegen A_1, A_2 und B_1, B_2 jeweils auf derselben Klassenstufe,
so folgt aus $A_1 \prec B_1$, dass auch $A_2 \prec B_2$. (5.107)

Wann immer also *eine* Klasse der Klassenstufe $\mathfrak{A}$ kleiner als *eine* Klasse der Klassenstufe $\mathfrak{B}$ ist, ist *jede beliebige* Klasse aus $\mathfrak{A}$ kleiner als *jede* Klasse aus $\mathfrak{B}$, und dann kann man dann sinnvollerweise sagen, dass *die* FREGE*sche Zahl oder Klassenstufe* $\mathfrak{A}$ *selbst kleiner ist als die* FREGE*sche Zahl oder Klassenstufe* $\mathfrak{B}$. Demgemäß führen wir eine Relation $<_{Fr}$ zwischen Klassenstufen wie folgt ein:

5.15.15 Definition (teilweise für die erweiterte Theorie) Für Mengenstufen (in der *erweiterten Theorie* allgemeiner: für Klassenstufen) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sei

$\mathfrak{A} <_{Fr} \mathfrak{B}$ [Lesart: $\mathfrak{A}$ ist (*Frege-*)*kleiner* als $\mathfrak{B}$, oder: $\mathfrak{A}$ *liegt tiefer* als $\mathfrak{B}$]

genau dann wahr, wenn $A \prec B$ für eine (und daher nach 5.107 für jede) Klasse A aus $\mathfrak{A}$ und eine (und daher nach 5.107 jede) Klasse B aus $\mathfrak{B}$ gilt.[517]

Da nach Satz 5.46 S. 170 eine Klasse A stets Element von „ihrer“ Klassenstufe $\llbracket A \rrbracket$ ist, folgt nun aus obiger Definition sofort:

$\llbracket A \rrbracket <_{Fr} \llbracket B \rrbracket$ gilt genau dann, wenn $A \prec B$. (5.108)

$<_{Fr}$ (wofür wir, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, auch $<$ schreiben) ist eine konzeptionelle Relation der *erweiterten Theorie*, deren Feldobjekte Klassenstufen sind. Gilt für die Umkehrrelation $>_{Fr}$, dass $\mathfrak{B} >_{Fr} \mathfrak{A}$, sagen wir auch: $\mathfrak{B}$ *liegt höher* als $\mathfrak{A}$ und wollen uns die Klassenstufe $\mathfrak{B}$ dann als *oberhalb* von $\mathfrak{A}$ liegend vorstellen. Damit dies möglich ist, muss $<$ eine Ordnungsrelation sein. Dies ist tatsächlich der Fall:

5.15.16 Fundamentale Ordnungseigenschaften von $<_{Fr}$
$<$ ist eine Halbordnung, die über Mengenstufen eine Vollordnung ist, d. h. wann immer $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Klassenstufen und $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ Mengenstufen sind, gilt Folgendes:

$\mathfrak{A} < \mathfrak{A}$ *ist falsch, aus* $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C}$ *folgt* $\mathfrak{A} < \mathfrak{C}$, (5.109)

es gilt $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ *oder* $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ *oder* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, (5.110)

und für Klassen A und B gilt $\llbracket A \rrbracket \leq_{Fr} \llbracket B \rrbracket$ *genau dann, wenn* $A \precsim B$. (5.111)

[517] Formal: $\mathfrak{A} <_{Fr} \mathfrak{B} \;:\Leftrightarrow\; \bigvee_{A \in \mathfrak{A}} \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} A \prec B$.

Beweis. Siehe Anhang S. 416. □ Fundamental für $<_{Fr}$ ist auch folgende Eigenschaft:

5.15.17 Theorem Jede Mengenstufe $\mathfrak{M}$, die noch mindestens eine Mengenstufe über sich hat, besitzt einen *unmittelbaren Nachfolger*, d. h. es gibt eine Klassenstufe $\mathfrak{M}^+$, für die $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}^+$ gilt, ohne dass es eine Zwischenstufe $\mathfrak{Z}$ gäbe mit $\mathfrak{M} < \mathfrak{Z} < \mathfrak{M}^+$, und dieses $\mathfrak{M}^+$ ist eine Mengenstufe. Gemäß Theorem 5.13.16 S. 178 gibt es dann *nur einen* unmittelbaren Nachfolger.

Beweis. Siehe Anhang S. 416–417. □ Wir werden später sehen, dass es zu *jeder* Mengenstufe eine höhere Mengenstufe gibt, so dass wir die Bedingung «die noch mindestens eine Mengenstufe über sich hat» fallen lassen können (siehe Korollar 5.20.23 S. 264). Ein dem Theorem 5.15.17 entsprechender Satz für Vorgänger ist falsch: Nicht jede Mengenstufe, die einen Vorgänger hat, muss auch einen *unmittelbaren* Vorgänger haben (siehe Bemerkung nach Korollar 5.20.23 S. 264). Nun lassen sich auch die Sätze 5.15.6, 5.15.8, 5.15.9 und 5.15.10 über $\prec$ und $\precsim$ auf analoge Theoreme über $<_{Fr}$ und $\leq_{Fr}$ umschreiben. Bevor wir dies tun (Theorem 5.15.22) betrachten wir die beiden Unmengenstufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ (das ist $\llbracket\mathtt{On}\rrbracket$) und $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ etwas näher und führen ein weiteres Axiom ein.

5.15.18 Definition Die mit Ω gleichmächtigen (auf $\llbracket\Omega\rrbracket$ liegenden) Unmengen sollen *wohlordnungstragende Unmengen* und die mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen (auf $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ liegenden) Unmengen sollen *Maximalklassen* heißen.[518] Diese Bezeichnungen sind angemessen, es gilt nämlich:

5.15.19 Theorem *Die mit Ω gleichmächtigen* (auf $\llbracket\Omega\rrbracket$ liegenden) *Klassen sind genau die Unmengen, über denen ein Wohlordnung existiert. Hierzu gehört außer Ω auch $\Omega \times \Omega$.*

Die mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen (auf $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ liegenden) *Klassen sind genau die $\prec$-maximalen Klassen, also diejenigen, zu denen keine relationstheoretisch größere existiert. Hierzu gehören außer $\mathbb{D}$ auch $\mathbb{M}$ und alle* Komplemente von Mengen.

Beweis. Siehe Anhang, S. 417–418. □ Ob $\llbracket\Omega\rrbracket$ und $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ identisch sind, muss offen bleiben.[519] Wie wir später sehen werden, gehören zu den wohlordnungstragenden Unmengen auch weitere bedeutsame Unmengen wie $\mathtt{Cn}$, $\mathbb{V}$, $\mathcal{V}$ und $\mathtt{No}$.[520] Zu den Maximalklassen aber gehört auch die Klasse $\mathbb{U}$ der Urelemente. Dies können wir zwar nicht aus den bisherigen Axiomen ableiten, wohl aber plausibel machen. So stelle ich die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{U}$ mit $\mathbb{D}$ als Axiom auf:

5.15.20 Elftes Axiom der Mengenlehre: Axiom für Urelemente $\mathbb{U} \sim \mathbb{D}$.

Plausibilitätsbetrachtung. Wie auf S. 87–88 in den Vorüberlegungen zu Satz 5.2 S. 88 plausibel gemacht wurde, existiert zu jeder Menge M ein gewisses Urelement M^*, derart dass für verschiedene Mengen M, N stets $M^* \neq N^*$ ist. Für die nach dem Komprehensionstheorem 5.10.55 S. 140 existierende Funktion f, die jede Menge M auf M^* wirft, gilt daher, dass sie verschiedene Argumente stets auf verschiedene Werte wirft, also eine Injektion ist. Also gilt $\mathbb{M} \precsim \mathbb{U}$. In dieser Aussage können wir gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 die Menge $\mathbb{M}$ durch $\mathbb{D}$ ersetzen (weil $\mathbb{D}$ nach Theorem 5.15.19 mit $\mathbb{M}$ gleichmächtig ist) und erhalten $\mathbb{D} \precsim \mathbb{U}$. Da andererseits nach Satz 5.87 S. 200 auch $\mathbb{U} \precsim \mathbb{D}$ ist, folgt mit Theorem 5.15.5 S. 201, dass $\mathbb{U} \sim \mathbb{D}$. □

5.15.21 Korollar *$\mathbb{U}$ ist eine Unmenge, und zu jeder Klasse C gibt es eine gleichmächtige Klasse C^* von Urelementen.*

---

[518] Formal: X (ist) wohlordnungstragende Unmenge $:\Leftrightarrow U \sim \Omega$. X (ist) Maximalklasse $:\Leftrightarrow X \sim \mathbb{D}$.

[519] Die Identität beider Stufen ist mit der NEUMANNschen Vermutung äquivalent (siehe hierzu S. 207).

[520] Zu $\mathtt{Cn}$ siehe Korollar 5.30.18 S. 324, zu $\mathbb{V}$ siehe Satz 5.218 S. 309, zu $\mathcal{V}$ Fußnote 711 auf S. 288 und zu $\mathtt{No}$ Fußnote 732 auf S. 295.

Beweis. Da $\mathbb{D}$ eine Unmenge ist und nach dem Axiom für Urelemente $\mathbb{D} \sim \mathbb{U}$ gilt, ist nach Theorem 5.12.10 S. 167 auch $\mathbb{U}$ eine Unmenge.[521] Ferner existiert wegen $\mathbb{D} \sim \mathbb{U}$ eine Injektion f von $\mathbb{D}$ in $\mathbb{U}$, so dass f/C für jede Klasse C eine Bijektion von C in $C^* := \mathtt{Wb}(f/C)$ ist. Daher ist C^* eine mit C gleichmächtige Klasse von Urelementen. □

Bemerkung. Aus dem Axiom für Urelemente werde ich keine weiteren Folgerungen ableiten, so dass alle hier präsentierten Sätze außer Korollar 5.15.21 (und Metatheorem 5.31.11, wo auf das Axiom für Urelemente Bezug genommen wird) auch dann gültig bleiben, wenn man das Axiom weglässt[522] oder als seine Alternative das „Reinheitsaxiom“ $\mathbb{U} = \emptyset$ aufstellt, mit dem Urelemente aus der Mengenlehre ausgeschlossen werden. Unser Axiom ist also *mathematisch* nur wenig ergiebig,[523] aber es drückt ein *ontologisch* bedeutsames Faktum aus, weshalb ich es unter die Axiome der „realistischen“ Mengenlehre aufnehme.

5.15.22 Weitere Ordnungseigenschaften von $<_{Fr}$

Ist $\mathfrak{M}$ Mengenstufe, und $\mathfrak{S} < \mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{S}$ Mengenstufe. (5.112)

Ist $\mathfrak{U}$ Unmengenstufe, und $\mathfrak{U} < \mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}$ Unmengenstufe. (5.113)

Ist $\mathfrak{M}$ Mengen– und $\mathfrak{U}$ Unmengenstufe, so ist $\mathfrak{M} < \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{M} < \llbracket\Omega\rrbracket \leq \mathfrak{U}$. (5.114)

$\llbracket 0\rrbracket$ ist Minimum und $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ Maximum, d. h. für Stufen $\mathfrak{S}$ gilt stets $\llbracket 0\rrbracket \leq \mathfrak{S} \leq \llbracket\mathbb{D}\rrbracket$. (5.115)

$\llbracket 0\rrbracket < \llbracket 1\rrbracket < \llbracket 2\rrbracket$ und $\llbracket 2\rrbracket < \mathfrak{S}$ für jede von $\llbracket 0\rrbracket$, $\llbracket 1\rrbracket$ und $\llbracket 2\rrbracket$ verschiedene Stufe $\mathfrak{S}$.

Es gibt weder ein $\mathfrak{Z}$ mit $\llbracket 0\rrbracket < \mathfrak{Z} < \llbracket 1\rrbracket$ noch ein $\mathfrak{Z}$ mit $\llbracket 1\rrbracket < \mathfrak{Z} < \llbracket 2\rrbracket$. (5.116)

$\mathfrak{S}$ ist Mengenstufe $\leftrightarrow$ $\mathfrak{S} < \llbracket\Omega\rrbracket$. (5.117)

$\mathfrak{S}$ ist Unmengenstufe $\leftrightarrow$ $\llbracket\Omega\rrbracket \leq \mathfrak{S} < \llbracket\mathbb{D}\rrbracket$. (5.118)

Beweis. Mit der Charakterisierung von $<_{Fr}$ und $\leq_{Fr}$ in den Sätzen 5.108 und 5.111 S. 204 folgt
(5.112) aus (5.92),
(5.113) aus (5.93),
(5.114) aus (5.94) und (5.105),
(5.115) aus (5.87),
(5.116) aus (5.102) und (5.103), und schließlich
(5.117) und (5.118) aus Korollar 5.15.10 unter Beachtung von $\Omega = \mathtt{On}$ (Definition 5.14.15 S. 196). □

Da nun $<_{Fr}$ eine Ordnung ist, können wir uns die Klassenstufen der „Größe nach“ von unten nach oben angeordnet denken, wobei nach Satz 5.114 die Unmengenstufen über den Mengenstufen kommen. Wegen Satz 5.115 ist $\llbracket 0\rrbracket$ die tiefste und $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ die höchste Stufe überhaupt, und mit Satz 5.116 haben wir streng bewiesen, dass $\llbracket 0\rrbracket$, $\llbracket 1\rrbracket$ und $\llbracket 2\rrbracket$ die „untersten drei Stufen“ sind, wobei $\llbracket 1\rrbracket$ der unmittelbare Nachfolger von $\llbracket 0\rrbracket$, und $\llbracket 2\rrbracket$ derjenige von $\llbracket 1\rrbracket$ ist, wie wir es bereits auf S. 170 vermutet hatten. Damit zeigt sich auch, dass das Bild, das wir uns vom Anfang der Klassenstufen gemacht hatten (Abbildung 5.15 S. 171), richtig ist: Die unterste Stufe ist $\llbracket 0\rrbracket$, darüber kommt unmittelbar $\llbracket 1\rrbracket$, dann $\llbracket 2\rrbracket$, und alle anderen Stufen liegen höher als diese. Da $<_{Fr}$ im Bereich der

[521] Damit haben wir diese schon in Satz 5.2 S. 88 aus inhaltlichen Erwägungen festgestellte Tatsache auch formal bewiesen.

[522] In der Definition von $\mathbb{R}$ (5.21.24 S. 275) muss man dann allerdings die Bedingung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{U}$ streichen. Außerdem ist in der Definition der Hilfsfunktion F (Fußnote 709 auf S. 288), ich in der Definition 5.23.3 S. 288 der Standard-Räume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}_\alpha$ einsetzen werde, $\ll\mathbb{U}\gg$ durch $\ll\mathbb{M}\gg$ zu ersetzen: Dann haben die Standardräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}_\alpha$ keine Urelemente mehr als Punkte, haben aber ansonsten dieselben Eigenschaften. Zu einer Anwendung des Axioms siehe noch Fußnote 523.

[523] Immerhin geht man bei gewissen Konstruktionen in der Non-Standard Analysis davon aus, dass es zu einer Mengenmenge stets eine gleichmächtige Menge von Urelementen gibt (vgl. Landers und Rogge, *Nichtstandard Analysis* S. 412). Hierfür benötigt man das Axiom für Urelemente bzw. sein Korollar 5.15.21.

Mengenstufen eine Vollordnung ist (Satz 5.110 S. 204), liegen hier die Stufen wirklich übereinander *in einer Reihe*, während es für den Bereich der Unmengenstufen oberhalb von $\llbracket\Omega\rrbracket$ (falls es überhaupt solche gibt) nicht bekannt ist, ob $<_{Fr}$ hier ebenfalls noch eine Vollordnung ist oder bloß noch als Halbordnung gelten kann. Solange dies nicht geklärt ist, müssen wir in diesem Bereich mit mehreren Unmengenstufen rechnen, die *unverbunden nebeneinander auf gleicher Höhe* angesiedelt sind. Noch *vor* der Frage, ob es derartige „unvergleichbare“ Unmengenstufen gibt, müsste man aber die Frage beantworten, ob es überhaupt verschiedene Unmengenstufen gibt. Nach Satz 5.118 wäre dann jedenfalls die Stufe $\llbracket\Omega\rrbracket$ der wohlordnungstragenden Unmengen die tiefste und die Stufe von $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ die höchste, so dass alle nicht auf $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ liegenden Unmengen einer Zwischenstufe angehören müssten. Die NEUMANNsche Hypothese, dass alle Unmengen gleichmächtig sind und auf derselben Stufe liegen, lässt sich nun durch die Gleichung $\llbracket\Omega\rrbracket = \llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ ausdrücken, und für ihre Bejahung wäre es hinreichend und notwendig, dass Ω mit $\mathbb{D}$ gleichmächtig ist (Korollar 5.15.11). So sind Ω und $\mathbb{D}$ also gewissermaßen, um einen Ausdruck von Rudy RUCKER zu gebrauchen, die „zwei Absoluta“ der Mengenlehre: Ω steht für „das Unendliche“ im Sinn des unvorstellbar Großen, und $\mathbb{D}$ steht für „das Alles“. Man kann also mit RUCKER das Problem wie folgt ausdrücken: „Ist unendlich ebenso groß wie alles? Niemand weiß das.“[524]

Um nun weitere Einsichten über den Aufbau des Mengen– und Klassenuniversums zu gewinnen und den Weg zum Unendlichkeitsaxiom zu ebnen, müssen wir uns (nach den Ordinalzahlen und den FREGEschen Zahlen) noch mit einem anderen Zugang zum Zahlenbegriff befassen, der von PEANO geschaffen wurde.

[524] RUCKER, *Infinity and the Mind* S. 264. RUCKER spricht nicht explizit von der Unmenge $\mathbb{D}$, sondern statt dessen von der Unmenge $\mathbb{V}$, die – wie wir sehen werden – in einer nur mit Mengen arbeitenden Mengenlehre die Rolle von $\mathbb{D}$ spielt (siehe Abschnitt 5.29). Bezogen auf diese Unmenge $\mathbb{V}$ kann man allerdings RUCKERs Frage meines Erachtens eindeutig positiv beantworten: Es gilt definitiv, dass $\mathbb{V} \sim \Omega$ ist (siehe Satz 5.218 S. 309). Wie der Beweis zeigen wird, benötigt man zur Verifikation dieser Tatsache allerdings das umstrittene Auswahlaxiom, und zwar seine globale Version (siehe Fußnote 29 auf S. 461), die aber meines Erachtens zweifellos wahr ist. Die unbeantwortete und bis auf weiteres wohl auch unbeantwortbare Frage ist aber die, ob Ω bzw. $\mathbb{V}$ mit der wirklich allumfassenden Unmenge $\mathbb{D}$ gleichmächtig ist.

5.16 Die Grundlegung der Arithmetik

Peanos Axiome

Giuseppe PEANO (1858–1932) hat 1889 gezeigt, dass man alle Eigenschaften, die man gewöhnlich mit den zum „Zählen“ benutzten „Zahlen“ verbindet, aus fünf Grundannahmen (Axiomen) ableiten kann.[525] Mit Zahlen sind hier aber nicht die FREGEschen Zahlen oder Ordinalzahlen gemeint, sondern *irgendwelche fest ausgewählten Individuen*, zwischen denen gewisse Beziehungen bestehen, die durch die Axiome beschrieben werden.[526] Objekte, welche die PEANOschen Axiome erfüllen, nennt man ≪natürliche Zahlen≫. Dieser Ausdruck wurde 1873 von Ernst SCHRÖDER im ersten Band seines berühmten *Lehrbuches der Arithmetik und Algebra* eingeführt und bezeichnet Zahlen, die „als Maßstab für die Häufigkeit der Dinge“ benutzt werden.[527] Sie werden (in diesem Abschnitt) ohne Zusatz einfach *Zahlen* genannt. Die ersten vier von PEANO aufgestellten Axiome sind nun folgende:[528]

5.16.1 Die ersten vier PEANOschen Axiome

(P1) *Es gibt eine Zahl, die ≪Null≫ genannt wird.*

(P2) *Zu jeder Zahl n gibt es genau ein Zahl, die der ≪Nachfolger≫ von n genannt wird.*

(P3) *Null ist nicht der Nachfolger einer Zahl.*

(P4) *Die Nachfolger verschiedener Zahlen sind verschieden.*

Hierbei ist ≪Null≫ ein Name oder nullstelliger Funktor, ≪ist Zahl≫ ein einstelliger und ≪ist Nachfolger von≫ ein zweistelliger Funktor.[529] Diese Funktoren sind nach PEANOs Intention als ursprachlich gegebene Grundkonstanten zu behandeln, wir können sie aber auch als definierte Konstanten ansehen (wir werden sie später in der Tat definieren, siehe S. 221–222). Sind nun Funktoren gegeben, für welche die genannten Axiome erfüllt sind, können wir zur Vereinfachung der Diskussion folgende Definitionen aufstellen (diese werden also nicht absolut, sondern relativ zu einer vorliegenden Interpretation der Konstanten ≪Zahl≫, ≪Null≫ und ≪Nachfolger≫ aufgestellt):[530]

---

525 Vgl. PEANO, *Arithmetices Principia* § 1 S. 34.

526 Dagegen befindet sich unter den FREGEschen Zahlen nur ein einziges Individuum: $\llbracket 0 \rrbracket$.

527 SCHRÖDER, *Arithmetik und Algebra I* S. 10. Im Gegensatz dazu stehen Zahlen wie die negativen, rationalen und reellen Zahlen, die anderen Zwecken dienen: Sie werden vor allem als Maßstäbe für Größen in einem Kontinuum benutzt.

528 Die hier gegebene Darstellung der Axiome weicht von der Originalversion in folgenden Punkten ab. PEANO gab nicht fünf, sondern neun Axiome an; da aber vier dieser Axiome rein logischer Natur sind (sie betreffen die Gleichheitsbeziehung), spricht man zu Recht von den „fünf PEANOschen Axiomen“ der Arithmetik. Nur unser Axiom (P1) ist auch bei PEANO das erste, (P2) ist dagegen das sechste, (P3) das achte, (P4) das siebte und (P5) das neunte. Ich habe also auch die ursprüngliche Reihenfolge von (P3) und (P4) vertauscht. Dies empfiehlt sich gewissermaßen aus „architektonischen“ Gründen: Aus Axiomen (P1) bis (P3) folgt noch nicht, dass es unendlich viele Zahlen gibt, dies wird erst – auf der Grundlage dieser Axiome – durch das vierte erzwungen (siehe S. 209). In der Originalversion von (P1) postuliert PEANO ferner die Existenz der Zahl Eins (und nicht der Null), und entsprechend erscheint auch in (P3) und (P5) bei ihm statt der Null die Eins. Da aber Mengentheoretiker die Zahlenreihe lieber mit Null beginnen lassen, habe ich die Axiome entsprechend umformuliert. In der Originalversion von (P4) fordert PEANO, dass Zahlen a und b genau dann gleich sind, wenn ihre Nachfolger gleich sind, so dass von dem einen auf das andere geschlossen werden darf und umgekehrt. Darin sind also zwei Aussagen enthalten, nämlich (1) wenn a und b gleich sind, sind auch ihre Nachfolger gleich und (2) wenn a und b verschieden sind, sind auch ihre Nachfolger verschieden. Nun ist aber (1) eine pure Selbstverständlichkeit der Identitätslogik, weshalb ich nur (2) formuliere. Schließlich habe ich das Induktionsaxiom (P5) von den anderen vier abgesetzt, da es einen ganz anderen Charakter hat als diese. Ich halte es für das eigentliche Axiom der Arithmetik, wohingegen die ersten vier gewissermaßen nur den passenden Rahmen postulieren, innerhalb dessen (P5) seinen Ort hat.

529 Zu Namen und Funktoren siehe S. 111.

530 Eine „absolute“ Definition von $\mathbb{N}$ erfolgt dagegen in Definition 5.21.28 S. 276.

5.16.2 Grundlegende Definitionen

$\mathbb{N}$ $:\equiv \{x \mid x \text{ ist Zahl}\}$.[531]
0 $:\equiv$ Null.
n' $:\equiv$ dasjenige x, das Nachfolger von n ist. Nach (P2) ist dies für Zahlen x eine Zahl.
S $:\equiv \langle n \in \mathbb{N} \mapsto n' \rangle$. Diese ≪Sukzessorfunktion≫ wirft also jede Zahl auf ihren Nachfolger.
1 [Lesart: „Eins“] $:\equiv$ $0'$.
2 [Lesart: „Zwei“] $:\equiv$ $1'$, so dass $2 = 1' = 0''$.
3 [Lesart: „Drei“] $:\equiv$ $2'$, so dass $3 = 2' = 1'' = 0'''$.
4 [Lesart: „Vier“] $:\equiv$ $3'$, so dass $4 = 3' = 2'' = 1''' = 0''''$ usw.
$\mathbb{N}^*$ $:\equiv$ $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Das ist also die Klasse aller von Null verschiedenen Zahlen.

Die Axiome (P1) und (P2) lassen nun vor unseren Augen eine endlose Kette von Zahlenbezeichnungen entstehen. Denn nach (P1) ist Null eine Zahl, und nach (P2) gibt es eine Zahl, die ≪Nachfolger von 0≫ genannt wird, also wieder nach (P2) eine Zahl, die ≪Nachfolger vom Nachfolger von 0≫ genannt wird usw. Mit Blick auf Definition 5.16.2 können wir dieser endlosen Kette von Zahlenbezeichnungen abkürzend die Form $0, 0', 0'', \ldots$ oder $0, S(0), S(S(0)), \ldots$ oder $0, 1, 2, \ldots$ geben. Dennoch stellen die Axiome (P1) und (P2) allein noch nicht sicher, dass es unendlich viele Zahlen gibt. Denn wenn wir *nur das gelten lassen, was diese beiden Axiome sagen*, könnte es immer noch sein, dass die Zahlen $0, 0', 0'' \ldots$ dieser Kette alle zusammenfallen, es sich also nur um verschiedene Bezeichnungen für ein und dieselbe Zahl 0 handelt: 0 ist nämlich die einzige Zahl, deren Existenz feststeht, wenn nur (P1) und (P2) gelten.

Nehmen wir nun Axiom (P3) hinzu, so erhalten wir mindestens *eine* weitere Zahl. Denn nach (P3) ist 0 nicht Nachfolger einer Zahl, was aber für sämtliche Zahlen der Reihe $0', 0'', 0''', \ldots$ zutrifft. Also ist 0 von allen diesen verschieden. Machen wir allerdings außer den Axiomen (P1) bis (P3) keine weiteren Voraussetzungen, könnten diese letztgenannten Zahlen noch *untereinander* identisch sein, also alle mit der Zahl $0'$, d. h. mit 1 zusammenfallen. Die Kombination der Axiome (P1) bis (P3) erzwingt also nur die Existenz der Zahlen 0 und 1.

Erst wenn wir auch noch das Axiom (P4) hinzunehmen, ergibt sich, dass die Zahlen $0, 1, 3, \ldots$ *alle* voneinander verschieden sein müssen, also anschaulich gesprochen eine unendliche Reihe bilden. Dies kann man sukzessiv wie folgt beweisen.

Erster Schritt. Da wir die beiden Zahlen 0 und 1 schon als voneinander verschieden erwiesen haben, müssen nach Axiom (P4) auch ihre Nachfolger 1 und 2 voneinander verschieden sein, und nach Axiom (P3) ist die Zahl 2 auch von 0 verschieden. Mithin hat sich nun insgesamt in der Reihe $0, 1, 2$ jede Zahl von jeder anderen als verschieden erwiesen.

Nächster Schritt. Weil 1 und 2 verschieden sind, müssen nach Axiom (P4) auch ihre Nachfolger 2 und 3 verschieden sein. Wegen Axiom (P3) ist 3 auch von 0 verschieden. Wieder nach Axiom (P4) ist schließlich 3 auch von 1 verschieden, da diese Zahlen Nachfolger der schon als verschieden erwiesenen Zahlen 0 und 2 sind. So hat sich nun insgesamt in der Reihe $0, 1, 2, 3$ jede Zahl von jeder anderen als verschieden erwiesen.

Im nächsten Schritt folgt analog die Verschiedenheit der Zahl 4 von $0, 1, 2, 3$ usw.

Während also Axiome (P1) bis (P3) zunächst nur eine unendliche Kette von Zahlen*bezeichnungen* entstehen lassen, erzwingt die Hinzunahme von (P4), dass sich diese Bezeichnungen auf unendlich viele *Zahlen* beziehen, so dass eine unendliche *Zahlenkette* vorhanden sein muss.

Gehen wir nun bloß von den Axiomen (P1) bis (P4) aus, würde nun aber nichts dagegen sprechen, dass sich die Gesamtheit aller Zahlen aus *mehreren* unendlichen Zahlenketten zusammensetzt,

[531] Die Definition von $\mathbb{N}$ ist (ebenso wie diejenige der Sukzessorfunktion S) in der elementaren Theorie nur sinnvoll, wenn die Zahlen Individuen sind und daher Elemente einer Klasse sein können, was Peano auch in der Tat voraussetzt: ≪Zahlen sind Individuen≫ könnte man daher als „nulltes“ Axiom den Peanoschen Axiomen hinzufügen. Allerdings kommt man mit gewissen Einschränkungen auch ohne dieses Axiom aus.

die „nebeneinander“ verlaufen, etwa $0, 0', 0'', \ldots$ und $\omega, \omega', \omega'', \ldots$. Dieses wird nun durch das *fünfte* PEANOsche Axiom, das sog. „Induktionsaxiom“ (P5) verhindert. Es macht eine Aussage über „induktive“ Klassen, die wie folgt definiert sind:

5.16.3 Definition Eine Klasse heißt *induktiv*, wenn sie

- die Zahl Null enthält und
- zusammen mit jeder Zahl, die sie enthält, immer auch deren Nachfolger enthält.[532]

Induktive Klassen sind anschaulich gesprochen all diejenigen, welche *die ganze erstgenannte Kette* $0, 1, 2, \ldots$ *umfassen*. Darüber hinaus könnte eine induktive Klasse aber auch noch weitere derartige Ketten umfassen (falls es solche gibt), und sie könnte auch Elemente haben, die gar keine Zahlen sind. Doch ist in jedem Fall auch diejenige Klasse induktiv, die *nur* die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ der ersten unendlichen Kette enthält.

5.16.4 Das fünfte PEANOsche Axiom

(P5) *Jede induktive Klasse enthält sämtliche Zahlen.*

Da demnach *jede* induktive Klasse bereits *alle* Zahlen umfasst, gilt das auch für die Klasse, die nur die erste unendliche Kette $0, 1, 2, \ldots$ umfasst. Deshalb folgt aus dem Axiom, dass es außerhalb von $0, 1, 2, \ldots$ gar keine weiteren Zahlen mehr gibt. Insgesamt besagen daher die Axiome (P1) bis (P5), dass die Zahlen *präzise* in der Kette $0, 1, 2, \ldots$ zusammengefasst sind, und sie sagen dies, *ohne* die „unpräzisen“ drei Punkte $(\ldots)$ zu erwähnen.

Man kann nun den Inhalt der PEANOschen Axiome mit mengentheoretischen Begriffen noch viel kürzer formulieren.[533] Ist $\mathbb{N}$ die Klasse der Zahlen und 0 die Null, so besagt das erste Axiom, dass $0 \in \mathbb{N}$ gilt. Betrachten wir nun die ≪Sukzessorfunktion≫ $S = \langle n \in \mathbb{N} \mapsto n' \rangle$, so besagt das zweite Axiom, dass der Wertebereich von S eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, und das dritte, dass 0 nicht in diesem Wertebereich liegt. Axiome (P2) und (P3) lassen sich daher zusammenfassen zu der Aussage, dass S alle Zahlen in die Klasse $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ wirft, also $\mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt. (P4) aber besagt, dass S injektiv ist. So lassen sich die PEANOschen Axiome kurz wie folgt zusammenfassen:

5.16.5 Kurzversion der PEANOschen Axiome

(I) $0 \in \mathbb{N}$, (II) $\mathbb{N} \xrightarrow[\text{INJ}]{S} \mathbb{N} \setminus \{0\}$, (III) *jede induktive Klasse umfasst sämtliche Zahlen.*

Für das Induktionsaxiom (P5) bzw. (III) gibt es noch eine gleichwertige Fassung, die nicht mit induktiven Klassen, sondern mit sog. induktiven Formeln arbeitet:

5.16.6 Erklärung Eine nach Interpretation einer Variablen x geschlossene Formel $\varphi(x)$ heißt *induktiv*, wenn (1) $\varphi(0)$ gilt, und (2) wann immer $\varphi(n)$ für eine Zahl n gilt, auch $\varphi(n')$ gilt.

Parallel zur „Klassenversion“ des Induktionsaxioms gibt es nun folgende „Formelversion“:

5.16.7 Das fünfte PEANOsche Axiom (Formelversion)

(P5) *Ist $\varphi(x)$ eine induktive Formel, so gilt $\varphi(n)$ für sämtliche Zahlen n.*

5.16.8 Theorem *Klassenversion und Formelversion des Induktionsaxioms sind gleichwertig.*

---

532 Formal: C (ist) induktiv $:\Leftrightarrow$ C Klasse $\wedge\ 0 \in C \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (n \in C \to n' \in C)$.

533 Vgl. MAINZER, *Natürliche Zahlen* S. 13.

Beweis. Es gelte die Formelversion. Zu zeigen ist, dass die Klassenversion gilt. Sei also C eine induktive Klasse. Dann sei $\varphi(x)$ die Formel «$x \in C$». Da C induktiv ist, gilt $0 \in C$, und wann immer $n \in C$ für eine Zahl n gilt, folgt $n' \in C$. Das bedeutet aber für die Formel $\varphi(x)$, dass diese induktiv ist. Da nun die Gültigkeit der Formelversion von (P5) vorausgesetzt ist, gilt also $\varphi(n)$ für jede Zahl n. Das heißt: Es gilt «$n \in C$» für jede Zahl n. Das war zu zeigen.
Nun gelte die Klassenversion. Zu zeigen ist, dass die Formelversion gilt. Sei also $\varphi(x)$ eine induktive Formel. Dann enthält die Klasse $C := \{n \mid \varphi(n)\}$ alle Individuen n, für die $\varphi(n)$ wahr ist. Daher enthält sie also die Zahl 0, und *wenn* sie eine Zahl n enthält, enthält sie auch deren Nachfolger n'. So ist C eine induktive Klasse. Da nun die Gültigkeit der Klassenversion von (P5) vorausgesetzt ist, muss C alle Zahlen enthalten. Nach Definition von C bedeutet dies aber, dass für jede Zahl n gilt: $\varphi(n)$. Das war zu zeigen. □ Die Gleichwertigkeit von Klassen– und Formelversion ist allerdings nur gegeben, wenn alle Zahlen *Individuen* sind, was PEANO auch tatsächlich annimmt. Wären nämlich unter den Zahlen auch Unmengen, könnte gar keine (kombinatorische) Klasse alle diese Zahlen als Elemente haben, so dass die Klassenversion des Induktionsaxioms keine sinnvolle Forderung mehr wäre.[534] Dagegen bliebe die Formelversion nach wie vor sinnvoll, und so kann man in einer umfassenderen Konzeption, welche als Zahlen auch Unmengen (also z. B. FREGEsche Zahlen) zulässt, die Formelversion benutzen.

Die Hauptbedeutung der PEANOschen Axiome liegt nun darin, dass man aus ihnen alle (für die Mathematik wesentlichen) Eigenschaften der Zahlen ableiten kann.[535] Man kann sich deshalb auf den formalistischen Standpunkt stellen, dass die Bedeutung der Konstanten «Zahl», «Null» und «Nachfolger» durch die Axiome gleichsam „definiert“ wird. Die Axiome legen zwar nicht *eindeutig* fest, was Zahl, Null und Nachfolger bedeutet, aber *wann immer* man bestimmte Objekte als «Zahlen», ein Objekt als «Null» und zu jeder Zahl ein Objekt als «Nachfolger» dieser Zahl festlegt, derart dass die Axiome wahr werden – was auf unendlich viele Weisen konkret geschehen kann – dürfen diese Möglichkeiten als gleichwertig angesehen werden, insofern alle aus den Axiomen abgeleiteten Theoreme in *allen* diesen Konkretisierungen der durch die Axiome beschriebenen abstrakten Struktur gelten. Man sagt, dass derartige konkrete Festlegungen ein *Modell der Arithmetik* bestimmen.

Wenn als Zahlen nur Individuen festgelegt werden sollen, können wir die konkreten Festlegungen so durchführen, dass wir eine strukturierte Klasse $\langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle$ auswählen, wobei $\mathbb{N}$ eine Klasse ist, deren Elemente als «Zahlen» gelten sollen, 0 ein Individuum, welches die «Null» sein soll und $S\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{D}$ eine Funktion, deren Funktionswert $S(n)$ wir jeweils als den «Nachfolger» der Zahl n betrachten wollen.[536] Gelten für diese Festlegungen die Axiome, so heißt die strukturierte Klasse ein *Modell der Arithmetik*. Lässt man aber als Zahlen auch Unmengen zu, spreche ich von einem *Quasi-Modell* der Arithmetik. Dieses können wir in der *erweiterten Theorie* eventuell ebenfalls als ein Paar $\langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle$ ansehen, bei dem $\mathbb{N}$ eine konzeptionelle Klasse, 0 eine Unmenge und S eine konzeptionelle Funktion sein darf. Jedoch ist nicht auszuschließen, dass die als Zahlen ausgewählten Objekte in keiner Kollektion enthalten sind, also $\mathbb{N}$ und S hier gar nicht existieren. Modelle der Arithmetik können durch eine formale Definition, Quasi-Modelle nur durch eine „Erklärung“ eingeführt werden:

---

534 Es könnten allerdings vielleicht *konzeptionelle* Klassen diese Zahlen enthalten, aber hier besteht das Problem, dass kein allgemeines Komprehensionsaxiom zur Verfügung steht, welches die Existenz solcher Klassen *in jedem Fall* sicherstellen könnte.

535 In einer der heutigen mathematischen Formelsprache angepassten Form findet man eine solche Ableitung bei LANDAU, *Grundlagen der Analysis* und bei OBERSCHELP, *Zahlensystem*.

536 Zu strukturierten Klassen siehe Definition 5.13.7 S. 176. Die Trägermenge ist hier $\mathbb{N}$, aber die Struktur keine Relation wie bei den bislang betrachteten strukturierten Klassen, sondern ein Paar $\langle 0, S\rangle$ mit einem Individuum 0 als erster und einer Funktion S als zweiter Komponente. – Man beachte, dass nach unseren Festlegungen über Paare (siehe S. 128–130) die Komponenten von Paaren beliebige Klassen sein dürfen: $\mathbb{N}$ und S dürfen also Unmengen sein (später wird sich allerdings zeigen, dass es sich immer um Mengen handelt).

5.16.9 Definition Eine strukturierte Klasse $\langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle$ heißt *Modell der Arithmetik*, wenn $\mathbb{N}$ eine Klasse, 0 ein Individuum und S eine Funktion von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ ist, so dass die Axiome (P1) bis (P5) erfüllt sind, sobald man unter ≪Zahlen≫ die Elemente von $\mathbb{N}$, unter ≪Null≫ das Objekt 0 und unter dem ≪Nachfolger≫ von n stets $S(n)$ versteht.[537]

5.16.10 Erklärung Eine Festlegung von ≪Zahl≫, ≪Null≫ und ≪Nachfolger≫ derart, dass Axiome (P1) bis (P4) und die Formelversion von (P5) erfüllt sind und mindestens eine Zahl eine Unmenge ist, heißt ein *Quasi-Modell der Arithmetik*. Existiert in der *erweiterten Theorie* die Kollektion $\mathbb{N}$ aller Zahlen und die konzeptionelle Sukzessorfunktion S, die jede Zahl auf ihren Nachfolger wirft, und ist 0 die ≪Null≫, so identifizieren wir das Quasi-Modell mit dem Objekt $\langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle$.

Man muss auch als Nicht-Formalist akzeptieren, dass für die Arithmetik jedes ihrer Modelle (und mit Einschränkungen auch jedes ihrer Quasi-Modelle) gleich gut verwendbar ist. Nur sollte man nicht ruhen, ehe man tatsächlich ein „realistisches“ Modell der Arithmetik angeben kann, d. h. entsprechende ≪Zahlen≫ unter den von der Ontologie bereitgestellten Objekten wirklich ausfindig gemacht hat. Durch ein solches Modell kann man nämlich sicherstellen, dass (1) die Axiome nicht formal widersprüchlich sind und (2) die darauf basierende Theorie sinnvoll, d. h. auf widerspruchsfrei denkbare Objekte wirklich anwendbar ist.

Bevor ich die Frage nach den konkreten Modellen der Arithmetik aufgreife, möchte ich noch skizzieren, wie man aus den Axiomen die wichtigsten Gesetze der Arithmetik ableiten kann.

Entwicklung der Arithmetik aus den Peano-Axiomen

Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass *irgendein* Modell $\langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle$ der Arithmetik vorliegt, auf welches sich nachstehende Definitionen und Theoreme beziehen. Diese können und sollen also in *jedem* Modell der Arithmetik aufgestellt werden. Um die Arithmetik zu entwickeln, müssen wir die arithmetischen Operationen (Addition, Multiplikation usw.) und die Kleinerrelation definieren, und zwar allein mittels der Null und der Sukzessorfunktion. Anschließend ist zu beweisen, dass die so definierten Objekte die gewohnten arithmetischen Eigenschaften besitzen. Das wesentliche Hilfsmittel für diese Definitionen und Beweise sind zwei Theoreme, welche „Beweisprinzip der vollständigen Induktion“ und „Definitionsprinzip der Rekursion“ heißen. Diese beiden fundamentalen Theoreme müssen also *zuerst* bewiesen werden.[538]

5.16.11 Beweisprinzip der vollständigen Induktion *Um zu zeigen, dass alle Zahlen n eine Eigenschaft E besitzen, genügt es, Folgendes zu zeigen:*

- 0 *besitzt die Eigenschaft E.*
- *Besitzt eine Zahl n die Eigenschaft E, so auch ihr Nachfolger n'.*

Die erste Zeile heißt Induktionsanfang, *die zweite* Induktionsschritt.

Bemerkung. Dieses Prinzip kann (neben der Klassen– und Formelversion) als eine weitere Version des Induktionsaxioms (P5) angesehen werden: Es handelt sich gewissermaßen um eine „Eigenschafts-

---

537 Formal: $\mathcal{N}$ (ist) Modell der Arithmetik $:\Leftrightarrow$
$\bigvee_{\mathbb{N},0,S} \Big(\mathbb{N}$ Klasse $\wedge\ 0 \in \mathbb{N}\ \wedge\ \mathbb{N} \xrightarrow[\text{INJ}]{S} \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge \bigwedge_C\ (C$ induktiv $\rightarrow \mathbb{N} \subseteq C)\ \wedge\ \mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle\Big)$.
Da diese Definition absolut gelten soll (d. h. ohne Bezug auf vorgegebene arithmetische Konstanten), muss man hier genau genommen ≪C induktiv≫ noch ersetzen durch ≪$0 \in C \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (n \in C \rightarrow S(n) \in C)$≫.

538 Sie sind mit den Prinzipien der *ordnungstheoretischen Induktion und Rekursion* (5.13.29 und 5.13.31) verwandt, und nachdem wir (am Schluss dieses Abschnitts, siehe Theorem 5.16.36 S. 220) bewiesen haben werden, dass es über $\mathbb{N}$ ein Wohlordnung $<$ gibt, werden uns *zusätzlich* auch diese schon bekannten ordnungstheoretischen Prinzipien in der Arithmetik zur Verfügung stehen.

version“ dieses Axioms.

Beweis bzw. Rechtfertigung des Beweisprinzips. Sei $\varphi(x)$ die Formel ≪n besitzt die Eigenschaft E≫. Ist nun der INDUKTIONSANFANG und der INDUKTIONSSCHRITT bewiesen, so zeigt dies, dass die Formel $\varphi(x)$ induktiv ist. Nach der Formelversion des Induktionsaxioms (P5) gilt daher $\varphi(n)$ für jede Zahl n, und das heißt, dass jedes n die Eigenschaft E besitzt. □ Als Beispiele für die Anwendung des Prinzips seien zwei im Weiteren benötigten Sätze bewiesen:

5.16.12 Theorem *Jede Zahl ist von ihrem Nachfolger verschieden.*

Beweis. Durch vollständige Induktion zeigt sich, dass jede Zahl n die Eigenschaft hat, von n' verschieden zu sein:
INDUKTIONSANFANG. Wegen Axiom (P3) ist 0 kein Nachfolger einer Zahl. Also ist die Zahl Null auch von ihrem eigenen Nachfolger verschieden.
INDUKTIONSSCHRITT. Als VORAUSSETZUNG nehmen wir an, dass eine Zahl n die Eigenschaft hat, dass ihr Nachfolger n' von n verschieden ist. Zu zeigen ist, dass auch die Zahl n' diese Eigenschaft hat, also ihr Nachfolger n'' von n' verschieden ist.
ANNAHME: n'' ist *nicht* von n' verschieden. Dann gilt $n'' = n'$, d. h. der Nachfolger von n' ist der Nachfolger von n. Dann haben aber die Zahlen n und n', die nach VORAUSSETZUNG verschieden sind, denselben Nachfolger, im Widerspruch zu Axiom (P4). □

5.16.13 Theorem *Jede von Null verschiedene Zahl n ist Nachfolger einer Zahl, d. h. es gibt zu n eine Zahl m, so dass $m' = n$.*
Für $m' = n$ werden wir später schreiben $m + 1 = n$ (siehe Satz 5.122 S. 216).

Beweis. Durch vollständige Induktion zeigt sich, dass jede Zahl n die Eigenschaft hat, mit Null identisch oder Nachfolger einer Zahl zu sein:[539]
INDUKTIONSANFANG. 0 hat diese Eigenschaft, denn $0 = 0$.
INDUKTIONSSCHLUSS. Zu zeigen ist, dass n' diese Eigenschaft besitzt, wann immer eine Zahl n sie besitzt. Aber n' ist natürlich immer Nachfolger einer Zahl, nämlich der Zahl n. □

Theorem 5.16.13 hat ein für die Unendlichkeitslehre bedeutsames Korollar: Dass nämlich $\mathbb{N}$ und die Klasse $\mathbb{N}^*$ der von Null verschiedenen Zahlen gleichmächtig sind:[540]

5.16.14 Korollar *Die Sukzessorfunktion S ist eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^*$. Daher ist $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$.*

Beweis. Theorem 5.16.13 kann man auch so ausdrücken, dass jedes Element von $\mathbb{N}^*$ von der Sukzessorfunktion S getroffen wird: Diese ist also eine Surjektion von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^*$. Nach 5.16.5 S. 210 ist sie aber zugleich eine Injektion, insgesamt also eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^*$. □

Mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion ist das folgende „Definitionsprinzip der Rekursion“ verwandt. Es wurde 1887 von DEDEKIND bewiesen.[541] Im Folgenden stelle ich eine Version des Prinzips vor, die insofern allgemeiner ist als die in der Literatur vorfindlichen Versionen, als sie auch zur Definition unmengenwertiger Funktionen einsetzbar ist. Solche Definitionen werden tatsächlich gebraucht (siehe Definition 5.16.16 mit nachfolgender Bemerkung). Ziel einer rekursiven Definition soll es also sein, eine (zulässigerweise unmengenwertige) Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ zu definieren. Die Definition besteht aus drei Schritten:

539 Daraus folgt die Behauptung: Denn für eine von Null verschiedene Zahl kommt dann nur die zweite Alternative in Frage, nämlich Nachfolger einer Zahl sein.

540 Dies bedeutet, wie wir in Abschnitt 5.17 sehen werden, dass $\mathbb{N}$ unendlich ist.

541 DEDEKIND, *Zahlen* § 9 Satz 126 S. 28f.

1. die *Zielbereichs-Deklaration*. Man lege gewisse Objekte als „Zielobjekte“ fest, auf welche f Zahlen werfen darf. Darunter dürfen auch Unmengen sein. In diesem Fall können wir die Zielobjekte durch eine nach Interpretation von x geschlossene „Zielbereichsformel“ $\varphi(x)$ beschreiben: Zielobjekte seien die Objekte x, für die $\varphi(x)$ gilt. Z. B. wären durch die Formel «x ist eine Klasse» alle Klassen als Zielobjekte charakterisiert. Soll aber f eine gewöhnliche Funktion sein, kann man die Zielobjekte durch Angabe einer sie umfassenden Klasse Z bestimmen. Man legt dann etwa fest, dass $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow Z$ sein soll. Beispielsweise kann man die Zielbereichs-Deklaration in der Einleitung der Definition vornehmen, indem man sagt „Sei f eine Funktion von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$“ (Zielbereichsklasse ist $\mathbb{N}$) oder „Werfe f Zahlen auf Klassen“ (Zielbereichsformel ist «x ist Klasse»).

2. Der *Rekursionsanfang*. Man lege ein Zielbereichsobjekt a als „Anfangsobjekt“ fest, auf welches die Funktion die Zahl 0 werfen soll, etwa durch die Zeile: «$f(0) := a$».

3. Der *Rekursionsschritt*. Man gebe eine Vorschrift („Rekursionsvorschrift“) an, welche unter der *Voraussetzung*, dass der Funktionswert $f(n)$ für eine Zahl n bereits bekannt ist, das Zielobjekt $f(n')$ festlegt, auf welches f den Nachfolger n' von n werfen soll. Hierzu benutzt man einen sog. „Rekursionsterm“ $\rho(x)$, der nach Interpretation der Variablen x geschlossen ist, und legt fest: *Für jede Zahl n sei $f(n') := \rho(f(n))$*. Der Term $\rho(x)$ muss so beschaffen sein, dass wenn o ein Zielobjekt ist, auch $\rho(o)$ ein solches bezeichnet. Die in Geltung gesetzte Gleichung «$f(n) = \rho(f(n))$» heißt *Rekursionsgleichung*.

Beispiel. $\underbrace{\text{Sei } f \text{ eine Funktion von } \mathbb{N} \text{ in } \mathbb{N}}_{\text{Zielbereichs-Deklaration}}$ $\underbrace{\text{mit } f(0) := 4,}_{\text{Rekursionsanfang}}$ $\underbrace{\text{und für alle } n \text{ aus } \mathbb{N} \text{ sei } f(n') := f(n)'.}_{\text{Rekursionsschritt}}$

Der Zielbereich ist hier $\mathbb{N}$, das Anfangsobjekt ist 4, und der Rekursionsterm $\rho(x)$ ist «x'».[542] Durch diese Definition soll also festgelegt sein:

$$\begin{array}{lll}
f(0) = 4 & & \text{(Rekursionsanfangs-Gleichung)}, \\
f(0') = f(0)' = 4', & \text{also } f(1) = 4' & \text{(Rekursions-Gleichung } f(n') = f(n)' \text{ mit 0 in der Rolle von } n), \\
f(1') = f(1)' = 4'', & \text{also } f(2) = 4'' & \text{(Rekursions-Gleichung } f(n') = f(n)' \text{ mit 1 in der Rolle von } n), \\
f(2') = f(2)' = 4''', & \text{also } f(3) = 4''' & \text{(Rekursions-Gleichung } f(n') = f(n)' \text{ mit 2 in der Rolle von } n), \\
\text{usw.} & &
\end{array}$$

Für den Funktionswert einer rekursiv definierten Funktion will man oft statt $f(n)$ einen neuen Ausdruck einführen, z. B. wollen wir «$4 + n$» statt «$f(n)$» schreiben. Dies kann man schon bei der Formulierung der Definition deutlich machen, indem man die gewünschte Schreibweise bereits dort verwendet. Ich benutze dann das Zeichen $:\equiv$ für eigentliche Definitionen:

$\underbrace{\text{Sei } 4 + n \text{ eine Zahl}}_{\text{Zielbereichs-Deklaration}}$ $\underbrace{\text{mit } 4 + 0 :\equiv 4,}_{\text{Rekursionsanfang}}$ $\underbrace{\text{und für alle Zahlen } n \text{ sei } 4 + n' :\equiv (4 + n)'.}_{\text{Rekursionsschritt}}$[543]

Manchmal will man bei der Festsetzung von $f(n')$ im Rekursionsschritt auch auf n Bezug nehmen, d. h. das Zielobjekt, auf welches f den Nachfolger von n werfen soll, könnte außer von $f(n)$ auch von n abhängen. Dann nimmt man als „Rekursionsterm“ einen Term $\rho(u, x)$, der erst nach Interpretation der *beiden* Variablen u und x geschlossen ist und legt fest: *Für jedes n aus $\mathbb{N}$ sei $f(n') := \rho(n, f(n))$*.

---

542 Man bekommt den Rekursionsterm, indem man im Rekursionsschritt den Term rechts von := betrachtet und dort jedes Exemplar von $f(n)$ durch x ersetzt.

543 Im Rekursionsschritt ist hier die Konvention zur Beseitigung mehrdeutiger Ausdrücke (siehe S. 113–114) zu beachten: links von $:\equiv$ stehen $'$ und n näher zusammen als die übrigen Zeichen, so dass aufgrund der Abstandskonvention dasselbe wie $(4 + (n'))$ oder (4 + der Nachfolger von n') gemeint ist; auf der rechten Seite wurde der Klammer-Term $(4 + n)'$ verwendet, weil der Nachfolger von $(4 + n)$ gemeint ist.

Der Term $\rho(u,x)$ muss nun natürlich folgende Eigenschaft haben: Wann immer n eine Zahl und o ein Zielobjekt ist, bezeichnet $\rho(n,o)$ ein Zielobjekt.

5.16.15 Beispiel Ist C eine bestimmte Klasse, legen wir fest:

$$\underbrace{f \text{ werfe jede Zahl auf eine Klasse,}}_{\text{Zielbereichs-Deklaration}} \underbrace{\text{wobei } f(0) := \{\emptyset\}}_{\text{Rekursionsanfang}} \underbrace{\text{und } f(n') := \begin{cases} C & \text{falls } n = 0, \\ f(n) \times C & \text{falls } n \neq 0. \end{cases}}_{\text{Rekursionsschritt}}$$

Zielbereichs-Formel ist hier «x ist Klasse», Anfangsobjekt ist $\{\emptyset\}$, und den Rekursionsterm $\rho(u,x)$ kann man rekonstruieren, indem man in dem Term rechts von := im Rekursionsschritt $f(n)$ durch x und dann n durch u ersetzt. Durch diese Definition soll also festgelegt sein:

$f(0) \ = \{\emptyset\}$ (Rekursionsanfangs-Gleichung),

$f(1) = f(0') = \begin{cases} C & \text{falls } 0 = 0 \\ f(0) \times C & \text{falls } 0 \neq 0 \end{cases}$, und weil $0 = 0$ wahr ist, also $f(1) = C$,

$f(2) = f(1') = \begin{cases} C & \text{falls } 1 = 0 \\ f(1) \times C & \text{falls } 1 \neq 0 \end{cases}$, und weil $1 = 0$ falsch ist, also $f(2) = f(1) \times C$,

$f(3) = f(2') = \begin{cases} C & \text{falls } 2 = 0 \\ f(2) \times C & \text{falls } 2 \neq 0 \end{cases}$, und weil $2 = 0$ falsch ist, also $f(3) = f(2) \times C$ usw.

Damit ist also $f(0) = \{\emptyset\}$, $f(1) = C$, $f(2) = C \times C$, $f(3) = (C \times C) \times C$ usw.

Man kann hier die Fallunterscheidung im Rekursionsterm „aufbrechen“: Im Fall $n = 0$ bestimmt er, dass $f(0') = C$ (d. h. $f(1) = C$) ist, und im Fall $n \neq 0$ (d. h. $n \in \mathbb{N}^*$), dass $f(n') = f(n) \times C$ ist, so dass man im Rekursionsschritt auch «$f(1) = C$ und für alle n aus $\mathbb{N}^*$: $f(n') = f(n) \times C$» schreiben kann. Außerdem möchten wir für $f(n)$ die Schreibweise C^n (oder $C \uparrow n$) einführen. Mit diesen Änderungen geht die Definition 5.16.15 über in:

5.16.16 Definition (Potenz einer Klasse mit einer Zahl) Für beliebige Klassen C sei
C^n für jede Zahl n eine Klasse (Zielbereichs-Deklaration), wobei
$C^0 :\equiv \{\emptyset\}$ (Rekursionsanfang) und
$C^1 :\equiv C$, sowie für alle n aus N^*: $C^{(n')} :\equiv C^n \times C$ (Rekursionsschritt).
C^n heißt die *Potenz der Klasse C mit der Zahl n*, wofür wir auch $C \uparrow n$ schreiben.

Bemerkung. Es gilt also $C^0 = \{\emptyset\}$, $C^1 = C$, $C^2 = C \times C$, $C^3 = (C \times C) \times C$ usw. Hier darf C auch eine echte Klasse sein. So ist etwa auch $\mathbb{D}^0$, $\mathbb{D}^1$, $\mathbb{D}^2$, $\mathbb{D}^3$ usw. definiert.

Der folgende „Rekursionssatz“ besagt, dass rekursive Definitionen bei Verwendung von Rekursionstermen $\rho(x)$ oder $\rho(u,x)$ der beschriebenen Art tatsächlich immer eine Funktion eindeutig festlegen:

5.16.17 Theorem Es liege vor:

(a) eine Beschreibung der Zielobjekte
(b) ein Zielobjekt a,
(c) ein Term $\rho(x)$, der nach Interpretation von x geschlossen ist,
derart dass $\rho(o)$ immer ein Zielobjekt beschreibt, wenn o ein solches ist
bzw. ein Term $\rho(u,x)$, der nach Interpretation von u und x geschlossen ist,
derart dass $\rho(n,o)$ immer ein Zielobjekt beschreibt, wenn $n \in \mathbb{N}$ gilt und o ein Zielobjekt ist.

Dann gibt es genau eine Funktion f mit $\mathtt{Db}(f) = \mathbb{N}$, deren Werte Zielobjekte sind, derart dass
(1) $f(0) = a$, *und*
(2) *für alle n aus $\mathbb{N}$: $f(n') = \rho(f(n))$ bzw. $f(n') = \rho(n, f(n))$ gilt.*

Beweis. Der aus einfachen logischen Folgerungen bestehende, aber wegen seiner Länge komplizierte Beweis ist im Anhang S. 418–422 ausgeführt. □

Nun können wir rekursiv die sog. **Zahlenoperationen** einführen.[544] *Totale* Zahlenoperationen (wie Addition, Multiplikation und Potenzierung) sind Funktionen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, das heißt (wie wir im Hinblick auf Definition 5.16.16 auch sagen können) Funktionen von $\mathbb{N}^2$ in $\mathbb{N}$; *partielle* Zahlenoperationen (wie Subtraktion und Division) sind Funktionen von einer Teilmenge von $\mathbb{N}^2$ in $\mathbb{N}$. Obgleich nun durch Rekursion eigentlich nur Funktionen definiert werden können, die *Zahlen* auf Zahlen werfen, kann man durch folgenden Trick auch totale Zahlenoperationen definieren, die *Zahlenpaare* $\langle m, n\rangle$ auf Zahlen werfen. Um z. B. die Addition zu definieren, die jedes Zahlenpaar $\langle m, n\rangle$ auf einen Zahl $m + n$ werfen soll, definiert man *für jede Zahl* m rekursiv je eine Funktion f_{m+} (die sog. *m-te Additionsfunktion*), die jede Zahl n auf eine Zahl $f_{m+}(n)$ wirft. Für den Funktionswertterm $f_{m+}(n)$ führt man dann die Schreibweise $m + n$ ein, und definiert auf diese Weise $+$ als einen zweistelligen Termfunktor; unter der Addition versteht man schließlich die Operation, die jedes Zahlenpaar $\langle m, n\rangle$ auf $f_m(n)$, das ist $m + n$, wirft. Die in unserem obigen Beispiel S. 214 rekursiv definierte Funktion f ist offenbar die 4-te Additionsfunktion f_{4+}, und nach dem dort vorgegebenen Muster definieren wir nun sämtliche Additionsfunktionen f_{m+}, und mit ihrer Hilfe die Addition:

5.16.18 Definition Für jede Zahl m definieren wir eine Funktion f_{m+} von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sowie einen Term $m + n$ zur Beschreibung von $f_{m+}(n)$ rekursiv durch

Rekursionsanfang:	$f_{m+}(0) :\equiv m$	bzw.	$m + 0 :\equiv m,$	(5.119)
Rekursionsschritt:	$f_{m+}(n') :\equiv (f_{m+})'$	bzw.	$m + n' :\equiv (m + n)'.$	(5.120)

Mit der Konstanten $+$ [Lesart: *plus*] bezeichnen wir die zugehörige Zahlenoperation, die jedes Zahlenpaar $\langle m, n\rangle$ auf $m + n$ wirft. Diese Operation heißt *Addition*.

Der Term $m + n$ heißt *Summe von m und n*, darin heißt m *linker Summand* oder *Augend* („zu Vermehrendes“) und n *rechter Summand* oder *Addend* („Hinzuzufügendes“).

Aus der Definition kann man nun folgende Grundgleichungen ableiten, die in gewisser Weise eine „handlichere“ Version der Rekursionsgleichungen darstellen:

5.16.19 Theorem *Für Zahlen m, n gilt:*

(Addition mit 0)	$n + 0$	$=$	n	$=$	$0 + n.$	(5.121)
(Addition mit 1)	$n + 1$	$=$	n'	$=$	$1 + n.$	(5.122)
(Nachfolger einer Zahl als Addend)	$m + (n + 1)$	$=$	$(m + n) + 1.$			(5.123)

Beweis. Siehe Anhang S. 422. □ Wegen $n' = n + 1$ kann man die Definitionsgleichungen der Zahlen 1,2,3,4,5 usw. (siehe Definition 5.16.2) nun in der gewohnten Weise angeben:

$$1 = 0 + 1, \quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1 \quad 4 = 3 + 1 \quad \text{usw.} \tag{5.124}$$

Auch ersetzen wir nun im Induktionsschritt von Induktionsbeweisen und im Rekursionsschritt rekursiver Definitionen «n'» durch das gewöhnliche «$n + 1$»:

5.16.20 Neue Formulierung des Rekursions– und Induktionsschritts
Im Induktionsschritt ist zu zeigen: Hat n eine Eigenschaft, so auch $n + 1$.
Im Rekursionsschritt schreibt man $f(n + 1) := \rho(n, f(n))$ bzw. $f(n + 1) := \rho(f(n))$.

[544] Zum Begriff der Operation siehe S. 144–146.

Aus den bewiesenen Grundgleichungen (5.122), (5.121) und (5.123) der Addition kann man nun durch vollständige Induktion die wichtigsten Eigenschaften der Addition herleiten:

5.16.21 Theorem *Für Zahlen k, m, n gilt stets:*

(Assoziativität)		$(k+m)+n = k+(m+n).$	(5.125)
(Kommutativität)		$m+n = n+m.$	(5.126)
(Nullsummensatz)	*Wenn nicht $m = n = 0$ ist, so gilt*	$m+n \neq 0.$	(5.127)
(Regularität)	*Für höchstens eine Zahl x ist*	$m+x = n.$	(5.128)

Beweis. Dies wird durch vollständige Induktion bewiesen. Um Behauptungen wie $m+n = n+m$ über *mehrere* natürliche Zahlen zu verifizieren, wählt man eine der vorkommenden Zahlenvariablen aus, zum Beispiel n, und führt dann für jede fest vorgegebene Belegung der übrigen (hier für jede Belegung der Variablen m) je einen Induktionsbeweis, dass die Aussage für alle n zutrifft. So führt man eigentlich unendlich viele Induktionsbeweise: z. B. einen zum Beweis von «für jede Zahl n gilt $0+n = n+0$», einen anderen für «für jede Zahl n gilt $1+n = n+1$» usw. Diese Beweise kann man aber alle simultan führen, indem man für eine beliebige, aber fest gewählte Zahl m den Induktionsbeweis für «für alle m gilt $m+n = n+m$» führt. Man spricht hier von **Induktion über n bei festem m**. Auf diese Weise beweise ich die Aussagen von Theorem 5.16.21 im Anhang S. 422–423. □

Die *Assoziativität* besagt, dass der scheinbar doppeldeutige Operationsterm $k+m+n$ bei jeder seiner möglichen Deutungen, nämlich $(k+m)+n$ und $k+(m+n)$, dieselbe Zahl bezeichnet, also in Wirklichkeit gar nicht doppeldeutig ist. Die *Kommutativität* besagt, dass wenn Addend und Augend ihre Rolle vertauschen, das Operationsergebnis gleich bleibt. Der *Nullsummensatz* verallgemeinert Axiom (P3): Besagte (P3), dass man 0 nicht erreichen kann, indem man den Nachfolger einer Zahl bildet (also zu einer Zahl die 1 addiert), so sagt der Nullsummensatz, dass man 0 überhaupt nicht durch eine Summe erreichen kann, wenn nicht beide Summanden bereits 0 sind. Die *Regularität* wird schließlich benötigt, um eine neue Operation, die Subtraktion, definieren zu können:

5.16.22 Definition Sei $\langle n, m\rangle$ ein Zahlenpaar derart, dass (mindestens) ein x existiert mit $m+x = n$ [bzw. gleichwertig: $x+m = n$]. Dann gibt es wegen der Regularität der Addition (5.128) *genau* ein solches x. Dieses bezeichnet man mit «$n-m$».[545] Ferner sei $-$ [Lesart: *minus*] die Zahlenoperation, die jedes Zahlenpaar $\langle n, m\rangle$, *für welches ein solches x existiert*, auf $n-m$ wirft. Diese Operation heißt *Subtraktion*. Sofern nicht für jedes $\langle n, m\rangle$ ein x der genannten Art existieren muss, ist dies eine *partielle* Zahlenoperation.

Als Nächstes können wir durch Rekursion auf ähnliche Weise, wie wir die Addition $+$ eingeführt haben, die Zahlenoperation $\cdot$ der Multiplikation einführen:

5.16.23 Definition Für jede Zahl m definieren wir rekursiv eine Funktion $f_{m\cdot}$ von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, für deren Funktionswerte $f_{m\cdot}(n)$ wir zugleich die Terme $m \cdot n$ und mn einführen:

$$m \cdot 0 := 0 \qquad \text{bzw.} \qquad m0 := 0, \tag{5.129}$$

$$m \cdot (n+1) := m + (m \cdot n) \qquad \text{bzw.} \qquad m(n+1) := m + (mn). \tag{5.130}$$

Mit der Konstanten $\cdot$ [Lesart: *mal*] bezeichnen wir die zugehörige Zahlenoperation, die jedes Zahlenpaar $\langle m, n\rangle$ auf $m \cdot n$ wirft. Diese Operation heißt *Multiplikation*.

[545] Formal: $n - m :\equiv \imath\, x(m + x = n)$.

Bemerkung. Es ist also $m \cdot 0 = 0$, $m \cdot 1 = m$, $m \cdot 2 = m + m$, $m \cdot 3 = m + (m + m)$, $m \cdot 4 = m + (m + (m + m))$ usw., so dass die Multiplikation durch wiederholte Addition ausführbar ist und man sich dadurch gewissermaßen „schneller" als durch die Addition im Bereich der Zahlen „vorwärts bewegt". Für die Multiplikation gelten ähnliche Eigenschaften wie für die Addition (zum Beispiel Kommutativität und Assoziativität), und ähnlich wie wir mit Hilfe der Addition die Subtraktion als partielle Operation definiert haben, könnten wir mit Hilfe der Multiplikation eine weitere partielle Zahlenoperation, die *Division* definieren. Hierauf können wir hier jedoch verzichten. Statt dessen definieren wir wiederum rekursiv noch eine weitere totale Zahlenoperation:

5.16.24 Definition Für jede Zahl m definieren wir rekursiv eine Funktion $f_{m\uparrow}$ von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, für deren Funktionswerte $f_{m\uparrow}(n)$ wir zugleich die Terme $m \uparrow n$ und m^n einführen:

$$m \uparrow 0 := 1 \qquad \text{bzw.} \qquad m^0 := 1, \tag{5.131}$$

$$m \uparrow (n+1) := m \cdot (m \uparrow n) \qquad \text{bzw.} \qquad m^{n+1} := m(m^n). \tag{5.132}$$

Mit der Konstanten $\uparrow$ [Lesart: *hoch*] bezeichnen wir die zugehörige Zahlenoperation, die jedes Zahlenpaar $\langle m, n\rangle$ auf $m \uparrow n$ wirft. Diese Operation heißt *Potenzierung*. Wir nennen m^n oder $m \uparrow n$ die *n-te (Zahlen)potenz von m* oder die *Potenz der Zahl n mit der Zahl m*.

Bemerkung. Es ist also $m \uparrow 0 = 1$, $m \uparrow 1 = m$, $m \uparrow 2 = m \cdot m$, $m \uparrow 3 = m \cdot (m \cdot m)$, $m \uparrow 4 = m \cdot (m \cdot (m \cdot m))$ usw., so dass die Potenzierung durch wiederholte Multiplikation ausführbar ist, ebenso wie die Multiplikation durch wiederholte Addition, und die Addition durch wiederholten Übergang zum Nachfolger einer Zahl ausgeführt werden kann. Analog könnte man rekursiv noch höhere (insgesamt unendlich viele) Zahlenoperationen definieren, als Nächstes also etwa eine, die durch wiederholte Potenzierung usw. auszuführen wäre.[546] Es ist klar, dass man mittels jeder weiteren dieser Operationen immer „schneller" in der Zahlenreihe $0, 1, 2, 3 \ldots$ „vorwärts" kommt.

Es stellt sich uns nun als Nächstes die Aufgabe, die Reihenfolge der Zahlen in dieser Zahlenreihe durch eine entsprechende Ordnungsrelation exakt zu definieren:

5.16.25 Definition Wir nennen eine Zahl m *kleiner* als eine Zahl n und schreiben $m < n$, wenn es eine von 0 verschiedene Zahl x gibt, so dass $m + x = n$ gilt.[547] Unter der *Kleinerrelation* $<$ verstehen wir die Relation in $\mathbb{N}$, die eine Zahl m genau dann auf eine Zahl n ausrichtet, wenn $m < n$.

Die elementarste Eigenschaft der Kleinerrelation ist folgende:

5.16.26 Lemma *Jede Zahl n ist kleiner als ihr Nachfolger, d. h. es gilt stets $n < n + 1$, also konkret $0 < 1$, $1 < 2$, $2 < 3$ usw.*

---

546 Die nach der Potenzierung kommenden Operationen werden allerdings nur äußerst selten betrachtet. Nachdem Husserl sie 1891 in seiner *Philosophie der Arithmetik* erwähnte (Kap. XIII S. 277), wobei er die direkt über der Potenzierung stehende Operation als *Elevation* bezeichnete, scheint sich als erster Mathematiker im 20. Jahrhundert Reuben L. Goodstein für die Sache näher interessiert zu haben. Er schlug 1947 für die nach der Potenzierung kommende vierte, fünfte, sechste usw. Operation die Namen *Tetration*, *Pentation*, *Hexation* usw. vor (Goodstein, *Transfinite Ordinals in Recursive Number Theory* S. 129). Allgemein schrieb er $G(k, m, n)$ für die Zahl, welche die k-te Operation dem Zahlenpaar $\langle m, n\rangle$ zuordnet, wobei das G vermutlich als Initiale von „Goodstein" zu deuten ist. Donald E. Knuth führte 1976 für diese Operationen die sog. *Pfeilnotation* ein. (vgl. Knuth, *Finiteness*). Während er für die Potenzierung $\uparrow$ schreibt, notiert er die Tetration mit $\uparrow\uparrow$, die Pentation mit $\uparrow\uparrow\uparrow$ usw. Wichtig ist noch zu erwähnen, dass man diese Operationen mit Rechts– und nicht mit Linksklammerung definiert, was hier keineswegs dasselbe ist, weil kein Assoziativgesetz gilt. So ist zum Beispiel $2 \uparrow\uparrow 4$ nicht als $((2 \uparrow 2) \uparrow 2) \uparrow 2 = 256$, sondern als $2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow 2)) = 65536$ definiert. Dies ist im Interesse eines schnelleren Vordringens zu gigantischen endlichen Zahlen die „richtige" Definition. Siehe auch S. 303.

547 Formal definieren wir also: $m < n \;:\Leftrightarrow\; \bigvee_x (x \neq 0 \;\wedge\; m + x = n)$.

Beweis. Um $n < n+1$ zu beweisen, müssen wir nach Definition von $<$ zeigen, dass es eine von Null verschiedene Zahl x gibt mit $n + x = n + 1$. Ein solches x ist aber die Zahl Eins.[548] □

Nun können wir zeigen, dass $<$ eine Vollordnung[549] ist, dass also in einem Ordnungsdiagramm von $<$ alle Zahlen tatsächlich „auf einer Linie“ angeordnet sind:

5.16.27 Theorem $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ *ist eine Vollordnung:* $<$ *ist irreflexiv, transitiv und linear.*

Beweis. Siehe Anhang S. 423–424. □ Da $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ eine Vollordnung ist, gilt für $<$ das Theorem 5.13.12 S. 177, so dass $<$ nicht nur linear, sondern auch *trichotom* ist: Von den Alternativen $n < m$, $m < n$ und $n = m$ gilt stets genau eine. Auch stehen uns nun die in Abschnitt S. 176–181 für Vollordnungen eingeführten Begriffe Minimum, Maximum, Intervalle, Abschnitte usw. zur Verfügung. Im Gegensatz zu den Punkten einer Geraden, die eine Vollordnung *ohne* kleinstes und größtes Element bilden, erwarten wir, dass es *eine kleinste* Zahl gibt, aber *keine größte*. In der Tat gilt:

5.16.28 Theorem *In* $\mathbb{N}$ *gibt es ein Minimum, nämlich* 0, *aber kein Maximum.*

Beweis. Wegen (5.121) gilt für alle Zahlen n, dass $0 + n = n$. Im Fall $n \neq 0$ bedeutet $0 + n = n$ aufgrund der Definition von $<$, dass $0 < n$. Im Fall $n \neq 0$ aber ist $0 = n$. In *beiden* Fällen gilt daher $0 \leq n$, was zeigt, das 0 Minimum von $\mathbb{N}$ ist. $\mathbb{N}$ hat aber kein Maximum, weil nach Lemma 5.16.26 für jede Zahl n die Zahl $n + 1$ eine noch größere ist. □ Für weitere Folgerungen benötigen wir den folgenden Hilfssatz über das Zusammenspiel der Relationen $<$ und $\leq$:

5.16.29 Lemma

Für Zahlen m, n *gilt:* $$(m < n+1) \;\Leftrightarrow\; (m \leq n) \tag{5.133}$$
Für Zahlen k, ℓ *gilt:* $$(k < \ell) \;\Leftrightarrow\; (k+1 \leq \ell). \tag{5.134}$$

Beweis. Siehe Anhang S. 424. □ Nach Lemma 5.16.26 gilt $n < n+1$, und wir können fragen, ob zwischen n und $n+1$ weitere Zahlen existieren. Erwartungsgemäß existieren keine:

5.16.30 Theorem *Zwischen* n *und* $n+1$ *existieren keine weiteren Zahlen.*

Beweis. Angenommen, x wäre eine Zahl mit $n < x < n+1$. Nun folgt aus $x < n+1$ mittels (5.133), dass $x \leq n$, das heißt $x = n$ oder $x < n$. Demgegenüber ist in der Annahme enthalten, dass zugleich $n < x$. Dies steht im Widerspruch zur Trichotomie der Ordnungsrelation $<$ (Theorem 5.13.12 S. 177). □ Damit ist der «Nachfolger» von n, von dem in den Peanoschen Axiomen ohne Bezug auf eine Ordnungsrelation die Rede war, der unmittelbare $<$-Nachfolger von n:

5.16.31 Korollar *Für Zahlen* n *gilt:*

$n+1$ *ist unmittelbarer Nachfolger von* n, *und* n *unmittelbarer Vorgänger von* $n+1$. (5.135)

Ist $n \neq 0$, *so hat* n *hat einen unmittelbaren* $<$*-Vorgänger, und zwar* $n-1$. (5.136)

Ist $n = 0$, *so hat* n *dagegen keinen Vorgänger.* (5.137)

Beweis. Zu (5.135). Nach Lemma 5.16.26 gilt $n < n+1$, und nach Theorem 5.16.30 liegt zwischen n und $n+1$ keine weitere Zahl, also ist $n+1$ nach Definition 5.13.15 S. 178 unmittelbarer Nachfolger von n, und nach Theorem 5.13.16 ist n der unmittelbare Vorgänger von $n+1$.

---

548 Denn es gilt ja $n + 1 = n + 1$. Beachte noch, dass 1 nach Definition der Nachfolger von 0 ist, so dass 1 wegen Axiom (P3) eine von 0 verschiedene Zahl ist.

549 Siehe S. 176–181.

Zu (5.136). Jede von Null verschiedene Zahl n ist nach Theorem 5.16.13 S. 213 Nachfolger einer Zahl m, d. h. es gilt $n = m + 1$. Dann ist m nach (5.135) der unmittelbare Vorgänger von n, und nach Definition 5.16.22 S. 217 folgt aus $1 + m = n$, dass $m = n - 1$.

Zu (5.137). Gäbe es einen Vorgänger n von 0, so wäre $n < 0$, aber wegen Theorem 5.16.28 wäre zugleich $0 \leq n$, also $0 = n$ oder $0 < n$ im Widerspruch zur Trichotomie von $<$. □

5.16.32 Korollar $\mathtt{Ab}(0) = \emptyset$ *und für* $n \neq 0$ *ist* $\mathtt{Ab}(n) \neq \emptyset$.

Beweis. $\mathtt{Ab}(0)$ bzw. $\mathtt{Ab}(n)$ ist die Klasse der $<$-Vorgänger von 0 bzw. von n. Also folgt die Behauptung aus Satz 5.136 bzw. 5.137. □ Wichtig ist nun, dass für jede natürliche Zahl n der Abschnitt $\mathtt{Ab}(n)$, also die Klasse der Vorgänger von n, eine *Menge* ist. Wäre bereits bewiesen, dass $\mathbb{N}$ selbst eine Menge ist, so wäre dies aufgrund des Teilmengenaxioms sofort klar. Auf der Basis der PEANOschen Axiome (und der bisherigen Mengenaxiome) kann aber nicht gezeigt werden, dass $\mathbb{N}$ eine Menge ist. Hierzu benötigt man das „Unendlichkeitsaxiom", das wir erst später plausibel machen können (5.17.26 S. 242), und das mit der Forderung, dass $\mathbb{N}$ eine Menge ist, sogar *äquivalent ist*.[550] Hier aber können wir bereits zeigen:

5.16.33 Theorem *Für jede Zahl* n *gilt* $\mathtt{Ab}(n+1) = \mathtt{Ab}(n) \cup \{n\}$, *und* $\mathtt{Ab}(n)$ *ist eine Menge.*

Beweis von $\mathtt{Ab}(n+1) = \mathtt{Ab}(n) \cup \{n\}$. Ist einerseits x ein Element von $\mathtt{Ab}(n+1)$, so ist x Vorgänger von $n+1$, also $x < n+1$. Dann folgt nach Lemma 5.16.29, dass $x \leq n$, das heißt $x < n$ oder $x = n$. Im ersten Fall ist $x \in \mathtt{Ab}(n)$, im zweiten $x \in \{n\}$, in jedem Fall gilt also $x \in \mathtt{Ab}(n) \cup \{n\}$. Liegt umgekehrt x in $\mathtt{Ab}(n) \cup \{n\}$, so ist x Element von $\mathtt{Ab}(n)$ oder von $\{n\}$, und je nachdem gilt $x < n$ oder $x = n$, in jedem Fall also $x \leq n$. Wegen $n < n+1$ folgt insgesamt $x \leq n < n+1$ und wegen der gemischten Transitivität $x < n+1$ und daher $x \in \mathtt{Ab}(n+1)$. So haben $\mathtt{Ab}(n+1)$ und $\mathtt{Ab}(n) \cup \{n\}$ dieselben Elemente und sind daher gleich.

Beweis, dass $\mathtt{Ab}(n)$ eine Menge ist. Dies zeigt sich durch vollständige Induktion:
INDUKTIONSANFANG. $\mathtt{Ab}(0)$ ist nach Korollar 5.16.32 die leere Menge und damit eine Menge.
INDUKTIONSSCHLUSS. VORAUSSETZUNG. $\mathtt{Ab}(n)$ ist eine Menge. Als einelementige Klasse ist auch $\{n\}$ nach Korollar 5.9.15 S. 119 eine Menge. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt nun aber $\mathtt{Ab}(n+1) = \mathtt{Ab}(n) \cup \{n\}$, was als Vereinigung zweier Mengen nach Korollar 5.10.20 S. 125 ebenfalls eine Menge ist. □

5.16.34 Korollar $\mathtt{Ab}(0) = \emptyset$, $\mathtt{Ab}(1) = \{0\}$, $\mathtt{Ab}(2) = \{0, 1\}$.

Beweis. $\mathtt{Ab}(0) = \emptyset$ gilt nach Korollar 5.16.32. Nach Theorem 5.16.33 folgt $\mathtt{Ab}(1) = \mathtt{Ab}(0) \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$, und weiter $\mathtt{Ab}(2) = \mathtt{Ab}(1) \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$. □ Für die Mengen $\mathtt{Ab}(n)$ gilt außerdem der folgende für die Theorie der endlichen Mengen wichtige Satz:

5.16.35 Theorem *Für verschiedene Zahlen* m *und* n *sind die Abschnitte* $\mathtt{Ab}(m)$ *und* $\mathtt{Ab}(n)$ *nicht gleichmächtig. Ist* $m < n$, *so gilt vielmehr* $\mathtt{Ab}(m) \prec Ab(n)$.

Beweis. Siehe Anhang S. 424–425. □ Als Abschluss dieser Betrachtungen halten wir fest:

5.16.36 Theorem $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ *ist eine wohlgeordnete Klasse, insbesondere besitzt jede nichtleere Teilklasse von* $\mathbb{N}$ *ein Minimum.*

Beweis. Siehe Anhang S. 425. □ Wir können diesen Abschnitt nun so zusammenfassen. Wann immer $\mathbb{N}$, 0 und S so gewählt werden, dass die fünf PEANOschen Axiome gelten, also $\langle \mathbb{N}, \langle 0, S \rangle \rangle$ ein

[550] Siehe Theorem 5.17.25 S. 242.

Modell der Arithmetik ist, lässt sich in $\mathbb{N}$ eine Operation $+$ definieren, für welche die gewohnten Rechenregeln der Addition gelten. Mittels $+$ kann man einerseits weitere „arithmetische“ Operationen ($-, \cdot \uparrow$ usw.) definieren, andererseits aber – und das ist für das Weitere wichtiger – eine Ordnungsrelation $<$, die eine Wohlordnung über $\mathbb{N}$ ist, derart dass die Klasse $\mathbb{N}$ bezüglich $<$ ein Minimum 0, aber kein Maximum besitzt, und dass zwischen einem Element n und seinem ≪Nachfolger≫ $S(n)$ kein weiteres Element liegt. All dies haben wir rein formal abgeleitet, ohne uns unter den Zahlen konkret etwas vorstellen zu müssen. Angesichts dieser rein formalen Ausführungen stellen sich nun aber die folgenden Fragen:

1. Gibt es überhaupt Modelle $\langle \mathbb{N}, \langle 0, S \rangle \rangle$ der Arithmetik?

Wenn man diese Frage verneinen müsste, wären alle vorgenannten Definitionen und Lehrsätze der Arithmetik sinnlos. Glücklicherweise kann man die Frage positiv beantworten: Im nächsten Abschnitt werden wir konkrete Modelle der Arithmetik betrachten. Eine weitere Frage resultiert aus der Tatsache, dass es sogar mehrere Modelle der Arithmetik gibt:

2. Wie hängen die verschiedenen Modelle der Arithmetik zusammen?

Diesbezüglich wird sich im übernächsten Abschnitt ein sehr enger Zusammenhang ergeben: Alle Trägerklassen $\mathbb{N}$ von Modellen der Arithmetik sind gleichmächtig, und es gibt eine genau von diesen Klassen „bevölkerte“ Klassenstufe. Später wird sich zeigen, dass diese Stufe die „kleinste“ Unendlichkeitsstufe ist.[551]

Das Standardmodell und zwei andere Modelle der Arithmetik

Um ein Modell der Arithmetik zu erhalten, haben wir als Denotate für die Grundkonstanten der PEANOschen Axiome, also ≪Zahl≫, ≪Null≫ und ≪Nachfolger einer Zahl≫, Objekte anzugeben, für welche die Axiome erfüllt sind. Das hier vorgelegte Modell wird nach John VON NEUMANN das „NEUMANNsche Modell der Arithmetik“ genannt;[552] es ist inzwischen zum meistgebrauchten Modell der Arithmetik geworden, so dass man vom „Standardmodell“ der Arithmetik sprechen kann. Wir hatten für Ordinalzahlen α als deren ≪Nachfolger≫ α' die Ordinalzahl $\alpha \cup \{\alpha\}$ definiert. Um hier nicht direkt an die Ordinalzahlen anknüpfen zu müssen, übertragen wir diesen Begriff auf beliebige Mengen: Ist M eine Menge, so ist ihre Vereinigung $M \cup \{M\}$ mit der einelementigen Menge $\{M\}$ nach dem Vereinigungsmengenaxiom 5.10.19 ebenfalls eine Menge, die wir als den *Nachfolger* M' von M bezeichnen wollen:

5.16.37 Definition Der *Nachfolger* M' einer Menge M sei $M \cup \{M\}$, also $M' :\equiv M \cup \{M\}$.

Als ≪Null≫ nehmen wir naheliegenderweise die leere Menge:

5.16.38 Definition Die (NEUMANNsche) *Null* sei die leere Menge $\emptyset$, also $0 :\equiv \emptyset$.

Jetzt fehlt noch eine Deutung des Ausdrucks ≪Zahl≫ im Einklang mit den Peano-Axiomen.

- Da 0 eine Zahl sein soll, müssen wir $\emptyset$ zu den Zahlen rechnen.
- Mit 0 soll auch $0'$ eine Zahl sein und 1 genannt werden, es ist also
- $1 :\equiv 0' = \emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$ zu den Zahlen zu rechnen.
- Mit 1 soll auch $1'$ eine Zahl sein und 2 genannt werden, es ist also
- $2 :\equiv 1' = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$ zu den Zahlen zu rechnen.
- Mit 2 soll auch $2'$ eine Zahl sein und 3 genannt werden, es ist also
- $3 :\equiv 2' = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$ zu den Zahlen zu rechnen usw.

---

551 Siehe S. 243–246.

552 Die Zahlen dieses Modells bilden (wie Theorem 5.16.47 zeigen wird) eine Teilmenge der Ordinalzahlen (siehe Abschnitt 5.14), die VON NEUMANN 1923 einführte (vgl. NEUMANN, *Transfinite Zahlen*).

Die Zahlen insgesamt wären also die Mengen der folgenden unendlichen Reihe:

$$\begin{gathered} 0 :\equiv \emptyset, \\ 1 :\equiv \{0\}, \\ 2 :\equiv \{0,1\}, \\ 3 :\equiv \{0,1,2\} \\ \text{usw.} \end{gathered}$$

Diese Reihe ist so aufgebaut, dass jede neue Zahl gerade ihre sämtlichen Vorgänger als Elemente enthält. Ferner enthält 0 kein Element, 1 genau ein Element, 2 genau zwei Elemente usw. Aber diese Erklärung ist noch unbefriedigend, da das „usw." ist in einer strengen Definition unstatthaft ist. Um zu einer klaren Definition zu kommen, rekapituliere man den Begriff der *induktiven Klasse* (Definition 5.16.3): Eine Klasse hatten wir induktiv genannt, wenn sie 0 enthält und mit jeder Zahl n auch ihren Nachfolger n'. Allerdings geht in diesen Begriff der Begriff der Zahl schon ein. Wir ersetzen ihn darum durch einen analogen Begriff, der *Vor-Induktivität* heißen möge, und der *ohne* den Zahlenbegriff definiert werden kann:

5.16.39 Definition Eine Klasse heißt *vor-induktiv*, wenn sie

- die Menge 0, d. h. $\emptyset$ enthält und
- immer, wenn sie eine Menge M enthält, auch deren Nachfolger $M' = M \cup \{M\}$ enthält.[553]

Zwei Beispiele von vor-induktiven Klassen können wir sofort angeben: die Klasse $\mathbb{D}$ aller Individuen und die Klasse $\mathbb{M}$ aller Mengen. $\mathbb{D}$ ist die „größte" vor-induktive Klasse. Demgegenüber definieren wir nun eine Klasse, die wir mit ω bezeichnen, und die, wie sich herausstellen wird, die „kleinste" vor-induktive Klasse ist. Deren Elemente sollen unsere ≪Zahlen≫ sein.

5.16.40 Definition Sei $\omega :\equiv \{x \mid \text{für jede vor-induktive Klasse } C \text{ gilt } x \in C\}$, das ist also die Klasse, deren Elemente die Individuen sind, welche *allen vor-induktiven Klassen zugleich* angehören. Diese nennen wir (mengentheoretische natürliche) *Zahlen*, definieren also ≪x ist Zahl≫ durch $x \in \omega$.

So haben wir nun die Konstanten ≪Nachfolger≫, ≪Null≫ und ≪Zahl≫ definiert, und es bleibt nachprüfen, ob für diese die PEANOschen Axiome gelten. Hierzu werden die beiden folgenden Theoreme benötigt. Das erste zeigt, dass ω die „kleinste" vor-induktive Klasse ist:

5.16.41 Theorem *ω ist eine vor-induktive Klasse, und zugleich ist ω Teilklasse aller vor-induktiven Klassen. Außerdem ist ω eine Mengenklasse.*

Beweis. Erstens gilt $\emptyset \in \omega$, da ja $\emptyset$ in *allen* vor-induktiven Klassen enthalten ist. Zweitens ist, wenn eine Menge M in ω liegt, dieses M Element *aller* vor-induktiven Klassen, weshalb auch M' Element *aller* vor-induktiven Klassen ist; also liegt dann auch M' in ω. Somit ist ω vor-induktiv. Sei nun C eine beliebige vor-induktive Klasse. Da jedes Element x von ω nach Definition von ω *allen* vor-induktiven Klassen zugleich angehören muss, gehört x auch zu C. Deshalb ist ω Teilklasse von C. Somit ist ω eine Teilklasse aller vor-induktiven Klassen, und da $\mathbb{M}$ eine solche Klasse ist, gilt schließlich $\omega \subseteq \mathbb{M}$, d. h. ω ist eine Mengenklasse. □

5.16.42 Theorem Für n aus ω gilt: *Alle Elemente von n' sind zugleich Teilmengen von n, d. h. es aus $x \in n'$ folgt stets $x \subseteq n$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 425–426. □ Nun lassen sich die Axiome verifizieren:

[553] Formal: C (ist) vor-induktiv $:\Leftrightarrow\ \emptyset \in C \wedge \bigwedge_{M \in \mathbb{M}} \big((M \cup \{M\}) \in C\big)$.

5.16.43 Theorem Man nehme

- als ≪Zahlen≫ die Elemente von ω (die nach Theorem 5.16.41 gewisse Mengen sind),
- als ≪Nachfolger≫ n' einer ≪Zahl≫ n die Menge $n \cup \{n\}$,
- als ≪Null≫ die leere Menge $\emptyset$.

Dann gelten die fünf PEANO*schen Axiome* (und damit alle Folgerungen aus diesen).

Beweis. Axiome (P1) (≪Null ist eine Zahl≫) und (P2) (≪der Nachfolger einer Zahl ist eine Zahl≫) gelten, weil ω gemäß Theorem 5.16.41 vor-induktiv ist. Axiom (P3) (≪Null ist nicht Nachfolger einer Zahl≫) gilt, weil jeder Nachfolger $M' := M \cup \{M\}$ im Gegensatz zu $\emptyset$ mindestens ein Element enthält, nämlich M. Zu Axiom (P4) (≪verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger≫) ist zu zeigen, dass für Zahlen m und n mit $m \neq n$ stets $m \cup \{m\} \neq n \cup \{n\}$ folgt. Sei also $m \neq n$ VORAUSGESETZT, und sei ANGENOMMEN, dass $m \cup \{m\} = n \cup \{n\}$. Nun ist m Element von $m \cup \{m\}$, das heißt nach ANNAHME Element von $n \cup \{n\}$, also von n', und nach Theorem 5.16.42 folgt daraus, dass $m \subseteq n$. Mit derselben Argumentation folgt, wenn man m und n vertauscht, dass $n \subseteq m$. Aus $m \subseteq n$ und $n \subseteq m$ folgt aber gemäß 5.10.4 S. 121 $m = n$ im Widerspruch zur VORAUSSETZUNG. So war die ANNAHME falsch, und es folgt $m \cup \{m\} \neq n \cup \{n\}$. Axiom (P5) schließlich (≪jede induktive Klasse enthält sämtliche Zahlen≫) kann man wie folgt beweisen. Sei C eine induktive Klasse im Sinne von Def. 5.16.3 S. 210, so dass also $0 \in C$ gilt und für jede *Zahl* n, die Element von C ist, auch $n' \in C$ ist. Zu zeigen ist, dass C sämtliche Zahlen enthält. Man betrachte hierzu die Klasse $C^* := C \cap \omega$, deren Elemente die Individuen sind, *die zugleich in C und in ω liegen.* Dieses C^* erweist sich dann als *vor-induktiv*,[554] also folgt aus Theorem 5.16.41, dass $\omega \subseteq C^*$. Weiter gilt $C^* = C \cap \omega \subseteq C$, also insgesamt $\omega \subseteq C^* \subseteq C$. Daher liegt jedes Element von ω in C, d. h. C enthält alle Zahlen. □

Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{\sigma}$ die Funktion, die jede Zahl n aus ω auf ihren Nachfolger $n \cup \{n\}$ wirft:

5.16.44 Definition $\boldsymbol{\sigma} :\equiv \langle x \in \omega \mapsto x \cup \{x\} \rangle$.

Jetzt können wir unser „Standardmodell“ als strukturierte Klasse $\langle \omega, \langle \emptyset, \boldsymbol{\sigma} \rangle \rangle$ auffassen:

5.16.45 Neumannsches Modell oder Standardmodell der Arithmetik *Das Modell $\langle \omega, \langle \emptyset, \boldsymbol{\sigma} \rangle \rangle$ heißt* NEUMANNsches Modell *oder* Standardmodell *der Arithmetik. Die Zahlen dieses Modells heißen* NEUMANNsche natürliche Zahlen.

Wir haben anfangs gesehen, dass jede NEUMANNsche Zahl ihre Vorgänger zu enthalten scheint: es ist $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$. Nun lässt sich allgemein zeigen, dass im NEUMANNschen Modell die Menge $\mathtt{Ab}(n)$ der Vorgänger einer Zahl mit dieser selbst identisch ist:

5.16.46 Theorem *Für jedes Element n von ω gilt $n = \mathtt{Ab}(n)$.*

Beweis durch vollständige Induktion. INDUKTIONSANFANG. 0 ist per Definition die leere Menge, und diese ist nach Satz 5.137 S. 219 mit $\mathtt{Ab}(0)$ identisch. INDUKTIONSSCHLUSS. Ist $n = \mathtt{Ab}(n)$ VORAUSGESETZT, so folgt $n' \underset{\text{DEF}}{=} n \cup \{n\} \underset{\text{VOR}}{=} \mathtt{Ab}(n) \cup \{n\} \underset{(5.16.33)}{=} \mathtt{Ab}(n+1) = \mathtt{Ab}(n')$. □

Die NEUMANNschen natürlichen Zahlen stehen in enger Beziehung zu den Ordinalzahlen:

5.16.47 Theorem *Jedes Element n von ω ist eine Ordinalzahl, d. h. es gilt $\omega \subseteq \Omega (= \mathtt{On})$. Außerdem gilt für die Kleinerrelationen $<_\omega$ des Standardmodells, die Kleinerrelation $<_{\mathtt{On}}$ für Ordinalzahlen, und Zahlen m und n aus ω, dass $m <_\omega n$ und $m <_{\mathtt{On}} n$ stets denselben Wahrheitswert*

[554] Denn erstens liegt 0 sowohl in C wie auch in ω, also gilt $0 \in C^*$. Zweitens gilt: Wann immer x in C^* liegt, liegt x in ω und auch in C, daraus folgt $x' \in \omega$ (weil x in ω liegt und ω vor-induktiv ist) und außerdem $x' \in C$ (weil x Zahl und C induktiv ist), insgesamt liegt also x' in C^*.

haben, so dass man im Kontext arithmetischer Relationsformeln zwischen $<_\omega$ *und* $<_{\mathtt{On}}$ *nicht zu unterscheiden braucht und für beides ein einziges Symbol* $<$ *nehmen kann.*

Beweis. Dass jedes n aus ω eine Ordinalzahl ist, folgt durch vollständige Induktion:
INDUKTIONSANFANG. 0 ist eine Ordinalzahl (Theorem 5.14.2 S. 190).
INDUKTIONSSCHLUSS. Sei das Element n von ω eine Ordinalzahl. Dann ist nach Theorem 5.14.4 S. 191 auch $n' = n \cup \{n\}$ eine Ordinalzahl. Durch diesen Induktionsbeweis ist also $\omega \subseteq \Omega$ bewiesen. Ferner gilt $m <_\omega n$ genau dann, wenn $m \in \mathtt{Ab}(n)$, dies gilt wegen 5.16.46 genau dann, wenn $m \in n$, und dies nach Definition 5.14.5 genau dann, wenn $m <_{\mathtt{On}} n$. □

Später wird sich zeigen, dass die NEUMANNschen natürlichen Zahlen die *kleinsten* Ordinalzahlen sind (siehe Abschnitt 5.28). Außer zu den Ordinalzahlen stehen die NEUMANNschen Zahlen auch in einer interessanten Beziehung zu den Klassenstufen oder FREGEschen Zahlen:

5.16.48 Theorem *Keine* NEUMANN*sche Zahl ist mit einer anderen gleichmächtig, infolgedessen liegt auf einer Klassenstufe stets höchstens eine einzige* NEUMANN*sche Zahl.*

Beweis. Nach Theorem 5.16.35 gilt für verschiedene Zahlen n und m (in einem *beliebigen* Modell der Arithmetik) stets, dass die *Abschnitte* $\mathtt{Ab}(n)$ und $\mathtt{Ab}(m)$ nicht gleichmächtig sind. Im NEUMANNschen Modell sind diese Abschnitte aber nach Theorem 5.16.46 mit den Zahlen m und n identisch. Also können n und m nicht gleichmächtig sein. Da nun alle auf derselben Klassenstufe liegenden Klassen gleichmächtig sind, kann auf jeder Klassenstufe nicht mehr als eine einzige NEUMANNsche Zahl liegen. □

Wir betrachten nun diejenigen Klassenstufen (oder FREGEschen Zahlen), auf denen NEUMANNsche natürliche Zahlen liegen, also die Stufen $\llbracket 0 \rrbracket, \llbracket 1 \rrbracket, \llbracket 2 \rrbracket$ usw. für $0, 1, 2 \ldots$ aus ω:

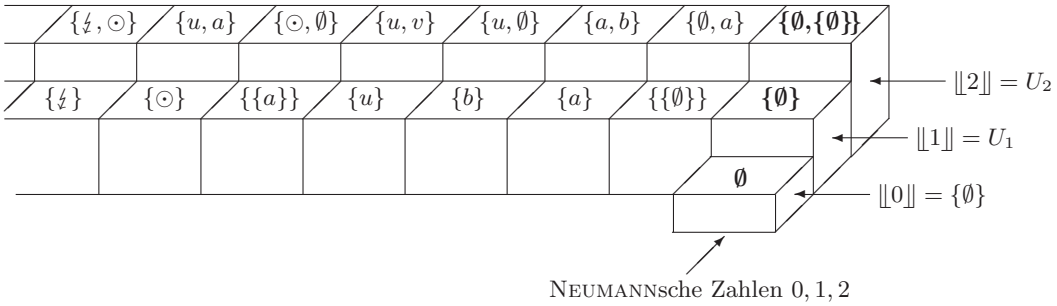


Abbildung 5.17: FREGEsche und NEUMANNsche Zahlen

Die NEUMANNsche Null (das ist $\emptyset$) ist also das einzige Element der untersten Mengenstufe, der FREGEschen Null $\llbracket 0 \rrbracket$. Die NEUMANNsche Eins (das ist $\{\emptyset\}$), die bemerkenswerterweise mit der FREGEschen Null identisch ist, ist ein besonderes Element der FREGEschen Eins $\llbracket 1 \rrbracket$, welche die Unmenge U_1 aller einelementigen Mengen ist. Die NEUMANNsche Zwei (das ist $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$) ist schließlich ein ausgezeichnetes Element der nächst höheren Mengenstufe, der FREGEschen Zwei $\llbracket 2 \rrbracket$, welche die Unmenge U_2 aller zweielementigen Mengen ist. Da die NEUMANNschen Zahlen *Mengen* sind (als Elemente der Mengenklasse ω), sind diese Stufen *Mengenstufen.*

Eine wichtige Frage können wir allerdings noch nicht beantworten: Ist die Klasse ω der Zahlen unseres Standardmodells, welche die „kleinste“ vor-induktive Klasse ist, „klein genug“, um selbst eine *Menge* zu sein, oder ist ω bereits eine Unmenge? Wäre ω eine Unmenge, so gäbe es (weil, wie sich herausstellen wird, ω die „kleinste“ unendliche Klasse ist) keine verschiedenen Stufen der Un-

endlichkeit: Unendlichkeit wäre mit Inkonsistenz gleichbedeutend.[555] Dass ω eine Menge ist, wird sich erst nach Aufstellung des Unendlichkeitsaxioms zeigen.[556]

Auf unserem Weg zur Erschließung des Unendlichkeitsaxioms ist es nun erforderlich, noch andere Modelle der Arithmetik zu betrachten. Schon bevor VON NEUMANN 1923 seine Zahlen einführte, hatte Ernst ZERMELO, der Begründer der axiomatischen Mengenlehre, als Zahlen die Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ usw. verwendet.[557] Um dieses „ZERMELOsche Modell" exakt einzuführen, definieren wir rekursiv eine Funktion Z:

$$Z\colon \omega \longrightarrow \mathbb{M}, \quad Z(0) := \emptyset, \quad Z(n') := \{Z(n)\},$$

wobei die Rekursion im Standardmodell der Arithmetik stattfindet. Die Werte von Z liegen in $\mathbb{M}$, sind also Mengen, und diese Mengen sollen die ZERMELOschen Zahlen sein:

5.16.49 Zermelosches Modell der Arithmetik

- «Zahlen» seien die Werte von Z, d. h. die Mengen $Z(n)$ für $n \in \omega$.
- Die «Null» sei $\emptyset$.
- Der «Nachfolger» einer «Zahl» x sei die Zahl $\{x\}$.

Mit diesen Festlegungen gelten die PEANO*schen Axiome*, sie legen also ein Modell der Arithmetik fest, und dieses heißt das ZERMELO*sche Modell*.

Beweis. Siehe Anhang S. 426. □ Eine andere Idee ist, als «Zahlen» diejenigen Mengenstufen (FREGEschen Zahlen) zu gebrauchen, auf denen NEUMANNsche Zahlen liegen, also die Stufen $\llbracket n \rrbracket$ für $n \in \omega$.[558] Allerdings wären diese «Zahlen», wenn wir von $\llbracket 0 \rrbracket$ absehen, Unmengen, so dass hierbei nur ein *Quasi-Modell* der Arithmetik herauskommen kann.[559] Die «Null» ist hier $\llbracket 0 \rrbracket$, und als «Nachfolger» einer Mengenstufe $\llbracket n \rrbracket$ nimmt man sinnvollerweise $\llbracket n' \rrbracket$, also die Mengenstufe, auf welcher der (NEUMANNsche) Nachfolger n' von n liegt. Diese Definition wäre mehrdeutig, wenn für Zahlen m und n mit $\llbracket m \rrbracket = \llbracket n \rrbracket$ die Stufen $\llbracket m' \rrbracket$ und $\llbracket n' \rrbracket$ verschieden sein könnten, aber dies ist glücklicherweise nicht der Fall.[560] Man kann also das FREGEsche (Quasi-)Modell der Arithmetik wie folgt definieren:

5.16.50 Fregesches Modell der Arithmetik

- «Zahlen» seien die Mengenstufen NEUMANNscher Zahlen: die Stufen $\llbracket n \rrbracket$ mit $n \in \omega$.
- Die «Null» sei $\llbracket 0 \rrbracket$, das ist $\{\emptyset\}$.
- Der «Nachfolger» einer «Zahl» $\llbracket n \rrbracket$ sei $\llbracket n' \rrbracket$.

Mit diesen Festlegungen gelten die PEANO*schen Axiome, wenn wir für* (P5) *die Formelversion nehmen.* Hierdurch ist ein *Quasi-Modell* der Arithmetik festgelegt: das FREGE*sche Modell*.

---

555 Dies wäre nicht nur das Ende des transfiniten Zweiges der Mengenlehre, sondern hätte auch für die gewöhnliche Mengenlehre fatale Konsequenzen. Man möchte ja Klassen bilden können, die ω oder alle Teilklassen von ω usw. als Element enthalten, was unmöglich wäre, wäre ω eine Unmenge.

556 Siehe 5.17.26 S. 242. Es wird sich herausstellen, dass die Aussage «ω ist eine Menge» sogar mit dem Unendlichkeitsaxiom äquivalent ist (siehe Theorem 5.17.25 S. 242).

557 ZERMELO, *Grundlagen der Mengenlehre* § 1 S. 267.

558 Wir werden sehen (5.156 S. 248), dass dies die Stufen sind, auf denen endliche Mengen liegen.

559 Zu Quasi-Modellen als Objekten der erweiterten Theorie siehe S. 211–212.

560 Sei $\llbracket m \rrbracket = \llbracket n \rrbracket$, so gilt $m \sim n$, also sind wegen Theorem 5.16.48 m und n ein und dasselbe Objekt, was dann auch für m' und n' und also für $\llbracket m' \rrbracket$ und $\llbracket n' \rrbracket$ gilt.

Beweis. Siehe Anhang S. 426–427. □ Die folgende Tabelle zeigt, dass schon die ersten ≪Zahlen≫ der drei bisher erwähnten Modelle ganz verschiedenartige mengentheoretische Objekte sind:[561]

	0	1	2	3
Neumann:	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
Zermelo:	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\{\{\emptyset\}\}\}$
Frege:	$\{\emptyset\}$	$\{x \mid x \text{ Einermenge}\}$	$\{x \mid x \text{ Zweiermenge}\}$	$\{x \mid x \text{ Dreiermenge}\}$

Die NEUMANNschen Zahlen liegen also auf verschiedenen FREGEschen Zahlen (welche abgesehen von $\llbracket 0 \rrbracket$ Unmengen sind) und die ZERMELOschen Zahlen (außer der 0) sind alle einelementig und liegen daher auf ein und derselben FREGEschen Zahl:

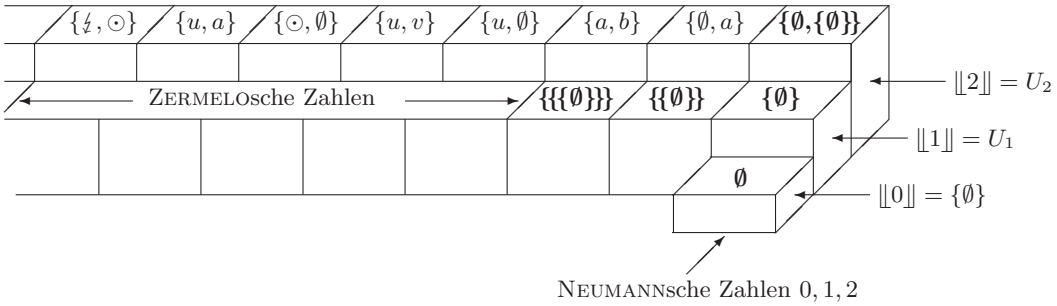


Abbildung 5.18: Die ersten Frege–, Zermelo– und Neumann-Zahlen

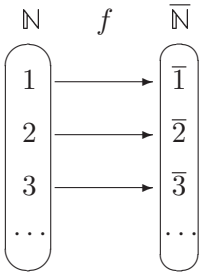
Es gibt auch Modelle, deren ≪Zahlen≫ *keine* Mengen sind. Insbesondere existieren *räumliche* Modelle, die für die realistische Mengenlehre von entscheidender Bedeutung sind, so dass wir auf diese noch zurückkommen müssen.[562]

Der Zusammenhang zwischen den Arithmetik-Modellen

Seien $\mathcal{N} := \langle \mathbb{N}, \langle 0, S \rangle \rangle$ und $\overline{\mathcal{N}} := \langle \overline{\mathbb{N}}, \overline{0}, \overline{S} \rangle$ zwei *beliebige* Modelle der Arithmetik. Um die Begriffe auseinanderzuhalten, benutze ich die Überstreichung, um den Bezug zu dem Modell $\langle \overline{\mathbb{N}}, \overline{0}, \overline{S} \rangle$ anzuzeigen. So bezeichnet 1 die Eins und $<$ die Kleinerrelation von $\mathcal{N}$, während $\overline{1}$ bzw. $\overline{<}$ die Eins bzw. Kleinerrelation von $\overline{\mathcal{N}}$ bezeichnet. Betrachtet man nun Venn-Diagramme der Klassen $\mathbb{N}$ und $\overline{\mathbb{N}}$, in denen sich 1 und $\overline{1}$, 2 und $\overline{2}$ usw. gegenüberstehen, so „sieht“ man, dass es eine Bijektion f von $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{N}}$ gibt, die 1 auf $\overline{1}$, 2 auf $\overline{2}$ usw. wirft.

561 Hier stehe ≪x (ist) Einermenge≫ für ≪es gibt ein Individuum a mit $x = \{a\}$≫, ≪x (ist) Zweiermenge≫ für ≪es gibt Individuen a, b mit $a \neq b$ und $x = \{a, b\}$≫ und ≪x (ist) Dreiermenge≫ für ≪es gibt a, b, c mit $a \neq b \neq c \neq a$ und $x = \{a, b, c\}$≫.

562 Zu diesen Modellen siehe S. 230–232. Anhand eines solchen Modells werden wir sehen, dass die Trägerklassen von Modellen der Arithmetik Mengen sind (siehe S. 231–232).



Man „sieht“ auch, dass f durch die folgenden zwei Bedingungen bestimmt ist: *Erstens* wirft sie 0 auf $\overline{0}$, formal: $f(0) = \overline{0}$. *Zweitens* wirft sie, wenn sie n auf $f(n)$ wirft, stets den Nachfolger von n auf den Nachfolger von $f(n)$, formal: $f(S(n)) = \overline{S}(f(n))$. Mit diesen Eigenschaften lässt sich die bisher anschaulich betrachtete Funktion f exakt durch Rekursion definieren:

$$\underbrace{\text{Sei } f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}}_{\text{Zielbereichs-Deklaration}} \quad \underbrace{\text{mit } f(0) := \overline{0},}_{\text{Rekursionsanfang}} \quad \underbrace{\text{und für } n \text{ aus } \mathbb{N}\colon f(S(n)) := \overline{S}(f(n)).}_{\text{Rekursionsschritt}} \tag{5.138}$$

Die wichtigste (nun formal beweisbare) Eigenschaft von f ist, dass f eine Bijektion von $\mathbb{N}$ und $\overline{\mathbb{N}}$ ist, und daher die Trägerklassen *aller* Modelle der Arithmetik gleichmächtig sind:

5.16.51 Theorem und Definition Für Modelle $\mathcal{N} := \langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle$ und $\overline{\mathcal{N}} := \langle \overline{\mathbb{N}}, \langle \overline{0}, \overline{S}\rangle\rangle$ heißt die gemäß (5.138) definierte Funktion f der *Arithmetik-Isomorphismus von $\mathcal{N}$ in $\overline{\mathcal{N}}$.*[563] *Für diesen gilt $\mathbb{N} \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} \overline{\mathbb{N}}$, so dass $\mathbb{N} \sim \overline{\mathbb{N}}$ gilt.*

Beweis. Sei f der Arithmetik-Isomorphismus von $\mathcal{N}$ in $\overline{\mathcal{N}}$, und g jener von $\overline{\mathcal{N}}$ in $\mathcal{N}$. Es gilt also $g(\overline{0}) = 0$ und $g(\overline{S}(m)) = S(g(m))$ für alle m aus $\overline{\mathbb{N}}$. Man sieht nun durch Induktion im Modell $\mathcal{N}$, dass $g(f(n)) = n$ für alle n aus $\mathbb{N}$ gilt.[564] Analog gilt $f(g(m)) = m$ für m aus $\overline{\mathbb{N}}$.

Um nun die *Injektivität* von f zu zeigen, ist für verschiedene Zahlen m und n aus $\mathbb{N}$ die Annahme zu widerlegen, dass $f(m)$ mit $f(n)$ identisch ist. Unter dieser Annahme aber wäre natürlich auch $g(f(m))$ dasselbe wie $g(f(n))$, doch nach dem eben Bewiesenen ist $g(f(m)) = m$ und $g(f(n)) = n$, also wäre $m = n$ im Widerspruch zur Verschiedenheit von m und n. Das widerlegt die Annahme, und somit ist f injektiv. Schließlich ist f auch *surjektiv*: Zu jedem m aus $\overline{\mathbb{N}}$ gibt es eine Zahl, die f auf m wirft, nämlich die Zahl $g(m)$, denn wir haben ja gesehen, dass $f(g(m)) = m$. So ist f in der Tat eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{N}}$. □

Ich möchte nun zwei Verfahren angeben, wie sich weitere Modelle der Arithmetik konstruieren lassen. Beim *ersten Verfahren* gehen wir von einem gegebenen Modell $\mathcal{N} := \langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle$ und irgendeiner Klasse $\overline{\mathbb{N}}$ aus, die mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist, und wählen ein Element $\overline{0}$ von $\overline{\mathbb{N}}$. Dann gibt es eine Bijek-

---

563 Formal: f_a (ist) Arithmetik-Isomorphismus von $\mathcal{N}$ in $\overline{\mathcal{N}}$ $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{N}$ Modell der Arithmetik $\wedge$ $\overline{\mathcal{N}}$ Modell der Arithmetik $\wedge$ $f_a = \boldsymbol{\iota}\, f\Big(f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}} \wedge f(0) = \overline{0} \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f(S(n)) = \overline{S}(f(n))\Big)$.

Eigentlich müsste man hier $\mathbb{N}, 0, S, \overline{\mathbb{N}}, \overline{0}, \overline{S}$ durch Beschreibungen ersetzen, in denen die damit bezeichneten Objekte durch $\mathcal{N}$ und $\overline{\mathcal{N}}$ ausgedrückt werden: $\mathbb{N}$ durch den Term $\ll\boldsymbol{\iota}\, x$ (x erste Komponente von $\mathcal{N}$)$\gg$, 0 durch $\ll\boldsymbol{\iota}\, x$ (x erste Komponente von $\boldsymbol{\iota}\, y$ (y zweite Komponente von $\mathcal{N}$))$\gg$, S durch $\ll\boldsymbol{\iota}\, x$ (x zweite Komponente von $\boldsymbol{\iota}\, y$ (y zweite Komponente von $\mathcal{N}$))$\gg$, und entsprechend für die überstrichenen Zeichen.

564 Induktionsanfang. $g(f(0)) = g(\overline{0}) = 0$. Induktionsschluss. Voraussetzung: $g(f(n)) = n$. Zu zeigen ist: $g(f(S(n))) = S(n)$. Nun ist $g(f(S(n)))$ aufgrund der Rekursionsgleichung für f identisch mit $g(\overline{S}(f(n)))$, was nach der Rekursionsgleichung für g mit $S(g(f(n)))$ identisch ist, und wegen der Voraussetzung ist dies $= S(n)$.

tion f von $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{N}}$, für die $f(0) = \overline{0}$ ist.[565] Da f eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{N}}$ ist, ist die Umkehrfunktion $f^{\rightharpoonup}$ von f eine solche von $\overline{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$. Nehmen wir nun

- als ≪Zahlen≫ die Elemente von $\overline{\mathbb{N}}$,
- als ≪Null≫ das Element $\overline{0}$ (d. h. $f(0)$) von $\overline{\mathbb{N}}$, und
- als ≪Nachfolger≫ einer ≪Zahl≫ n den Wert $f(f^{\rightharpoonup}(n) + 1)$,

so ist hierdurch ein neues Modell der Arithmetik mit Trägerklasse $\overline{\mathbb{N}}$ festgelegt.[566] Somit gilt:

5.16.52 Theorem *Ist $\mathcal{N} := \langle \mathbb{N}, \langle 0, S\rangle\rangle$ ein Modell der Arithmetik, und $\overline{\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig, so gibt es zu jedem Element $\overline{0}$ von $\overline{\mathbb{N}}$ mindestens ein Modell der Arithmetik, dessen Träger $\overline{\mathbb{N}}$ und dessen Null $\overline{0}$ ist.*

Theoreme 5.16.51 zeigt, dass alle Trägerklassen von Modellen der Arithmetik gleichmächtig sind, also im Klassenuniversum auf ein und derselben „Klassenstufe“ liegen, und Theorem 5.16.52 zeigt, dass *jede* mit einer Trägerklasse eines Arithmetik-Modells gleichmächtige Klasse auch selbst eine Trägerklasse eines Modells der Arithmetik ist. Damit ist bewiesen:

5.16.53 Theorem *Ist $\mathbb{N}$ Trägerklasse eines Arithmetik-Modells, so gilt $\mathbb{N} \sim X$ dann und nur dann, wenn X ebenfalls Trägerklasse eines Arithmetik-Modells ist.*

So liegen auf Klassenstufe von $\mathbb{N}$ *alle und nur die* Trägerklassen von Arithmetik-Modellen, und wir können diese Stufe daher als ≪die Stufe der Trägerklassen der Arithmetik-Modelle≫ ansehen. Als Standardbezeichnung für diese Klassenstufe nehmen wir natürlich $\llbracket\omega\rrbracket$, weil ω der Träger unseres Standardmodells der Arithmetik ist:

5.16.54 Korollar *Auf der Klassenstufe $\llbracket\omega\rrbracket$ liegen genau die Modelle der Arithmetik.*

Wir werden später sehen (Theorem 5.17.38 S. 245), dass diese Klassenstufe die Grenze zwischen den ≪endlichen≫ und ≪unendlichen≫ Klassen markiert, weil alle auf und über dieser Stufe liegenden Klassen unendlich, alle auf niedrigeren Stufen gelegenen Klassen aber endlich sind.

Das *zweite Verfahren* zur Konstruktion von Modellen der Arithmetik ist das folgende. Wir gehen aus von einer *Voll- oder Halbordnung $\sqsubset$ mit nichtleerem Feldbereich ohne maximales Element*,[567] so dass es also zu jedem Feldobjekt x ein y gibt mit $x \sqsubset y$. In dieser Situation kann man nun immer ein Modell der Arithmetik erhalten, derart dass

---

565 Aufgrund der Gleichmächtigkeit gibt es eine Bijektion g von $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{N}}$. Gilt für diese $g(0) \neq \overline{0}$, so gibt es ein von 0 verschiedenes Element n von $\mathbb{N}$ mit $g(n) = \overline{0}$. Wir können dann von g zu der Funktion f übergehen, die mit jedem von 0 und n verschiedenen Element von $\mathbb{N}$ dieselben Würfe wie g ausführt, aber 0 auf $\overline{0}$ (das ist $g(n)$) und n auf $g(0)$ wirft. f ist dann eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{N}}$ mit der Zusatzeigenschaft $f(0) = \overline{0}$.

566 (P1) und (P2) sind trivial. Zu (P3): ≪Null≫ ist kein ≪Nachfolger≫, andernfalls müsste für ein n aus $\overline{\mathbb{N}}$ gelten, dass $f(f^{\rightharpoonup}(n) + 1) = f(0)$; doch f wirft als Injektion *verschiedene* Zahlen aus $\mathbb{N}$ immer auf *verschiedene* ≪Zahlen≫ aus $\overline{\mathbb{N}}$, so dass die Funktionswerte $f(f^{\rightharpoonup}(n) + 1)$ und $f(0)$ nur dann gleich sein können, wenn auch $f^{\rightharpoonup}(n) + 1 = 0$ ist; aber das ist falsch, weil im Modell $\mathcal{N}$ (P3) gilt.

Zu (P4): Sind m und n verschieden, so folgt per Injektivität von $f^{\rightharpoonup}$, dass $f^{\rightharpoonup}(m) \neq f^{\rightharpoonup}(n)$, also (weil (P4) in $\mathcal{N}$ gilt) auch $f^{\rightharpoonup}(m) + 1 \neq f^{\rightharpoonup}(n) + 1$, also per Injektivität von f schließlich $f(f^{\rightharpoonup}(m) + 1) \neq f(f^{\rightharpoonup}(n) + 1)$.

Zu (P5): Sei C eine Klasse, die ≪Null≫, also $f(0)$, enthält, und die mit jeder ≪Zahl≫ n auch deren ≪Nachfolger≫ $f(f^{\rightharpoonup}(n) + 1)$ enthält. Zu zeigen ist, dass C alle ≪Zahlen≫ enthält. Sei C^* die Klasse $\{x \mid f(x) \in C\}$. Diese ist induktiv, denn 0 ist in ihr enthalten (da $f(0) \in C$) und wann immer $n \in C^*$ ist, liegt $z := f(n)$ in C, also auch der ≪Nachfolger≫ $f(f^{\rightharpoonup}(z) + 1)$ von z; wegen $z = f(n)$ ist aber $f^{\rightharpoonup}(z) = n$, also $f(f^{\rightharpoonup}(z) + 1) = f(n + 1)$; daher liegt $f(n + 1)$ in C, also $n + 1$ in C^*. Als induktive Klasse des Modells $\mathcal{N}$ enthält also C^* alle n aus $\mathbb{N}$. Nach Definition von C^* heißt dies: C enthält alle Funktionswerte $f(n)$ für n aus $\mathbb{N}$. Da nun f eine Surjektion von $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{N}}$ ist, enthält C damit alle Elemente von $\overline{\mathbb{N}}$, d. h. alle ≪Zahlen≫.

567 Vgl. Definition 5.13.4 S. 175.

- die ≪Zahlen≫ des Modells gewisse Feldobjekte von $\sqsubset$ sind, und
- und die Kleinerrelation $<$ des Modells zwischen ≪Zahlen≫ dieselben Ausrichtungen vornimmt wie die ursprüngliche Relation $\sqsubset$.

Um ein solches Modell zu erhalten, wählen wir ein Feldobjekt 0^* aus und nennen es ≪Null≫. Dann legen zu jedem Feldobjekt a ein Feldobjekt a^+ fest, derart dass $a \sqsubset a^+$ gilt (das geht, weil die Ordnung $\sqsubset$ ohne maximales Element ist) und nennen a^+ den ≪Nachfolger≫ von a. Als ≪Zahlen≫ sollen schließlich $0^*, 0^{*++}, 0^{*+++}, 0^{*++++}, \ldots$ fungieren. Diese Beschreibung lässt sich präzisieren. Wir definieren rekursiv eine Funktion f, welche die Elemente von ω auf Feldobjekte von $\sqsubset$ wirft, durch $f(\emptyset) = 0^*$ und $f(n') := f(n)^+$. Dann wirft diese Funktion die NEUMANNschen Zahlen auf diejenigen Feldobjekte, die wir als ≪Zahlen≫ haben wollen, und so können wir dann ≪Zahlen≫ formal als ≪die Werte von f≫ definieren. Jetzt lässt sich der folgende (anschaulich klare) Sachverhalt streng beweisen:

5.16.55 Theorem Sei $\sqsubset$ eine Ordnungsrelation [d. h. irreflexive und transitive Relation] mit nichtleerem Feldbereich ohne maximales Element. Sei ein Feldobjekt 0^* ausgewählt, und zu jedem Feldobjekt a sei a^+ ein Feldobjekt mit $a \sqsubset a^+$. Darauf aufbauend sei festgelegt:

- ≪Zahlen≫ sind die Werte der wie folgt (im Standardmodell) rekursiv definierten Funktion: $f\colon \omega \longrightarrow \mathtt{Fd}(\sqsubset)$, $f(0) := 0^*$ und $f(n') := f(n)^+$,
- ≪Null≫ ist 0^*, und
- der ≪Nachfolger≫ einer ≪Zahl≫ a ist a^+.

Dann gelten die PEANO*schen Axiome, und ist $<$ die Kleinerrelation dieses Modells, gilt außerdem für Feldobjekte a, b von $\sqsubset$ stets* $a < b \;\leftrightarrow\; a \sqsubset b$.

Beweis. Siehe Anhang S. 427–428. □ Mit diesem Satz lassen sich aus einem gegebenen Modell $\mathcal{N}$ der Arithmetik wie folgt zwei neue Modelle gewinnen. Sei $\sqsubset$ die Kleinerrelation von $\mathcal{N}$, 0^* die *Null* von $\mathcal{N}$ und für jede Zahl a von $\mathcal{N}$ sei a^+ der *Nachfolger des Nachfolgers* von a (also $a + 2$). Gemäß Theorem 5.16.55 erhalten wir so ein neues Modell $\mathcal{N}_g$, in dem die neue ≪Null≫ gleich der alten ist, der ≪Nachfolger≫ von 0 aber 2, der ≪Nachfolger≫ von 2 dann 4 usw. Die ≪Zahlen≫ des neuen Modells $0, 2, 4, \ldots$ nennen wir die ≪geraden Zahlen≫ von $\mathcal{N}$.

Wählen wir statt dessen als 0^* die *Eins* von $\mathcal{N}$, und legen a^+ wieder als *Nachfolger der Nachfolgers* von a fest, erhalten wir ein Modell $\mathcal{N}_u$, dessen ≪Null≫ die alte Eins ist, und dessen ≪Zahlen≫ $1, 3, 5 \ldots$ sind. Diese heißen die ≪ungeraden Zahlen≫ von $\mathcal{N}$. Damit haben wir folgendes Theorem bewiesen und die damit verbundene Definition motiviert:

5.16.56 Theorem und Definition Sei $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \langle 0, S \rangle \rangle$ ein Modell der Arithmetik.
Dann heißen die Werte der Funktion $\mathfrak{g}\colon \omega \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{g}(\emptyset) := 0$ und $\mathfrak{g}(n') := \mathfrak{g}(n) + 2$

die *geraden Zahlen* von $\mathcal{N}$.

Die Werte der Funktion $\mathfrak{u}\colon \omega \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{u}(\emptyset) := 1$ und $\mathfrak{u}(n') := \mathfrak{u}(n) + 2$ heißen

die *ungeraden Zahlen* von $\mathcal{N}$.

Wir setzen $\mathbb{N}_g := \{x \mid x \text{ ist gerade Zahl von } \mathcal{N}\}$ und $S_g := \langle n \in \mathbb{N}_g \mapsto n + 2 \rangle$,
und analog $\mathbb{N}_u := \{x \mid x \text{ ist ungerade Zahl von } \mathcal{N}\}$ und $S_u := \langle n \in \mathbb{N}_u \mapsto n + 2 \rangle$.
Dann sind $\mathcal{N}_g :\equiv \langle \mathbb{N}_g, \langle 0, S_g \rangle \rangle$ *und* $\mathcal{N}_u :\equiv \langle \mathbb{N}_g, \langle 1, S_u \rangle \rangle$ *Modelle der Arithmetik,*
und heißen *das Modell $\mathcal{N}_g$ bzw. $\mathcal{N}_u$ der geraden bzw. ungeraden Zahlen von $\mathcal{N}$.*

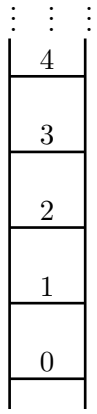
Anschaulich scheint klar zu sein, dass die Klassen $\mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_u$ eines Modells $\mathbb{N}$ kein gemeinsames Element haben und sich zu $\mathbb{N}$ vereinigen. Tatsächlich lässt sich zeigen:

5.16.57 Theorem *Sei $\mathbb{N}$ Träger eines Modells $\mathcal{N}$ der Arithmetik. Dann sind die Klassen $\mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_g$ der geraden bzw. ungeraden Zahlen dieses Modells disjunkt und es gilt $\mathbb{N}_g \cup \mathbb{N}_u = \mathbb{N}$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 428–429. □

Weitere Modelle der Arithmetik

5.16.58 Beispiel Leitermodell



Wir stellen uns eine Leiter vor, die keine höchste Stufe hat. Eine „natürliche“ Ordnungsrelation $\sqsubset$, die sich bei dieser Vorstellung aufdrängt, ist diejenige, welche die Stufe a genau dann auf eine Stufe b ausrichtet, wenn b oberhalb von a liegt. Diese Relation ist offensichtlich eine Ordnungsrelation mit nichtleerem Feldbereich ohne maximales Element. Sei nun 0^* irgendeine Stufe (zum Beispiel – wenn es eine solche gibt – die unterste), und zu jeder Stufe a wähle man irgendeine darüber liegende Stufe aus, die a^+ heißen soll (zum Beispiel die unmittelbar über a kommende Stufe, oder auch die übernächste usw.). Dann existiert nach Theorem 5.16.55 ein Modell der Arithmetik, dessen ≪Zahlen≫ gewisse Stufen, nämlich $0^*, 0^{*+}, 0^{*++}$ usw. sind, die wir dann natürlich wie üblich $0, 1, 2, \ldots$ nennen. Statt der „übereinander“ angeordneten Stufen einer Leiter oder Treppe können wir natürlich auch *irgendwelche anderen im Raum positionierten Gegenstände* nehmen, wenn diese in irgendeiner Reihenfolge hintereinander angeordnet sind, ohne dass es einen „letzten“ gibt.

5.16.59 Beispiel Zahlenstrahlmodell

Anstelle von ausgedehnten Gegenständen können wir auch Punkte als Zahlen verwenden. Betrachten wir eine Gerade mit der Links-rechts-Relation $\sqsubset$, wobei auf der Geraden zwei Punkte ausgezeichnet seien, die 0 (Nullpunkt) und 1 (Einspunkt) heißen. Eine solche Gerade nennen wir eine ≪Zahlengerade≫ (vgl. Definition 2.3.4 S. 21). Wählen wir dann als 0^* den Nullpunkt, und für jeden Punkt p als p^+ denjenigen links von p liegende Punkt, der genau so weit von p entfernt ist wie der Nullpunkt vom Einspunkt, so ist das hierdurch gemäß Theorem 5.16.55 konstruierte Modell der Arithmetik offensichtlich dasjenige, das der Schulmathematik zugrunde liegt und das bereits in Abschnitt 2.3 S. 21–22 vorgestellt wurde. Wir nennen es das *von* 0 *und* 1 *induzierte Zahlenstrahlmodell der Arithmetik*.

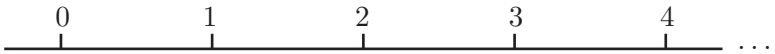


Abbildung 5.19: Zahlenstrahlmodell

Ein solches existiert *für beliebige voneinander verschiedene Punkte* 0 *und* 1, denn diese liegen ja immer auf genau einer Geraden g, und wir können uns immer so stellen, dass 1 links von 0 liegt. Insbesondere existiert auch ein *durch* 1 *und* 0 *induziertes* Modell, das von dem *durch* 0 *und* 1 *induzierten* zu unterscheiden ist. Denn die Strahlen, auf der die jeweiligen Zahlen liegen, haben verschiedene Ausgangspunkte 0 und 1 und erstrecken sich in die entgegengesetzte Richtung. Die Zahlen eines jeden Zahlenstrahlmodells aber erstrecken sich offenbar „ins Unendliche“ oder „über den ganzen Zahenstrahl“.[568]

[568] Wir werden das Zahlenstrahlmodell im Rahmen der axiomatischen Geometrie noch exakter in Abschnitt 5.21 einführen (Definition 5.21.16 S. 274). Die etwas vage Beschreibung, dass sich die Zahlen „über den ganzen Zahlenstrahl hin ins Unendliche erstrecken“ wird sich dann präziser formulieren und beweisen lassen (siehe Theoreme 5.21.18 S. 274 und 5.21.19 S. 274).

5.16.60 Beispiel Fadenmodell

Statt einer Geraden kann man auch eine beliebig gestaltete Linie betrachten, die sich nicht selbst kreuzt und einen Anfang, aber kein Ende hat. Man kann sich dann einen Faden vorstellen, der diese Linie genau abdeckt, und mit Hilfe dieses Fadens lässt sich über den Punkten der Linie wie folgt eine Relation $\sqsubset$ definieren: $x \sqsubseteq y$ gelte genau dann, wenn für die Punkte x' und y' auf dem Faden, mit denen die Linienpunkte x bzw. y koinzidieren, gilt, dass y' vom Anfangspunkt des Fadens weiter entfernt ist als x', *sobald man den Faden straff gezogen hat*. Nimmt man als Null den Anfangspunkt der Linie und als Nachfolger y eines Linienpunktes x stets einen solchen, für den $x \sqsubseteq y$ gilt, erhält man ein Modell der Arithmetik, das ich ein *Fadenmodell* nenne:

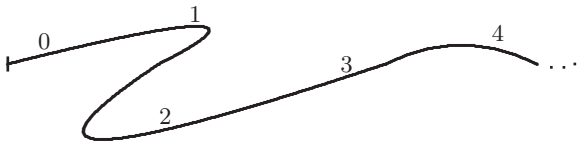


Abbildung 5.20: Fadenmodell der Arithmetik

5.16.61 Beispiel Streckenmodell

Gegeben sei eine Strecke mit „linkem“ Grenzpunkt α und „rechtem“ Grenzpunkt ω. Die Klasse A enthalte alle Punkt dieser Strecke, ausgenommen den rechten Grenzpunkt ω. Sei $\sqsubset$ die Ordnungsrelation über A, für die $a \sqsubset b$ genau dann gilt, wenn a links von b liegt. Als 0^* wählen wir den linken Grenzpunkt α und zu jedem Punkt x der Strecke sei als x^+ ein Punkt gewählt, der zwischen a und ω liegt, also beispielsweise derjenige Punkt, der sich genau in der Mitte zwischen 0^* und ω befindet. Gemäß unserem Verfahren erhalten wir mit diesen Daten ein Modell der Arithmetik, für welches ich die Bezeichnung *Streckenmodell der Arithmetik* vorschlage:

Abbildung 5.21: Streckenmodell

Das Besondere am Streckenmodell ist nun, dass sämtliche Zahlen auf „begrenztem Raum“ untergebracht sind. Wir können hier die ganze Zahlenreihe zwischen zwei Grenzen unterbringen, weil die Abstände zwischen benachbarten Zahlen für immer größer werdende Zahlen immer kleiner werden, während sie im Zahlenstrahlmodell stets gleich groß sind.

5.16.62 Beispiel Zeitmodelle und das Ziffernmodell

Anstelle von Raumpunkten kann man natürlich ebenso gut Zeitpunkte eines (unbegrenzten oder begrenzten) Zeitraums als Zahlen wählen. Neben diesen *Zeitmodellen* ist das *Ziffernmodell* erwähnenswert, dessen Zahlen direkt die mit den „Ziffern“ (d. h. den Zeichen $0, 1 \ldots 9$) gebildeten Zeichenreihen sind, die man gewöhnlich nur zur *Bezeichnung* von Zahlen einsetzt.[569]

Da nach Theorem 5.16.51 S. 227 alle Trägerklassen von Modellen der Arithmetik gleichmächtig sind, müssen wegen Theorem 5.12.10 S. 167 entweder sämtliche dieser Klassen Mengen oder sämtliche dieser Klassen Unmengen sein. Wenn wir daher auch nur *für ein einziges* Modell $\langle \mathbb{N}, \langle 0, S \rangle \rangle$

[569] Das Ziffernmodell theoretisch genau zu begründen ist nicht so einfach, wie es den Anschein hat. Der interessierte Leser findet bei Oberschelp, *Zahlensystem* S. 43–45 den Beweis, dass eine Bijektion von einer vorgegebenen Trägerklasse $\mathbb{N}$ eines Modells der Arithmetik in die Klasse $\mathfrak{N}$ der zur Bezeichnung von Zahlen verwendeten Ziffernreihen existiert. Mit Hilfe dieser Bijektion lässt sich dann gemäß unseres Theorems 5.16.52 S. 228 ein Modell der Arithmetik definieren, dessen ≪Zahlen≫ die Elemente von $\mathfrak{N}$ sind.

plausibel machen können, dass dessen Trägerklasse $\mathbb{N}$ eine Menge ist, gilt dies für *alle* Modelle. In der Tat lässt sich nun anhand eines Streckenmodells plausibel machen, dass seine Trägerklasse eine Menge ist. Die ≪Zahlen≫ eines Streckenmodells der Arithmetik stehen uns nämlich dadurch *als ein einheitliches Ganzes* vor Augen, dass es sich (a) um Punkte handelt, die alle zwischen dem Anfangs– und Endpunkt der Strecke eingeschlossen sind, und dass (b) trotzdem jeder einzelne Punkt dieser Gesamtheit durch klar erkennbare Lücken von der Gesamtheit aller übrigen abgegrenzt ist.[570] Diese beiden Bedingungen zusammengenommen erwecken die Überzeugung, dass die Vielheit dieser Punkte in Wirklichkeit „so übersichtlich zusammensteht", dass der Erkenntnisakt, mit dem wir sie erfassen, keinen Widerspruch involviert, also nichts zugleich beinhaltet und nicht beinhaltet.[571] *Damit ist also plausibel gemacht, dass die Klasse der Zahlen eines Streckenmodells (und somit auch die Trägerklasse eines beliebigen anderen Arithmetik-Modells) eine* Menge *ist*.[572] Eine solch beispielhafte Übersichtlichkeit, wie wir sie für die Zahlen des Streckenmodells konstatiert haben, ist weder für die Vielheit „aller" Punkte der Strecke gegeben (hier fehlt die klare Abgrenzung der einzelnen Punkte von der Gesamtheit) noch für die Zahlen des Zahlenstrahlmodells (hier fehlt die Begrenzung der Gesamtheit). Doch hat der Mengencharakter der Trägerklasse des Streckenmodells zur Folge, dass auch die Zahlen aller anderen Modelle eine Menge bilden.[573]

[570] Zwischen jeder Zahl und ihrem Nachfolger liegt ja jeweils ein (wenn auch noch so kleines) Intervall.

[571] Ich behaupte nicht, dass es sich bei diesem Erkenntnisakt um einen solchen handelt, bei dem uns jede einzelne Zahl unmittelbar anschaulich vor Augen steht. Das *menschliche* Erkenntnisvermögen scheint einen solchen Akt nicht vollziehen zu können: Haben wir eine anschauliche räumliche Vorstellung von Objekten auf einer Linie, so muss es offenbar immer ein „erstes" und ein „letztes" Objekt geben. Wie wir sehen werden, impliziert dies, dass die Anzahl der Objekte endlich ist (vgl. Theorem 5.17.31 S. 244). Unsere Vorstellung der unendlich vielen Zahlen des Streckenmodells ist also stets eine vermittelte: nämlich vermittelt durch die Vorstellung der Linie und diejenige des Festlegens von Punkten auf ihr. Das ändert aber nichts an der Tatsache, auf die es hier ankommt: dass nämlich diese Vorstellung widerspruchsfrei ist, also nicht zugleich etwas beinhaltet und nicht beinhaltet.

[572] Mir dieser Plausibilitätsbetrachtung werden wir das Unendlichkeitsaxiom (5.17.26 S. 242) rechtfertigen.

[573] Darüber hinaus wird sich zeigen, dass sogar die Klasse der reellen Zahlen (d. h. aller Punkte einer Geraden) und sogar diejenige aller Punkte des Raumes Mengen sind (vgl. Korollar 5.21.23 S. 275 und Theorem 5.21.44 S. 281). Auch für diese Folgerungen ist das Unendlichkeitsaxiom ausschlaggebend, das wir mit der übersichtlichen Unendlichkeit der Trägerklasse des Streckenmodells begründen werden.

5.17 Mathematische Einführung der Unendlichkeit

Vergleicht man eine Klasse C mit einer ihrer *echten Teilklassen* T, so ist T offensichtlich in gewisser Weise „kleiner“ als die ganze Klasse C (nach dem Euklidischen Axiom: „Das Ganze ist größer als der Teil“).[574] So liegt die Vermutung nahe, dass T auch im Sinne unseres exakt definierten mengentheoretischen Größenvergleichs (Definition 5.15.1 S. 200) kleiner als C ist: dass also $T \prec C$ gilt. Dies ist jedoch überraschenderweise falsch, denn *es gibt Klassen C, die mit einigen ihrer echten Teilklassen T gleichmächtig sind.* Wie schon in Kapitel 2 vermerkt, ist es gerade diese Eigenschaft, die in der Mathematik zur *Definition* der Unendlichkeit herangezogen wird (siehe S. 11–12). Wir können dies jetzt präzise wie folgt ausdrücken:

5.17.1 Definition Eine Klasse heißt *unendlich*, wenn C mit einer echten Teilklasse von C gleichmächtig ist, und sonst *endlich*.[575] Um die Unendlichkeit von C nachzuweisen, genügt es also, eine Bijektion von C in eine echte Teilklasse T von C (oder von C in T) zu finden.

Ich gebe nun einige Beispiele für echte Teilklassen T einer Klasse C an, die zu C gleichmächtig sind, wodurch sich C also gemäß obiger Definition als «unendlich» erweist.

5.17.2 Beispiel Jede Unmenge U ist gemäß 5.15.12 mit $U \setminus M$ gleichmächtig, wenn M eine Menge ist. Nimmt man als M eine nichtleere Teilmenge von U, ist $U \setminus M$ zudem echte Teilklasse von U. Also sind sämtliche Unmengen $(\mathbb{D}, \mathbb{M}, \mathbb{U}, \mathtt{On}, \dots)$ Beispiele für unendliche Klassen.

In den nächsten Beispielen ist C die Klasse $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen eines beliebigen Modells der Arithmetik, und die Teilklasse T die Klasse $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen ohne die Null oder die Klasse $\mathbb{N}_g$ der „geraden“ Zahlen $0, 2, 4, \dots$ bzw. $\mathbb{N}_u$ der „ungeraden Zahlen“ $1, 3, 5 \dots$ (siehe Definition 5.16.56 S. 229). $\mathbb{N}^*, \mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_u$ sind zweifellos *echte* Teilklassen von $\mathbb{N}$: Denn man erhält $\mathbb{N}^*$, indem man aus $\mathbb{N}$ das Element 0 entfernt, und um $\mathbb{N}_g$ bzw. $\mathbb{N}_u$ zu erhalten, muss man sogar eine „endlose Reihe von Elementen“ aus $\mathbb{N}$ entfernen.

5.17.3 Beispiel Die Klassen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ sind gleichmächtig.

Beweis. Die Sukzessorfunktion, d. h. die Funktion S, die jede Zahl n aus $\mathbb{N}$ auf die nächst größere Zahl $n+1$ wirft, ist nach Korollar 5.16.14 eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^*$. □ Es ist auch *anschaulich* klar, dass diese Funktion eine Bijektion ist, wenn man sich das folgende Pfeildiagramm von S ansieht, in dem sich die Elemente von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ exakt gegenüberstehen:

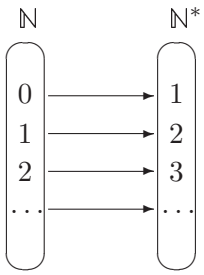


Abbildung 5.22: Eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^*$

5.17.4 Beispiel Die Klasse $\mathbb{N}$ der Zahlen $0, 1, 2 \dots$ ist gleichmächtig mit der Klasse $\mathbb{N}_g$ der geraden Zahlen $0, 2, 4, \dots$ und auch mit der Klasse $\mathbb{N}_u$ der ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \dots$.

[574] Euklid, *Elemente* Buch 1 Axiom 8(9), Ausgabe Heiberg/Stamatis Band 1 S. 6, Ausgabe Thaer S. 3.

[575] Formal: C (ist) unendlich $:\Leftrightarrow \bigvee_T (T \subset C \wedge T \sim C)$. C (ist) endlich $:\Leftrightarrow \neg(C$ ist unendlich$)$.

Beweis. Wir haben gesehen (5.16.56 S. 229), dass sowohl $\mathbb{N}_g$ als auch $\mathbb{N}_u$ ebenso wie $\mathbb{N}$ selbst eine Trägerklasse eines Modells der Arithmetik ist. Daher folgt nach Theorem 5.16.51 S. 227, dass alle drei Klassen gleichmächtig sind, weil der Isomorphismus von der einen in die andere jeweils eine Bijektion ist. □ So wirft der Isomorphismus f von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}_g$ die 0 auf 0, die 1 auf 2, die 2 auf 4 usw., und man erkennt anhand des folgenden Pfeildiagramms von f auch *anschaulich*, dass sich die Elemente von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_g$ restlos in Paaren gegenüberstellen lassen und somit eine Bijektion vorliegt:

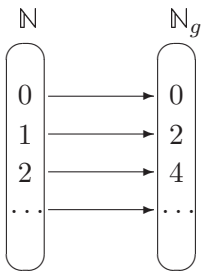


Abbildung 5.23: Eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}_g$

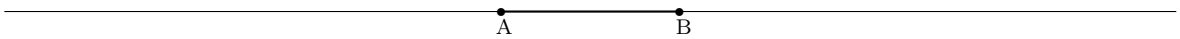
Diese Beispiele zeigen nun, dass $\mathbb{N}$ das Unendlichkeitskriterium 5.17.1 erfüllt. Es gilt also:

5.17.5 Theorem *Die Trägerklasse eines jeden Modells der Arithmetik ist unendlich.*

Unser nächstes Beispiel für die Gleichmächtigkeit einer Klasse mit einer echten Teilklasse entnehmen wir der geometrischen Anschauung:

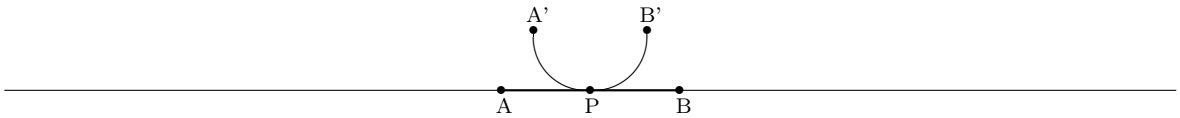
5.17.6 Beispiel Die Klasse *aller* Punkte einer Geraden ist gleichmächtig mit der Klasse der Punkte zwischen zwei Punkten A und B auf dieser Geraden.

Bemerkung und genauere Erläuterung der Behauptung: Sei G die Klasse aller Punkte der Geraden. Wir markieren auf dieser Geraden zwei verschiedene Punkte A und B.



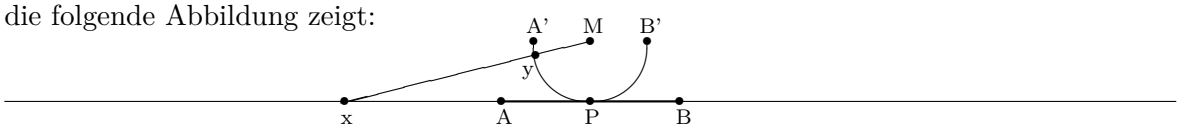
Unter den Punkten zwischen A und B verstehe ich hier diejenigen, die bezüglich der Links-Rechts-Relation im offenen Intervall (A, B) liegen, also von A und B selbst verschieden sind. Ich werde später den Sachverhalt, dass (A, B) mit ganz G gleichmächtig ist, in einem allgemeineren Kontext aus geometrischen Axiomen herleiten (Korollar 5.21.23 S. 275). Hier gebe ich eine anschauliche Plausibilitätsbetrachtung dafür an, die meines Erachtens vollkommen ausreicht, um über das Bestehen des Sachverhalts die volle Gewissheit zu erlangen.

Plausibilitätsbetrachtung. Sei $T := (A, B)$ die Klasse der zwischen A und B liegenden Punkte. Wegen $T \subseteq G$ folgt aus 5.89 S. 200, dass $T \precsim G$. Wenn auch $G \precsim T$ gilt, folgt aus Theorem 5.15.5 S. 201, dass $T \sim G$, was wir zeigen wollen. Zu zeigen ist also nur $G \precsim T$, und dies ist (wegen Satz 5.90 S. 200) bewiesen, wenn es gelingt, eine Injektion von G in T anzugeben. Hierzu denken wir uns einen Halbkreis, der die Gerade im Mittelpunkt P der von A und B begrenzten Teilstrecke berührt, wie es im folgenden Bild dargestellt ist:



Den Halbkreis denken wir uns genau so groß, dass der linke Randpunkt A' des Halbkreises, wenn man den Halbkreis auf der Geraden nach links abrollt, auf den Punkt A zu stehen kommt. Entsprechend muss dann der rechte Randpunkt B' des Halbkreises, wenn man den Halbkreis auf der Geraden nach rechts abrollt, mit B zusammenfallen. Es ist dann also der Halbkreis „genauso groß“, wie die Strecke AB. Sei nun H die Klasse der Punkte, die zwischen A' und B' auf dem Halbkreis liegen

(ausgenommen die Punkte A' und B' selbst). Unser Existenzbeweis für die Injektion besteht nun aus zwei Teilen. Erstens zeigen wir, dass es eine Injektion von G in H gibt, und zweitens, dass es eine Injektion von H in T gibt; durch Komposition beider Injektionen erhält man dann eine solche von G in T. *Erstens*: Es gibt eine Injektion von G in H. Ist nämlich x ein beliebiger Punkt der Geraden, so können wir x mit dem Mittelpunkt M des Halbkreises durch eine gerade Linie verbinden, wie es die folgende Abbildung zeigt:



Diese Linie schneidet den Halbkreis in einem Punkt y, der zu H gehört, und diesen Punkt erklären wir zum Funktionswert von x. Die so definierte Funktion von G in H ist offenbar injektiv. *Zweitens*: Die Funktion, die jeden Punkt x aus H auf denjenigen Punkt y aus T wirft, mit dem x beim Abrollen des Halbkreises auf der Geraden zusammenfällt, ist offenbar ebenfalls injektiv. □

Die nun plausibel gemachte Tatsache, dass die Punkte von zwei geometrischen Orten, von denen der eine offensichtlich „kleiner“ ist als der andere, dennoch ohne Rest paarweise einander zugeordnet werden können, war schon in der Scholastik bekannt. Mit Nachdruck machte vor allem Duns Scotus (1265–1308) auf zwei Beobachtungen dieser Art aufmerksam:[576]

a) Die Seite eines Quadrats hat genauso viele Punkte wie die Diagonale, obgleich diese länger ist als die Seite. Verbindet man nämlich zwei gegenüberliegende Seiten durch parallele Linien, so verbinden diese auch jeden Punkt einer Seite mit genau einem Punkt der Diagonalen und umgekehrt.

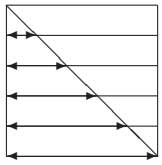


Abbildung 5.24: Die Seite und die Diagonale des Quadrats haben gleich viele Punkte

b) Die Kreislinien zweier konzentrischer Kreise haben gleich viele Punkte, obgleich die Kreislinie des größeren Kreises länger ist. Denn die vom gemeinsamen Mittelpunkt ausgehenden Strahlen treffen stets beide Kreislinien und verbinden dabei deren Punkte so, dass jeder Punkt der kleinen Kreises mit je einem Punkt der größeren verbunden wird und umgekehrt.

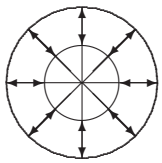


Abbildung 5.25: Die Kreislinien des inneren und des äußeren Kreises haben gleich viele Punkte

Scotus spricht diese Tatsachen allerdings nur hypothetisch aus: *Wenn* Linien aus Punkten zusammengesetzt sind, so gibt es auf zwei verschieden großen Kreisen bzw. auf der Seite und der Diagonale des Quadrats gleich viele Punkte. Da er diese Konsequenzen aber *ablehnt* (weil sie dem Axiom widersprechen, dass der Teil nicht größer ist als das Ganze), zieht er die Schlussfolgerung, dass *das Kontinuum in Wirklichkeit gar nicht aus Punkten besteht.*

576 Siehe Scotus, *Ordinatio* Buch 2 distinctio 2 pars 2 quaestio 5 sectio 320f, Ausgabe Balić Band 7 S. 292f und ebd. sectio 329f, S. 296f. Dieselben Stellen sind zu finden in Scotus, *Opus Oxoniense* Buch 2 distinctio 2 Quaestio 9, Ausgabe Waddingus Band 11 S. 392 und 394.

Albert von Sachsen († 1390) stellte die Behauptung auf, es gebe „nicht mehr Teile im Ganzen als in seiner Hälfte, und auch im Himmel nicht mehr als in einem Hirsekorn“.[577] In seinen *Quaestiones subtilissime in libros Aristotelis de celo et mundo* (um 1360) führt er den Gedanken näher aus, dass man mit einem unendlich langen Körper, der ein Fuß breit, ein Fuß hoch und in eine Richtung („nach Westen hin“) unendlich lang ist, durch Umordnen seiner Teile das ganze unendliche Weltall lückenlos auffüllen kann.[578] Hierzu teilt Albert den Körper in Klötze von je einem Fuß Länge ein. Er formt dann den ersten Klotz zu einer Kugel um (ohne die Masse zu „verdünnen“ oder neue Masse hinzuzufügen). In einem zweiten Schritt vergrößert er diese Kugel dadurch, dass er die Masse des zweiten Klotzes hinzufügt, und das ganze so verformt, dass wieder eine Kugel entsteht. Dann fügt er die Masse des dritten Klotzes hinzu usw. ad infinitum. Auf diese Weise würde, so behauptet Albert, ein den ganzen Raum ausfüllender unendlicher Körper entstehen.[579]

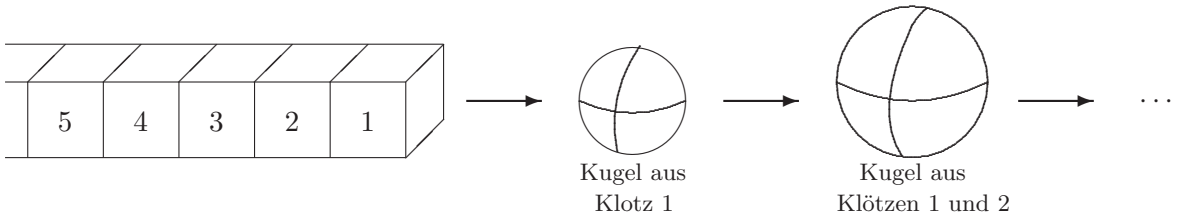


Abbildung 5.26: Ausfüllung des ganzen Raumes mit dem Material eines unendlichen Quaders

Warum dies so ist, hat Albert nicht weiter begründet. Da der Radius der Kugel nach jedem Schritt offenbar *langsamer* wächst, ist das nicht ganz selbstverständlich. Man kann Alberts Behauptung aber wie folgt beweisen. Das Volumen des Körpers in seiner ursprünglichen Form (als unendlich langer Quader) ist unendlich. Da nun Albert nichts anderes tut, als den *ganzen* Körper zu einer Kugel umzuformen, ist das Volumen dieser Kugel ebenfalls unendlich. Ihr Radius kann dann aber nicht endlich sein, *weil Kugeln mit endlichen Radien auch endliche Volumina haben*. Also ist der Radius der entstehenden Kugel unendlich, so dass die Kugel den ganzen Raum ausfüllt.

Galilei wies in seinen *Discorsi* (1638) auf folgendes Paradoxon hin, das man an jedem Rad beobachten kann: Hat man starr miteinander verbundene konzentrische Kreise und lässt den größeren auf einer Strecke abrollen, so überstreicht der kleinere eine genau gleich lange Strecke:

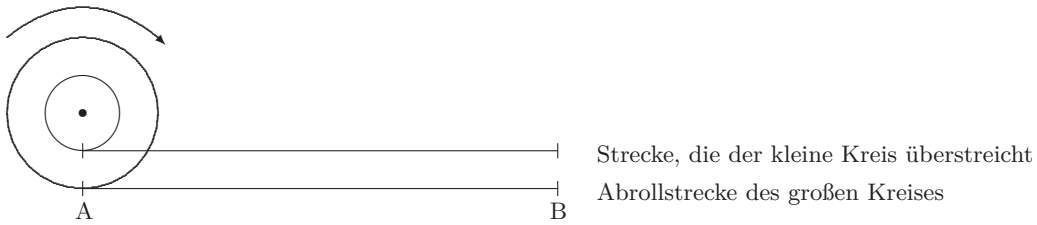


Abbildung 5.27: Der kleine und der große Kreis überstreichen eine gleich lange Strecke

Galilei versuchte dies dadurch zu erklären, dass es zwischen den Punkten des kleineren Kreises unendlich viele Lücken geben müsse – zweifellos eine Verlegenheits-Hypothese.[580]

577 *Kommentar zur Physik* III, quaestio 14 articulus 2, zitiert nach Maier, *Vorläufer Galileis* S. 167: „[N]on sunt plures partes in toto quam in eius medietate, nec in caelo quam in grano milii“.

578 Buch I quaestio 10, folio 11 verso, zweite Spalte oben.

579 Vgl. *De celo et mundo* Buch I quaestio 10, folio 12 recto, zweite Spalte. Albert zog hieraus allerdings den falschen Schluss, man könnte unendliche Körper nicht der Größe nach vergleichen.

580 Galilei, *Discorsi* Erster Tag, Werke Band 8 S. 70–72, Ausgabe Oettingen S. 22–25.

Diese Beobachtungen von Scotus, Albert und Galilei beruhen alle darauf, dass es für eine echte Teilklasse T einer Klasse C wahr sein kann, dass $T \sim C$. Beim Quadratbeispiel kann man sich nämlich eine bewegliche Messstrecke denken, die genau die Länge der Quadratseite hat, und die man auf die Diagonale legt. Es ist dann anschaulich klar, dass die Messstrecke nur einen Teil der Diagonale einnimmt, so dass die Klasse T der Diagonalenpunkte, die mit der Messstrecke koinzidieren, eine echte Teilklasse der Klasse C aller Diagonalenpunkte ist. Nun ist die Klasse T mit der Klasse S aller Punkte der linken Seite des Quadrats gleichmächtig (weil S und T beide mit der Klasse der Punkte auf der Messstrecke gleichmächtig sind). Da nach der Argumentation von Scotus aber S auch mit C gleichmächtig ist, folgt $T \sim C$. Bei den Kreisbeispielen von Scotus und Galilei denke man sich als T die Klasse derjenigen Punkte des großen Kreises, die ein Faden abdeckt, der die Länge der kleineren Kreislinie hat, und als C die Klasse aller Punkte des großen Kreises: Es ist dann T wieder eine echte Teilklasse von C, die mit der Klasse S der Punkte des kleineren Kreises gleichmächtig ist. Da die Überlegungen von Scotus und Galilei aber zeigen, dass S auch mit C gleichmächtig ist, ist auch hier $T \sim C$. Das Beispiel von Albert schließlich zeigt direkt, dass die Klasse der Punkte des Quaders mit der Klasse der Punkte des ganzen Raumes gleichmächtig ist.

In allen diesen Beispielen zeigt sich also immer wieder ein Paradoxon der folgenden Art. Es werden zwei Klassen C und T aufgezeigt, die

(1) einerseits *gleich viele* Elemente haben, während andererseits
(2) C *mehr* Elemente als T hat, da man C aus T durch *Hinzufügung* von Elementen erhält.

Doch ist dies kein Widerspruch, da wir es mit verschiedenen Gesichtspunkten zu tun haben. Dass C und T gleich viele Elemente haben, gilt hinsichtlich eines Größenvergleichs, den ich *relationstheoretisch* nenne, weil er sich auf die Existenz oder Nichtexistenz von Funktionen gründet. Dass aber C mehr Elemente als T hat, liegt daran, dass man C erhält, indem man Elemente zu T hinzufügt; diesen Größenvergleich nenne ich *ergänzungstheoretisch*. Da sich diese beiden Arten des Größenvergleichs konzeptuell unterscheiden, handelt es sich nicht um einen Widerspruch, sondern nur um den Schein eines solchen. Dieser Schein rührt daher, dass bei den uns alltäglich begegnenden ≪endlichen≫ Klassen beide Größenvergleiche stets *dasselbe Ergebnis liefern*: Eine Klasse C hat hier immer *unter beiden Gesichtspunkten* mehr Elemente als eine echte Teilklasse T von C.

Abschließend möchte ich die zur Definition der Unendlichkeit benutzte Eigenschaft und den Unterschied zwischen der relationstheoretischen und ergänzungstheoretischen Größerbeziehung durch das Gleichnis des so genannten Hilbertschen Hotels illustrieren, das auf David Hilbert zurückgeht.[581] Dieses Hotel hat so viele Zimmer wie es natürliche Zahlen gibt: Jede natürliche Zahl taucht als Zimmernummer genau einmal auf. Wenn das Hotel voll besetzt ist, und es kommt ein weiterer Gast, so kann dieser dennoch ein Zimmer erhalten: Der Portier braucht jedem Gast nur den Auftrag zu erteilen, in das Zimmer mit der nächst höheren Zimmernummer zu wechseln. Gemäß der Bijektion von Beispiel 5.17.3 werden dann die (für die Gäste stehenden) Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ auf die (für die Zimmer stehenden) Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ geworfen. Durch diese „Umverteilung“ wird Zimmer Nr. 0 für den neuen Gast frei. *Ergänzungstheoretisch* hat das Hotel nun mehr Gäste als zuvor (nämlich einen zusätzlichen Gast), aber *relationstheoretisch* hat es immer noch gleich viele Gäste.

Durch Umverteilung kann man sogar für *unendlich viele* Neuankömmlinge Platz schaffen. Denn wie wir in Beispiel 5.17.4 gesehen haben, gibt es eine Bijektion, welche die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ auf die geraden Zahlen $0, 2, 4, 6, 8 \ldots$ wirft. Schickt man gemäß dieser Bijektion die unendlich vielen

[581] Das Hotel-Gleichnis taucht in zahlreichen Varianten in der populärwissenschaftlichen Literatur auf, aber fast immer ohne Quellenangabe. Nach Rucker, *Infinity and the Mind* S. 107 pflegte Hilbert „seine populären Vorträge mit Geschichten über ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern aufzulockern“. Bei Gamow, *Infinity* S. 17 Fußnote 8 fand ich den Hinweis, dass die Informationen über entsprechende Vorträge Hilberts in einem unpublizierten Band mit dem Titel *The complete Collection of Hilbert Stories* zu finden sind, der von dem Mathematiker Richard Courant (1808–1972) verfasst wurde. Courant war zeitweise Hilberts Assistent in Göttingen.

bisherigen Gäste auf die Zimmer mit geraden Nummern, so werden die ebenfalls unendlich vielen Zimmer mit ungerader Zimmernummer frei.

Dennoch können nicht *beliebig* viele Gäste aufgenommen werden. Das würde nämlich implizieren, dass es von einer beliebigen Klasse C von Gästen stets eine Injektion in die Menge der Zimmer gibt, welche die Größe der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen hat. Dann wäre für alle Klassen C stets $C \precsim \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ hätte daher die „größte“ überhaupt existierende Klassen-Größe. Demgegenüber werden wir sehen, dass es Klassen und sogar Mengen gibt, die relationstheoretisch mehr Elemente als $\mathbb{N}$ haben,[582] und so stößt das Hotel trotz seiner unendlich vielen Zimmer irgendwann an seine Grenzen.

Wir haben nun in den obigen Beispielen gesehen, dass es Klassen gibt, welche gemäß Definition 5.17.1 S. 233 als ≪unendlich≫ bezeichnet werden müssen: z. B. $\mathbb{D}, \mathbb{N}$ und die Klasse der Punkte einer Geraden (die wir später auch als ≪Klasse $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen≫ bezeichnen werden). Auch ist es klar, dass es sich bei diesen Klassen um „ungewöhnliche“, nicht leicht vorstellbare Klassen handelt. *Noch zu erläutern* ist aber, inwiefern diese „Ungewöhnlichkeit“ tatsächlich das ist, was wir im alltäglichen Sprachgebrauch meinen, wenn wir eine Klasse ≪unendlich≫ nennen: dass sie nämlich weder 0, noch 1 noch 2 usw. Elemente hat, d. h. dass sich keine der zum Zählen benutzten Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ als ≪die Anzahl ihrer Elemente≫ erweist. Unter diesen Zahlen stellen wir uns nun gewöhnlich nicht die FREGEschen Zahlen vor,[583] sondern unser Denken bezieht sich beim Zählen, wie PEANO richtig beobachtet hat, auf *die Zahlen irgendeines den fünf Axiomen entsprechenden Modells der Arithmetik*. Ich meine zwar, dass es ein „natürlicherweise ausgezeichnetes“ Modell gibt (siehe Abschnitt 5.33), aber zum Zählen kann man jedes andere genauso gut benutzen.

Wir betrachten daher nun irgendein beliebiges, aber fest gewähltes Modell der Arithmetik, auf das sich die Bezeichnungen $\mathbb{N}, +, <, \mathtt{Ab}(n), 0, 1, 2$ usw. bis zum Ende dieses Abschnitts beziehen sollen. Für die Mengen $\mathtt{Ab}(n)$ der Vorgänger einer Zahl n gilt nun:

- 0 hat keinen Vorgänger, so dass $\mathtt{Ab}(0)$ die leere Menge ist (vgl. Korollar 5.16.34 S. 220), und von dieser sagen wir, dass sie 0 *Elemente hat*;
- 1 hat nur die Zahl 0 als Vorgänger, so dass $\mathtt{Ab}(1)$ die einelementige Menge $\{0\}$ ist (vgl. dasselbe Korollar), und von dieser sagen wir, dass sie 1 *Element hat*;
- die Vorgänger von 2 sind 0 und 1, so dass $\mathtt{Ab}(2)$ die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ ist (vgl. dasselbe Korollar), und von dieser sagen wir, dass sie 2 *Elemente hat* usw.

Im Einklang mit dem alltäglichen Sprachgebrauch hat also $\mathtt{Ab}(n)$ *immer* n *Elemente*. Ist nun C eine beliebige Klasse, sagen wir daher, dass sie n Elemente hat, wenn sie „genau so viele“ Elemente wie $\mathtt{Ab}(n)$ hat, d. h. wenn $\mathtt{Ab}(n)$ und C gleichmächtig sind. So gelangen wir zu folgender Definition:

5.17.7 Definition Für jede natürliche Zahl n und jede Klasse C legen wir fest:

$$C \text{ hat } n \text{ Elemente } :\Leftrightarrow \mathtt{Ab}(n) \sim C.$$

Hat C n Elemente, so heißt n auch die *Mächtigkeit von* C oder die *Anzahl der Elemente von* C; diese ≪Anzahl≫ ist von der FREGE*schen* Anzahl (Definition 5.12.14 S. 170) zu unterscheiden.

---

582 Z. B. ist $\mathbb{D}$ in diesem Sinne größer als $\mathbb{N}$ (siehe Theorem 5.17.37 S. 245) und dasselbe gilt für die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder der Punkte eines Kontinuums (siehe Abschnitt 5.21). Auch ist die Potenzmenge jeder Menge M stets relationstheoretisch größer als M (siehe 5.20.19 S. 262). Kommen also z. B. so viele Gäste, wie es Punkte auf einer Strecke oder Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt, so können diese nicht aufgenommen werden.

583 Würden wir zum „Zählen“ *alle* FREGEschen Zahlen zulassen, so gäbe es gar keine „unzählbaren“ Klassen, denn *jede* Klasse hat ja ihre FREGEsche Anzahl. Wenn überhaupt an FREGEsche Zahlen, so denken wir also beim Zählen nur an diejenigen, die als Zahlen im FREGEschen Modell der Arithmetik fungieren. Aber auch das halte ich für unwahrscheinlich (siehe hierzu Abschnitt 5.33).

Bemerkung. Wir legen hier ein *beliebiges* Modell der Arithmetik zugrunde, und so bezieht sich die Definition von ≪C hat n Elemente≫ auf dieses willkürlich gewählte Modell. Für eine „offizielle" Definition ist dies natürlich unpassend, und so möge man als „offizielle" Version der Definition diejenige ansehen, bei der n und $\mathtt{Ab}(n)$ zum NEUMANN*schen* Modell gehören (siehe auch 5.157 S. 248). – Nun kann eine wissenschaftliche Erklärung des „Zählens" gegeben werden:

5.17.8 Erklärung Das *Zählen* ist ein Verfahren zur Ermittlung der Anzahl der Elemente einer Klasse: Man zeigt schrittweise auf je ein Element, ohne ein zweites Mal auf dasselbe Element zurückzukommen, und nennt dabei jeweils den Namen einer Zahl, wobei man mit Eins beginnt, und im nächsten Schritt stets zum Nachfolger der zuletzt genannten Zahl übergeht. Dies tut man dies solange, bis das Verfahren nicht mehr fortgesetzt werden kann, weil es keine Elemente der Klasse mehr gibt, auf die man noch nicht gezeigt hat. Die zuletzt genannte Zahl betrachtet man dann als die „Anzahl der Elemente" jener Klasse. – Zu recht, denn es gilt:

5.17.9 Theorem *Die beim Zählen der Elemente einer Klasse C zuletzt genannte Zahl n ist die Anzahl der Elemente von C.*

Beweis. Der Zählvorgang kann als Festlegung einer Funktion verstanden werden: nämlich der Funktion, die jede Zahl, *die man beim Zählen nennt*, jeweils auf dasjenige Element der Klasse C wirft, *auf das man beim Zählen zeigt*. Wenn das Verfahren endet, so ist diese Funktion offenbar eine Bijektion von $[1, n]$ (der Klasse aller Zahlen zwischen 1 und n, diese eingeschlossen) in C: Sie ist injektiv, da man *nicht mehrfach* auf ein und dasselbe Element von C gezeigt hat, und sie ist eine Surjektion, da man zählt, bis man auf *alle* Elemente von C gezeigt hat. Also ist dann $[1, n] \sim C$, und da auch $\mathtt{Ab}(n) \sim [1, n]$ ist,[584] folgt $\mathtt{Ab}(n) \sim C$, und so hat C n Elemente. □ Sollte das Zählverfahren aber nicht zum Abschluss kommen, nennen wir die Klasse ≪unendlich≫. So können wir ≪Endlichkeit≫ und ≪Unendlichkeit≫ wie folgt definieren (wobei wir vorläufig, solange wir die Äquivalenz dieser neuen Definition mit der Unendlichkeitsdefinition 5.17.1 nicht bewiesen haben, von „arithmetischer Endlichkeit" bzw. „arithmetischer Unendlichkeit" reden wollen):

5.17.10 Definition Eine Klasse C heißt *arithmetisch endlich*, wenn es eine Zahl n aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass die Klasse n Elemente hat, d. h. wenn es eine Zahl n gibt, so dass $\mathtt{Ab}(n) \sim C$.[585]

Die frühere Definition 5.17.1 von Endlichkeit und Unendlichkeit wird man erst dann als korrekte Beschreibung der intuitiven Begriffe ansehen können, wenn sich zeigt, dass die ≪arithmetisch endlichen≫ bzw. ≪arithmetisch unendlichen≫ Klassen mit den ≪endlichen≫ bzw. ≪unendlichen≫ Klassen jener Definition übereinstimmen. Hierzu müssen im Folgenden zunächst einige Tatsachen über arithmetische Endlichkeit und Unendlichkeit bewiesen werden.

5.17.11 Theorem *Jede arithmetisch endliche Klasse ist eine Menge. Jede Unmenge ist arithmetisch unendlich.*

---

584 Beweis: Sei f die Einschränkung der Sukzessorfunktion S auf $\mathtt{Ab}(n)$. Dieses f ist injektiv, da S injektiv ist (5.16.14 S. 213). Ferner ist $\mathtt{Wb}(f) = [1, n]$ (so dass f eine Bijektion von $\mathtt{Ab}(n) in [1, n]$ und $\mathtt{Ab}(n) \sim [1, n]$ folgt):
Erstens ist $\mathtt{Ab}(n) \subseteq [1, n]$: Für jedes y aus $\mathtt{Wb}(f)$ gibt es ein x aus $\mathtt{Ab}(n)$ mit $f(x) = y$, das heißt mit $x + 1 = y$, und da $x < n$ (wegen $x \in \mathtt{Ab}(n)$), folgt (gemäß 5.134 S. 219) $x + 1 \leq n$, d. h. $y \leq n$. Außerdem gilt $1 \leq x + 1$ (falls $x = 0$ ist $1 = 0 + 1 = x + 1$, andernfalls gilt nach Definition 5.16.25 S. 218 von $<$, dass $1 < x + 1$), d. h. $1 \leq y$. Insgesamt ist $1 \leq y \leq n$, also $y \in [1, n]$.
Zweitens ist $[1, n] \subseteq \mathtt{Ab}(n)$: Für jedes y aus $[1, n]$ ist nämlich $0 < 1 \leq y$, also $0 < y$, also $y \neq 0$, also gibt es ein x mit $x + 1 = y$ (Theorem 5.16.13 S. 213), d. h. mit $S(x) = y$. Da nach Definition von $<$ aus $x + 1 = y$ sofort $x < y$ folgt, gilt $x < y \leq n$, also $x < n$, also $x \in \mathtt{Ab}(n)$, so dass $f(x) = S(x) = y$. Also liegt y in $\mathtt{Wb}(f)$. □

585 Formal: C (ist) arithmetisch endlich $:\Leftrightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (\mathtt{Ab}(n) \sim C)$.
C (ist) arithmetisch unendlich $:\Leftrightarrow \neg$ (C ist arithmetisch endlich).

Beweis. Ist C arithmetisch endlich, gilt $\mathtt{Ab}(n) \sim C$ für ein n aus $\mathbb{N}$. Aber $\mathtt{Ab}(n)$ ist eine Menge (Theorem 5.16.33 S. 220), also ist C nach Theorem 5.12.10 S. 167 eine Menge. Ist aber U eine Unmenge, so gibt es kein n aus $\mathbb{N}$, für das $\mathtt{Ab}(n) \sim U$ gilt, denn nach Theorem 5.12.10 ist keine Unmenge mit einer Menge gleichmächtig. Also ist U arithmetisch unendlich. □
Mit Theorem 5.17.11 ist allerdings *nicht* gesagt, dass auch umgekehrt jede Menge arithmetisch endlich bzw. jede arithmetisch unendliche Klasse eine Unmenge ist.[586]

5.17.12 Theorem *Die leere Klasse ist arithmetisch endlich. Sie und nur sie hat* 0 *Elemente.*

Beweis. $\emptyset$ ist mit $\mathtt{Ab}(0)$ identisch (Korollar 5.16.34 S. 220), also können wir für die wahre Aussage $\emptyset \sim \emptyset$ (siehe Theorem 5.12.9 S. 166) auch $\mathtt{Ab}(0) \sim \emptyset$ schreiben. So ist $\emptyset$ arithmetisch endlich und hat 0 Elemente. Eine nichtleere Klasse C dagegen kann nicht 0 Elemente haben, sonst wäre $\mathtt{Ab}(0) \sim C$, das heißt $\emptyset \sim C$, was nach Theorem 5.12.9 S. 166 ausgeschlossen ist. □

5.17.13 Theorem *Einermengen sind arithmetisch endlich. Sie und nur sie haben* 1 *Element. Zweiermengen sind arithmetisch endlich. Sie und nur sie haben* 2 *Elemente.*

Beweis. Nach Korollar 5.16.34 S. 220 ist $\mathtt{Ab}(1)$ ein– und $\mathtt{Ab}(2)$ zweielementig. Daher sind nach Theorem 5.12.9 S. 166 alle einelementigen Klassen und nur diese mit $\mathtt{Ab}(1)$ gleichmächtig, und ebenso alle zweielementigen Klassen und nur diese mit $\mathtt{Ab}(2)$. □

5.17.14 Theorem *Für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist $\mathtt{Ab}(n)$ arithmetisch endlich und hat n Elemente.*

Beweis. Es gilt $\mathtt{Ab}(n) \sim \mathtt{Ab}(n)$. □

5.17.15 Theorem *Für arithmetisch endliche Klassen A, B gilt $A \sim B$ genau dann, wenn A und B dieselbe Anzahl von Elementen haben.*

Beweis. Sei zuerst vorausgesetzt, dass A und B gleichmächtig sind. Dann gibt es Zahlen m und n, so dass $\mathtt{Ab}(m) \sim B$ und $\mathtt{Ab}(n) \sim A$, und wegen $A \sim B$ folgt insgesamt $\mathtt{Ab}(n) \sim A \sim B \sim \mathtt{Ab}(m)$, also $\mathtt{Ab}(n) \sim \mathtt{Ab}(m)$. Das aber wäre nach Theorem 5.16.35 S. 220 falsch, wenn m und n verschiedene Zahlen wären. Also folgt $m = n$. Wird umgekehrt vorausgesetzt, dass A und B dieselbe Anzahl n von Elementen haben, gilt $A \sim \mathtt{Ab}(n) \sim B$, also $A \sim B$. □

5.17.16 Lemma *Ist A arithmetisch endlich und hat $n+1$ Elemente, so ist A nichtleer und man kann durch Entfernung eines beliebigen Elements a von A zu der Klasse $A^* := A \setminus \{a\}$ übergehen. Jedes solche A^* ist dann arithmetisch endlich und hat n Elemente.*

Beweis. Da A $n+1$ Elemente hat, gilt $\mathtt{Ab}(n+1) \sim A$. Nun ist $\mathtt{Ab}(n+1)$ nichtleer,[587] also muss wegen Theorem 5.12.9 S. 166 auch A nichtleer sein. Wir können also ein a aus A entfernen und erhalten A^*. Einerseits ist dann $A = A^* \cup \{a\}$, andererseits $\mathtt{Ab}(n+1) = \mathtt{Ab}(n) \cup \{n\}$ (nach Theorem 5.16.33 S. 220). So können wir für $\mathtt{Ab}(n+1) \sim A$ auch $\mathtt{Ab}(n) \cup \{n\} \sim A^* \cup \{a\}$ schreiben. Da aber weder n in $\mathtt{Ab}(n)$ enthalten ist (n ist nicht Vorgänger von sich selbst) noch a in A^*, folgt mit Korollar 5.12.6 S. 166, dass $\mathtt{Ab}(n) \sim A^*$. Das heißt: A^* ist arithmetisch endlich und hat n Elemente. □

Das folgende Theorem und seine drei Korollare stützten die Anschauung, dass arithmetisch unendliche Klassen bezüglich der Relationen $\subseteq$ und $\precsim$ die „größeren“, arithmetisch endliche Klassen dagegen die „kleineren“ Klassen sind.

---

586 Das ist vielmehr falsch: Wie auf S. 231–232 gezeigt wurde, ist $\mathbb{N}$ eine Menge, und gemäß 5.17.5 ist $\mathbb{N}$ unendlich, und da sich außerdem zeigen wird, dass Unendlichkeit mit arithmetischer Unendlichkeit gleichbedeutend ist (Theorem 5.17.24), ist $\mathbb{N}$ ein Beispiel für eine arithmetisch unendliche Klasse, die *keine* Unmenge ist.

587 Wegen (5.127 S. 217) ist $n+1 \neq 0$, also ist wegen Korollar 5.16.32 S. 220 $\mathtt{Ab}(n+1) \neq \emptyset$.

5.17.17 Theorem *Ist B arithmetisch endlich und $A \subseteq B$, so ist auch A arithmetisch endlich und für die Anzahlen m und n der Elemente von A und B gilt $m \leq n$. Ist sogar $A \subset B$, gilt $m < n$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 429. □

5.17.18 Korollar *Ist A arithmetisch unendlich und $B \supseteq A$, so ist B arithmetisch unendlich.*

Beweis. Aus $B \supseteq A$ folgt $A \subseteq B$. Angenommen, B wäre arithmetisch endlich, so würde aus Theorem 5.17.17 folgen, dass auch A arithmetisch endlich ist. Aber A ist nun als arithmetisch unendlich vorausgesetzt. Also war die Annahme falsch und B arithmetisch unendlich. □

5.17.19 Korollar *Ist B arithmetisch endlich und $A \precsim B$, so ist A auch arithmetisch endlich.*

Beweis. Da $A \precsim B$, gibt es eine Injektion f von A in B, das ist eine Bijektion von A in die Teilklasse $\mathtt{Wb}(f)$ von B. Da B arithmetisch endlich ist, ist nach Theorem 5.17.17 auch $\mathtt{Wb}(f)$ arithmetisch endlich, d. h. es gibt eine Bijektion g von $\mathtt{Wb}(f)$ in eine Klasse $\mathtt{Ab}(n)$. Dann ist die Komposition $f \looparrowright g$ eine Bijektion von A in $\mathtt{Ab}(n)$, so dass $\mathtt{Ab}(n) \sim A$ gilt und A arithmetisch endlich ist. □

5.17.20 Korollar *Ist A arithmetisch unendlich und $B \succsim A$, so ist B arithmetisch unendlich.*

Beweis. Da $B \succsim A$, gilt $A \precsim B$. Angenommen, B wäre arithmetisch endlich, so würde aus Korollar 5.17.19 folgen, dass A arithmetisch endlich ist. Doch ist nun die arithmetische Unendlichkeit von A vorausgesetzt. Also war die Annahme falsch und B ist arithmetisch unendlich. □

Nach dem letzten Theorem und seinen Korollaren besteht eine Entsprechung zwischen den *klassentheoretischen* Relationen $\subseteq$ und $\precsim$ einerseits und der *zahlentheoretischen* Relation $\leq$ andererseits, und ebenso entsprechen sich die Relationen $\subset$ und $<$. Analoge Entsprechungen bestehen auch zwischen klassentheoretischen und zahlentheoretischen *Operationen*. So deckt das folgende Theorem eine Beziehung zwischen der Vereinigung $\cup$ und der Addition $+$ auf:

5.17.21 Theorem *Seien A und B arithmetisch endliche Klassen mit n bzw. m Elementen. Seien außerdem A und B disjunkt, d. h. ohne gemeinsames Element. Dann ist auch $A \cup B$ arithmetisch endlich und hat $m + n$ Elemente.*

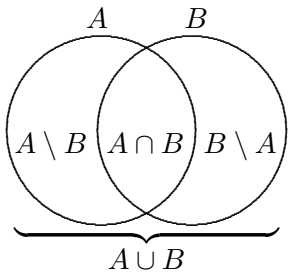
Beweis. Siehe Anhang S. 429. □ Ähnliche Beziehungen wie zwischen $\cup$ und $+$ bestehen auch zwischen der Klassendifferenz $\setminus$ und der Subtraktion $-$, zwischen dem Kreuzprodukt $\times$ und der Multiplikation $\cdot$, und zwischen der mengentheoretischen Potenz und der Potenzierung von Zahlen.[588] Wichtiger als die zahlenmäßige Beherrschung endlicher Klassen ist aber für unsere Zwecke die folgende Verallgemeinerung (und auch Vereinfachung) von Theorem 5.17.21:

5.17.22 Theorem *Für arithmetisch endliches A und B ist auch $A \cup B$ arithmetisch endlich.*

Beweis. Wegen Theorem 5.17.21 ist nur noch der Fall zu betrachten, dass A und B nicht disjunkt sind, also mindestens ein gemeinsames Element haben. Dann setzt sich $A \cup B$ aus folgenden zueinander disjunkten Klassen zusammen:

- die Klasse der Elemente von A, die nicht in B liegen: die Differenzklasse $A \setminus B$,
- die Klasse der Elemente von B, die nicht in A liegen: die Differenzklasse $B \setminus A$,
- die Klasse der Elemente, die zugleich in A und B liegen: die Schnittklasse $A \cap B$.

[588] Bezüglich der Subtraktion gilt im Fall $A \subseteq B$ (für endliches B), dass wenn A m und B n Elemente hat, $B \setminus A$ $n - m$ Elemente hat. Denn es ist dann $(B \setminus A) \cup A = B$, also ist nach 5.17.21 die Anzahl der Elemente von $A \setminus B$ diejenige, die zu der Anzahl m der Elemente von A addiert die Anzahl n der Elemente von B ergibt, und das ist $n - m$. Zum Kreuzprodukt und zu den Potenzen siehe Theorem 5.18.10 S. 251.



Nun ist aber jede dieser Klassen Teilklasse einer arithmetisch endlichen Klasse: $A \setminus B$ ist Teilklasse von A, $B \setminus A$ ist eine solche von B, und $A \cap B$ eine solche sowohl von A wie auch von B. Daher sind die drei Klassen $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \cap B$ nach Theorem 5.17.17 arithmetisch endlich, und da sie zueinander disjunkt sind, resultiert nach Theorem 5.17.21 zunächst aus der Vereinigung zweier von ihnen eine arithmetisch endliche Klasse, und aus der Vereinigung dieser mit der dritten ebenfalls eine arithmetisch endliche Klasse. Diese ist aber $A \cup B$. □

5.17.23 Lemma *Sei C arithmetisch unendlich. Dann gibt es eine Injektion von $\mathbb{N}$ in C* (so dass gemäß Theorem 5.90 S. 200 gilt: $\mathbb{N} \precsim C$).

Beweis. Siehe Anhang S. 429–430. □

5.17.24 Theorem ≪C ist arithmetisch endlich≫ *ist äquivalent mit* ≪C ist endlich≫*, und folglich auch* ≪C ist nicht arithmetisch endlich≫ *mit* ≪C ist unendlich≫.

Beweis. Siehe Anhang S. 430. □ Wir können also jetzt in allen vorhergehenden Aussagen über „arithmetische“ Endlichkeit und Unendlichkeit das Wort „arithmetisch“ streichen. Ebenso ist nun klar, dass wenn eine Klasse arithmetisch (un)endlich bezüglich *eines* Modells der Arithmetik ist, dies auch bezüglich *jedes anderen* Modells gilt, denn nach Theorem 5.17.24 besagt ja die arithmetische (Un-)Endlichkeit in jedem Modell dasselbe: nämlich (Un-)Endlichkeit schlechthin. Trotz der Gleichwertigkeit von arithmetischer (Un-)Endlichkeit und (Un-)endlichkeit schlechthin hat letztere den Vorteil, dass sie nicht auf ein bestimmtes Modell der Arithmetik Bezug nimmt und darum auch ohne die Theorie der Zahlen erklärt werden kann.

Als Nächstes soll nun das „Unendlichkeitsaxiom“ eingeführt werden, zu dem es mehrere äquivalente Formulierungen gibt. Eine von ihnen ist der Satz ≪ω ist eine Menge≫ (wobei man für ω auch eine andere Trägerklasse eines Modells der Arithmetik setzen kann), und eine andere, sehr natürliche Formulierung besteht in dem Satz ≪es gibt eine unendliche Menge≫. Wir zeigen zunächst, dass diese beiden Sätze äquivalent sind, d. h. wenn einer von ihnen wahr ist, ist es auch der andere:

5.17.25 Theorem *Sei N die Trägerklasse eines beliebigen Modells der Arithmetik* (etwa ω). *Dann sind die Aussagen* ≪N ist eine Menge≫ *und* ≪es gibt eine unendliche Menge≫ *äquivalent.*

Beweis. Sei vorausgesetzt, dass N eine Menge ist. Da N unendlich ist (Theorem 5.17.5 S. 234), ist dann N eine *unendliche Menge*, und der Satz ≪es gibt eine unendliche Menge≫ ist wahr. Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass es eine unendliche Menge M gibt. Nach Lemma 5.17.23 (und weil arithmetische Unendlichkeit mit Unendlichkeit gleichbedeutend ist) folgt dann $N \precsim M$, so dass N wegen (5.92 S. 201) eine Menge ist. □ So ist es vom formalen Standpunkt aus gleichgültig, welchen der beiden Sätze man als Axiom nimmt (es gelten dann jedenfalls beide). Zermelo, der das Axiom erstmals aufstellte, formulierte sinngemäß, dass die Klasse der Zermeloschen natürlichen Zahlen eine Menge ist.[589] Natürlicher ist aber folgende Version:

5.17.26 Zwölftes Axiom der Mengenlehre: Unendlichkeitsaxiom *Es gibt mindestens eine unendliche Menge.*

[589] Die genaue Formulierung lautet (Zermelo, *Grundlagen der Mengenlehre* S. 266f, Axiom VII): ≪es gibt eine Menge M, welche $\emptyset$ enthält, und mit jedem ihrer Elemente a auch $\{a\}$≫. Da ein solches M eine induktive Klasse im Zermeloschen Modell der Arithmetik ist, ist dessen Trägerklasse $\mathbb{N}$ dann per Induktionsaxiom 5.16.4 S. 210 eine Teilklasse von M, also auch selbst eine Menge. Wird umgekehrt vorausgesetzt, dass $\mathbb{N}$ eine Menge ist, so gibt es im Zermeloschen Modell eine induktive Menge M (nämlich $\mathbb{N}$ selbst). So ist Zermelos Version des Unendlichkeitsaxioms äquivalent zu: ≪Das Zermelosche $\mathbb{N}$ ist eine Menge≫.

Plausibilitätsbetrachtung. Auf S. 231–232 konnte plausibel gemacht werden, dass die Trägerklasse eines Streckenmodells der Arithmetik eine Menge ist. Wegen Theorem 5.17.5 S. 234 ist diese Menge zugleich unendlich. Insgesamt handelt es sich also um eine unendliche Menge. □

5.17.27 Korollar *Jede Trägerklasse N eines beliebigen Modells der Arithmetik, insbesondere ω, ist eine unendliche Menge.*

Beweis. Aus dem Unendlichkeitsaxiom ergibt sich in Verbindung mit Theorem 5.17.25, dass N eine Menge ist. Außerdem ist N nach Theorem 5.17.5 unendlich, insgesamt also eine unendliche Menge. □ Dieses Korollar hat folgende Konsequenz für die Lehre von den Ordinalzahlen:

5.17.28 Korollar *ω ist eine Ordinalzahl, und zwar die kleinste unendliche Ordinalzahl.*

Beweis. Da ω nach Korollar 5.17.27 eine Menge ist, und die Elemente von ω nach Theorem 5.16.47 S. 223 Ordinalzahlen sind, ist ω eine Menge von Ordinalzahlen. Nach Theorem 5.14.4 S. 191 ist infolgedessen auch $\bigcup\omega$ eine Ordinalzahl. Diese ist aber mit ω selbst identisch.[590] So ist ω eine Ordinalzahl. Weiter ist ω nach Korollar 5.17.27 unendlich. Für jede Ordinalzahl n aber, die kleiner als ω ist, gilt $n <_{\mathtt{On}} \omega$, das heißt nach Definition 5.14.5 S. 191 von $<_{\mathtt{On}}$, dass $n \in \omega$, so dass n eine NEUMANNsche natürliche Zahl ist, und diese ist endlich.[591] Also ist ω die kleinste unendliche Ordinalzahl. □

Unsere bisherigen Kriterien zur Bestimmung von Endlichkeit und Unendlichkeit einer Klasse C basieren auf dem Konzept der Gleichmächtigkeit: Zu prüfen ist entweder die Gleichmächtigkeit von C mit einem Abschnitt $\mathtt{Ab}(n)$ oder mit einer echten Teilklasse T. Von der Wortbedeutung her sollte Endlichkeit und Unendlichkeit auch etwas mit dem Vorhandensein oder dem Fehlen von Grenzen zu tun haben, und tatsächlich gibt es hierauf gestützte Kriterien. Zwar ist es falsch, dass jede bezüglich einer Vollordnung beschränkte Klasse endlich sein muss,[592] wohl aber gilt umgekehrt, dass jede nichtleere endliche Klasse bezüglich jeder über ihr existierenden Vollordnung sowohl ein Minimum als auch ein Maximum haben muss, so dass die Existenz von Maximum und Minimum eine notwendige (wenn auch nicht hinreichende) Bedingung für die Endlichkeit einer (nichtleeren) Klasse darstellt:

5.17.29 Theorem *Sei A eine nichtleere Klasse und $<$ eine Vollordnung über A. Dann gilt:*

Ist A endlich, so besitzt A bezüglich $<$ sowohl ein Minimum als auch ein Maximum. (5.139)

Besitzt A kein Minimum, so ist A unendlich. (5.140)

Besitzt A kein Maximum, so ist A unendlich. (5.141)

Beweis. Dieser anschaulich klare Sachverhalt ist formal im Anhang S. 431 bewiesen. □

5.17.30 Korollar *Jede endliche vollgeordnete Klasse $\langle A, <\rangle$ ist biwohlgeordnet.*

590 Es zeigt sich nämlich, dass sowohl $\omega \subseteq \bigcup\omega$ als auch $\bigcup\omega \subseteq \omega$. Zunächst gilt $\bigcup\omega \subseteq \omega$. Denn wenn $m \in \bigcup\omega$ vorausgesetzt ist, gibt es ein x aus ω, so dass $m \in x \in \omega$. Nach Theorem 5.16.46 S. 223 ist dann x mit dem Abschnitt $\mathtt{Ab}(x)$ identisch, d. h. mit der Klasse aller Vorgänger von x im Standardmodell der Arithmetik. Wegen $m \in x$ ist also m ein solcher Vorgänger und daher eine Zahl des Standardmodells der Arithmetik, d. h. ein Element von ω. Sodann gilt auch $\omega \subseteq \bigcup\omega$. Denn wenn $n \in \omega$ vorausgesetzt ist, liegt auch der Nachfolger n' von n in ω, wobei n wegen $n' = n \cup \{n\}$ ein Element von n' ist. Mithin gibt es eine Menge x aus ω (nämlich n') so dass $n \in x \in \omega$ ist, und das bedeutet $n \in \bigcup\omega$.

591 Jede NEUMANNsche natürliche Zahl n ist nach Theorem 5.16.46 mit der Klasse $\mathtt{Ab}(n)$ identisch, die nach Theorem 5.17.14 S. 240 arithmetisch endlich, also nach Theorem 5.17.24 schlechthin endlich ist.

592 Ein Gegenbeispiel ist die Klasse N eines Streckenmodells der Arithmetik (siehe Beispiel 5.16.61 S. 231): N ist ja unendlich, obwohl im Streckenmodell alle Elemente von N auf der Geraden zwischen zwei α und ω Punkten liegen und daher N bezüglich der Links-Rechts-Relation auf der Geraden beschränkt ist.

Beweis. Zu zeigen ist gemäß Definition 5.13.25 S. 182, dass erstens jede nichtleere Teilklasse T von A ein Maximum und ein Minimum besitzt, und dass zweitens A eine Menge ist.
Das Erste folgt, weil $<$ auch über T eine Vollordnung ist, und weil T nach dem Teilmengenaxiom endlich ist, aus Satz 5.139.
Das Zweite folgt aus Theorem 5.17.11 S. 239 (in Verbindung mit Theorem 5.17.24 S. 242). □

Das folgende, 1907 von Paul Stäckel aufgestellte Kriterium[593] ist eine *rein ordnungstheoretische Charakterisierung von Endlichkeit und Unendlichkeit*, die ebenso wie unsere offizielle Definition ohne den Zahlenbegriff auskommt, dieser gegenüber aber den Vorzug größer Anschaulichkeit hat:

5.17.31 Biwohlordnungs-Kriterium für Endlichkeit und Unendlichkeit *Eine Klasse C ist genau dann endlich, wenn es eine Biwohlordnung $<$ über C gibt* (und folglich genau dann unendlich, wenn es *keine* solche gibt).

Beweis. Siehe Anhang S. 431–432. □ Das folgende Korollar ist eine auf diesem Kriterium basierende „praktische Anweisung“, wie man eine endliche Klasse als solche erkennen kann:

5.17.32 Korollar *Kann man sich die Elemente einer Menge M von rechts nach links angeordnet vorstellen, derart dass es zu jeder nichtleeren Auswahl von Elementen ein am weitesten links und ein am weitesten rechts stehendes Element gibt, so ist M endlich.*

Beweis. Ist diese Vorstellung möglich, so ist die Relation $<$, die x genau dann auf y ausrichtet, wenn x links von y kommt, eine Biwohlordnung über M. □ Zum Abschluss dieses Abschnitts soll geklärt werden, wo genau sich die unendlichen Klassen im Klassenuniversum aufhalten.

5.17.33 Theorem *Für Klassen A und B gilt:*

Ist A bzw. B endlich mit m bzw. n Elementen, gilt $A \sim B$ genau dann, wenn $m = n$. (5.142)

Ist A endlich und $B \precsim A$ ($B \prec A$ oder $B \sim A$) oder $B \subseteq A$, so ist B endlich. (5.143)

Ist A unendlich und $B \succsim A$ ($B \succ A$ oder $B \sim A$) oder $B \supseteq A$, so ist B unendlich. (5.144)

Beweis. Dies folgt aus den Theoremen 5.17.15 und 5.17.17 und den Korollaren 5.17.18, 5.17.19 und 5.17.20, wenn wir dort das Wort „arithmetisch“ streichen, was wir aufgrund von Theorem 5.17.24 tun dürfen. □

5.17.34 Korollar *Ist f eine Funktion und $\mathtt{Db}(f)$ endlich, so ist $\mathtt{Wb}(f)$ endlich.*

Beweis. Da f eine Surjektion von $\mathtt{Db}(f)$ in $\mathtt{Wb}(f)$ ist, gilt (wegen Satz 5.91 S. 200) $\mathtt{Db}(f) \succsim \mathtt{Wb}(f)$, also $\mathtt{Wb}(f) \precsim \mathtt{Db}(f)$. Da $\mathtt{Db}(f)$ endlich ist, gilt dies nach Satz 5.143 auch für $\mathtt{Wb}(f)$. □

5.17.35 Korollar *Auf jeder Klassenstufe liegen entweder ausschließlich endliche oder ausschließlich unendliche Klassen.*

Beweis: Da auf derselben Klassenstufe liegende Klassen gleichmächtig sind, folgt die Behauptung aus den Sätzen 5.143 und 5.144. □ Daher können wir nun definieren:

[593] Vgl. Stäckel, *Zu H. Webers elementarer Mengenlehre* S. 425. Es handelt sich um eine Verbesserung eines ähnlichen Endlichkeitskriteriums, das 1906 von Heinrich Weber aufgestellt worden war: *„Eine Menge A heißt endlich, wenn sie ordnungsfähig ist und wenn sie bei jeder möglichen Ordnung ein maximales und ein minimales Element hat.“* (Weber, *Elementare Mengenlehre* S. 177). Hierbei versteht Weber unter Ordnung soviel wie Vollordnung. Dieses Kriterium ist komplizierter als das im Haupttext genannte Stäckelsche, da man nach Stäckel nur die Existenz *einer* Biwohlordnung auf A beweisen muss; nach Weber aber muss man zeigen, dass *jede* Vollordnung auf A beschränkt ist.

5.17.36 Definition (teilweise nur für die erweiterte Theorie) Eine Klassenstufe heißt *Unendlichkeitsstufe*, wenn eine (und darum jede) ihrer Klassen endlich ist; und *Endlichkeitsstufe*, wenn eine (und darum jede) ihrer Klassen unendlich ist. Da allgemeine Klassenstufen nur in der *erweiterten Theorie* zur Verfügung stehen, gilt diese Definition nur dort. In der *elementaren Theorie* können wir dagegen als *Unendlichkeitsstufen* nur die *Mengenstufen* betrachten, deren Elemente unendliche Mengen sind. Die *Endlichkeitsstufen* sind aber in beiden Theorien dieselben; denn diese sind wegen Theorem 5.17.11 S. 239 (in Verbindung mit 5.17.24 S. 242) Mengenstufen.

Unter den unendlichen Klassen gibt es sowohl Mengen als auch Unmengen, und zwar sind (wieder nach Theorem 5.17.11 in Verbindung mit 5.17.24) alle Unmengen unendlich, aber auch Mengen können unendlich sein, wofür ω ein Beispiel ist. Wir unterscheiden daher die *Stufen unendlicher Mengen* von den *Stufen unendlicher Unmengen*, die (weil alle Unmengen unendlich sind) einfach die *Unmengenstufen* sind (wobei wir nicht wissen, ob es eine oder mehrere gibt):

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{\text{Stufen endlicher Mengen}}}_{\text{Endlichkeitsstufen}}\ \underbrace{\boxed{\text{Stufen unendlicher Mengen}}}_{\text{Unendlichkeitsstufen}}}^{\text{Mengenstufen}}\ \underbrace{\boxed{\text{Unmengenstufe(n)}}}_{\text{Unendlichkeitsstufen}}$$

Wir kennen nun mindestens zwei Unendlichkeitsstufen: die Mengenstufe $\llbracket\omega\rrbracket$, die genau die Trägerklassen von Modellen der Arithmetik beherbergt (Korollar 5.16.54 S. 228), und die Unmengenstufe $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$. Die nächsten beiden Theoreme machen die ausgezeichnete Stellung dieser Unendlichkeitsstufen im Klassenuniversum deutlich, indem sie zeigen, dass auf $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ die relationstheoretisch „größten“ unendlichen Klassen liegen und auf $\llbracket\omega\rrbracket$ die „kleinsten“.

5.17.37 Theorem Liege D auf $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$, sei also gemäß 5.15.19 eine Maximalklasse (etwa $\mathbb{D}$ selbst). *Dann gilt für jede Klasse C, dass $C \precsim D$, und für jede Menge M sogar $M \prec D$.*

Beweis. Nach Satz 5.87 S. 200 gilt $C \precsim \mathbb{D}$. Ist M eine Menge, gilt darüber hinaus gemäß Theorem 5.12.10 S. 167, dass M mit $\mathbb{D}$ *nicht* gleichmächtig ist, und nach Satz 5.88 S. 200 folgt daher $M \prec \mathbb{D}$. Auch für alle anderen Klassen D, die auf $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ liegen (also mit $\mathbb{D}$ gleichmächtig sind) gilt dann nach Theorem 5.15.4 S. 201, dass $C \precsim D$ und $M \prec D$. □

5.17.38 Theorem Liege N auf $\llbracket\omega\rrbracket$, sei also gemäß Korollar 5.16.54 Trägerklasse eines Arithmetik-Modells (etwa ω selbst). Dann gilt:

Wenn $A \prec N$, so ist A endlich. Und wenn $N \precsim B$, so ist B unendlich. (5.145)

Wenn E endlich und U unendlich ist, so ist $E \prec N \precsim U$, also auch $E \prec U$. (5.146)

Beweis. Zu (5.145). Sei $A \prec N$. Angenommen, A ist unendlich, so folgt wegen Lemma 5.17.23 (in Verbindung mit Theorem 5.17.24 S. 242), dass $N \precsim A$, insgesamt also $A \prec N \precsim A$, und daraus folgt wegen Satz 5.97 S. 201, dass $A \prec A$, was der Irreflexivität von $\prec$ widerspricht. Also war die Annahme falsch und A ist endlich.
Sei $N \precsim B$, also $B \succsim N$. Da N unendlich ist, folgt mit Satz 5.144 S. 244, dass B unendlich ist.

Zu (5.146). Für endliches E gilt $E \sim \mathtt{Ab}(n)$ für ein n aus N, also gibt es eine Bijektion von E in $\mathtt{Ab}(n)$, das ist eine Injektion von E in N, und wir schließen gemäß Satz 5.90 S. 200, dass $E \precsim N$. Außerdem ist $E \sim N$ falsch (sonst wäre $N \sim E$ und erst recht $N \precsim E$, woraus wegen des gerade bewiesenen Satzes 5.145 die Unendlichkeit von E folgen würde), also folgt gemäß Satz 5.88 S. 200, dass $E \prec N$.
Für unendliches U schließlich gilt $N \precsim U$ wegen Lemma 5.17.23. □

Die beiden letzten Theoreme über die Größenverhältnisse zwischen Klassen (ausgedrückt durch $\prec$ und $\precsim$) lassen sich gemäß den Sätzen 5.108 S. 204 und 5.111 S. 204 sofort in Aussagen über Klassenstufen (ausgedrückt durch $<_{Fr}$ und $\leq_{Fr}$) überführen:

- Für jede Klassenstufe $\mathfrak{C}$ gilt $\mathfrak{C} \leq_{Fr} \llbracket \mathbb{D} \rrbracket$. (5.147)
- Ist $\mathfrak{M}$ Mengenstufe, so gilt $\mathfrak{M} <_{Fr} \llbracket \mathbb{D} \rrbracket$, insbesondere $\llbracket \omega \rrbracket <_{Fr} \llbracket \mathbb{D} \rrbracket$ (5.148)
- Gilt $\mathfrak{A} <_{Fr} \llbracket \omega \rrbracket$ bzw. $\llbracket \omega \rrbracket \leq_{Fr} \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A}$ Endlichkeits– bzw. $\mathfrak{B}$ Unendlichkeitsstufe. (5.149)
- Ist $\mathfrak{E}$ Endlichkeits- und $\mathfrak{U}$ Unendlichkeitsstufe, so gilt $\mathfrak{E} <_{Fr} \llbracket \omega \rrbracket \leq_{Fr} \mathfrak{U}$. (5.150)

Insgesamt können wir uns nun vom „Klassenuniversum“ folgendes Bild machen:

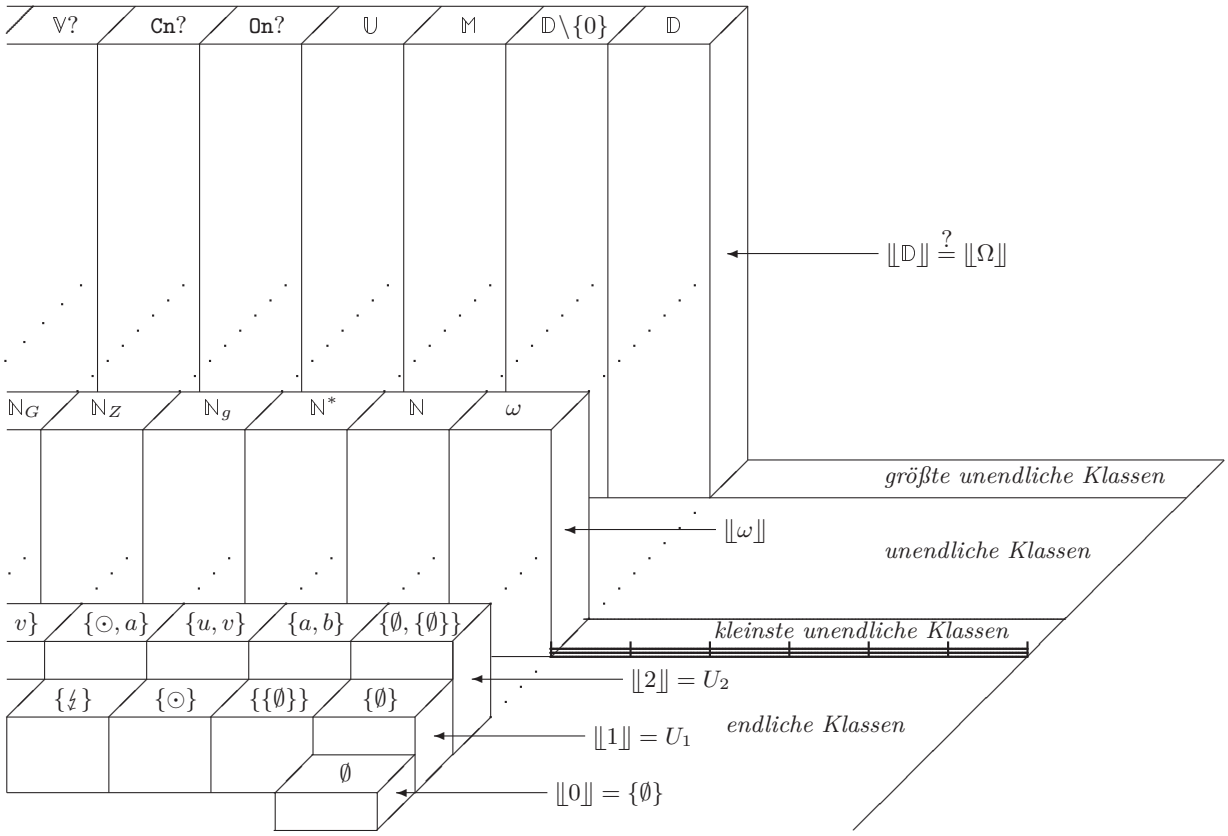


Abbildung 5.28: Das Klassenuniversum

Auf Stufe $\llbracket \omega \rrbracket$ ist hier außer ω die Klasse $\mathbb{N}_Z$ aller Zahlen des ZERMELOschen Modells und $\mathbb{N}_G$ aller Zahlen eines Zahlenstrahlmodells der Arithmetik zu sehen, außerdem die Trägerklasse $\mathbb{N}$ eines anderen Modells und ferner die Klassen $\mathbb{N}^*$ und $\mathbb{N}_g$ der von Null verschiedenen bzw. geraden Zahlen aus $\mathbb{N}$. Diese beiden zuletzt genannten müssen ebenfalls auf Stufe $\llbracket \omega \rrbracket$ liegen, weil sie gemäß Beispiel 5.17.3 und 5.17.4 mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Auf Stufe $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$ der Maximalklassen liegen nach Theorem 5.15.19 S. 205 außer $\mathbb{D}$ auch sämtliche Komplemente von Mengen wie z. B. $\mathbb{D} \setminus \{\emptyset\}$ und die Klasse $\mathbb{M}$ aller Mengen; außerdem liegt dort nach Axiom 5.15.20 die Klasse $\mathbb{U}$ aller Urelemente. Falls die Hypothese zutrifft, dass es nur eine einzige Unmengenstufe gibt, wäre diese größte Unmengenstufe mit der kleinsten Unmengenstufe $\llbracket \Omega \rrbracket$ identisch, und so müssten dann auf $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$ alle Unmengen überhaupt liegen. Darum sind in unserem Schaubild auf $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$ einige Unmengen der Stufe $\llbracket \Omega \rrbracket$ mit einem Fragezeichen versehen:

Außer $\mathtt{On}$ ($= \Omega$) die noch zu besprechenden Unmengen $\mathtt{Cn}$ der Kardinalzahlen und das kumulative Mengenuniversum $\mathbb{V}$ (zu diesen siehe Abschnitte 5.26 und 5.29).

5.17.39 Definition Die Klassen der beiden ausgezeichneten Unendlichkeitsstufen $\llbracket\omega\rrbracket$ und $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ nennen wir *abzählbar* bzw. *absolut* unendlich.[594] Die Klassen, die auf den mit $\llbracket\omega\rrbracket$ beginnenden Stufen unendlicher Mengen liegen (d. h. alle unendlichen Mengen) heißen *konsistent unendlich*, und die Klassen, die auf den mit $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ endenden Stufen unendlicher Unmengen liegen (d. h. wegen 5.17.2 S. 233 alle Unmengen) *inkonsistent unendlich.*[595]

Zusammenfassend haben wir nun folgende Kriterien, die es erlauben, endliche und unendliche Klassen zu unterscheiden, und die darum auch alle gleichermaßen für eine Definition von Endlichkeit und Unendlichkeit verwendet werden könnten:

5.17.40 Endlichkeits– und Unendlichkeitskriterien *Eine Klasse C ist*

endlich, wenn $\mathtt{Ab}(n) \sim C$ *für ein* n *aus* $\mathbb{N}$ *gibt,*	*und andernfalls unendlich,*	(5.151)
endlich, wenn $C \prec \mathbb{N}$ *gilt,*	*und andernfalls unendlich,*	(5.152)
endlich, wenn nicht $\mathbb{N} \precsim C$ *gilt,*	*und andernfalls unendlich,*	(5.153)
endlich, wenn über C *eine Biwohlordnung existiert,*	*und andernfalls unendlich,*	(5.154)
endlich, wenn es kein T *gibt mit* $T \subset C$ *und* $T \sim C$,	*und andernfalls unendlich.*	(5.155)

Hierbei ist $\mathbb{N}$ *bzw.* $\mathtt{Ab}(n)$ *die Trägerklasse bzw. die Klasse aller Vorgänger von* n *in einem beliebigen Modell der Arithmetik.*

Beweis. Kriterium (5.151) beruht darauf, dass arithmetische Endlichkeit und Unendlichkeit mit Endlichkeit und Unendlichkeit gleichbedeutend ist (Theorem 5.17.24). Kriterien (5.152) und (5.153) folgen aus Theorem 5.17.38. Kriterium (5.154) ist Theorem 5.17.31, und (5.155) ist unsere Definition von Endlichkeit und Unendlichkeit. □ Ein weiteres Kriterium bietet Satz 5.175 S. 259.

Im Gegensatz zu der Frage, ob es mehrere Unmengenstufen gibt, werden wir die Frage, ob zwischen $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ und $\llbracket\mathbb{N}\rrbracket$ noch weitere Unendlichkeitsstufen existieren, beantworten können, und zwar im positiven Sinn. Im folgenden Abschnitt 5.18 werden wir aber zunächst sehen, dass man Mengen solcher „Zwischenstufen“ *nicht dadurch* erreichen kann, dass man *endliche* Mengen miteinander verknüpft.

[594] Zum Begriff des abzählbar Unendlichen siehe auch Definition 5.20.4.

[595] Formal: C (ist) *abzählbar unendlich* $:\Leftrightarrow$ $C \sim \omega$. C (ist) *absolut unendlich* $:\Leftrightarrow$ $C \sim \mathbb{D}$. C ist *konsistent unendlich* $:\Leftrightarrow$ C ist unendliche Menge. C ist *inkonsistent unendlich* $:\Leftrightarrow$ C ist Unmenge.

5.18 Abgeschlossenheit des Endlichen und Vergleich der Potenzen

Vorbemerkung. Als „natürliche Zahlen“ haben wir im vorhergehenden Abschnitt 5.17 die Elemente eines *beliebigen* Modells der Arithmetik benutzt. Nun aber vereinbaren wir:

5.18.1 Vereinbarung Alle arithmetischen Begriffe ≪Zahlen≫, ≪0≫,≪1≫,≪+≫ usw. beziehen sich von jetzt an auf das NEUMANNsche Standardmodell, abgesehen vom Symbol ≪$\mathbb{N}$≫, mit dem *nicht* die Menge ω der NEUMANNschen natürlichen Zahlen bezeichnet werden soll.[596]

Der folgende Satz fasst die Grundeigenschaften dieser „natürlichen Zahlen“ zusammen:

5.18.2 Theorem

Eine Klasse C ist genau dann endlich, wenn es
eine NEUMANN*sche Zahl n gibt, so dass $n \sim C$, d. h. so dass C auf Stufe $\llbracket n \rrbracket$ liegt.* (5.156)

Eine endliche Klasse C hat n Elemente genau dann, wenn $n \sim C$. (5.157)

Jede NEUMANN*sche Zahl n ist eine endliche Menge mit n Elementen.* (5.158)

Die Elemente k von n sind genau die Zahlen k mit $k < n$; und falls $n \neq 0$,
sind es genau die Zahlen k mit $k \leq n - 1$, d. h. die Zahlen $0, \ldots, n - 1$. (5.159)

Für NEUMANN*sche Zahlen m und n mit $m < n$ gilt $m \prec n$ und $\llbracket m \rrbracket < \llbracket n \rrbracket < \llbracket \omega \rrbracket$.* (5.160)

Beweis. Diese trivialen Sätze basieren auf der Gleichung $\mathtt{Ab}(n) = n$ (Theorem 5.16.46 S. 223).[597] □

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es, eine fundamentale Eigenschaft der Endlichkeit aufzuzeigen: dass die Klassenoperationen, die gewöhnlich aus „kleineren“ Klassen „größere“ produzieren (die Vereinigung, das Kreuzprodukt und die Potenzoperationen) nicht „stark genug“ sind, um aus endlichen unendliche Klassen hervorgehen zu lassen. Diese Eigenschaft kann man *Abgeschlossenheit des Endlichen* nennen, denn sie zeigt, „dass man aus dem Bereich des Endlichen nicht ohne weiteres herauskommt“. Da nun unsere „stärksten“ Operationen die *Potenzoperationen* sind,[598] sollen diese zuvor verglichen (und damit rekapituliert) werden.

Es wurden bis jetzt insgesamt *vier* Potenzoperationen eingeführt, wobei die eine dieser Operationen eine Zahl erzeugt und die übrigen drei eine Klasse hervorbringen:

(1) Für natürliche Zahlen n und m wurde eine Zahl definiert, welche die *Potenz der Zahl n mit der Zahl m* heißt und mit $n \uparrow m$ oder n^m bezeichnet wird (Definition 5.16.24).

---

596 Die Bezeichnung ≪$\mathbb{N}$≫ wird später als Bezeichnung des Trägers eines bestimmten Arithmetik-Modells verwendet, dessen Zahlen Urelemente sind (siehe Definition 5.21.28 S. 276).

597 (5.156) bzw. (5.157) bzw. (5.158) folgt wegen $\mathtt{Ab}(n) = n$ sofort aus 5.151 bzw. aus Definition 5.17.7 S. 238 bzw. aus Theorem 5.17.14 S. 240 (in Verbindung mit Theorem 5.17.24).
Zu (5.159). Die Zahlen k mit $k < n$ sind die Vorgänger von n, also die Elemente von $\mathtt{Ab}(n)$. Wegen $n = \mathtt{Ab}(n)$ sind dies die Elemente von n. Ist außerdem $n \neq 0$, so ist $n - 1$ nach Satz (5.136 S. 219) der unmittelbare Vorgänger von n. Kürzen wir diesen mit v ab, gilt also $v + 1 = n$. Dann bedeutet aber $k < n$, dass $k < v + 1$, was nach Satz 5.16.29 S. 219 mit $k \leq v$ gleichbedeutend ist, d. h. mit $k \leq n - 1$.
Zu (5.160). Aus $m < n$ folgt aus den Theoremen 5.16.35 S. 220 und 5.16.46 S. 223, dass $m \prec n$. Nach Satz 5.108 S. 204 folgt daraus $\llbracket m \rrbracket < \llbracket n \rrbracket$. Da $\llbracket m \rrbracket$ die endliche Menge m enthält, ist $\llbracket m \rrbracket$ eine Endlichkeitsstufe, während $\llbracket \omega \rrbracket$ wegen Korollar 5.17.27 S. 243 eine Unendlichkeitsstufe ist; wegen Satz 5.150 S. 246 gilt daher $\llbracket m \rrbracket < \llbracket \omega \rrbracket$.

598 Zur „Stärke“ der Operationen siehe die Bemerkung nach Theorem 5.18.10 S. 251.

(2) Analog wurde für Klassen C und Mengen M die *Potenz der Klasse C mit der Menge M* eingeführt und mit C^M oder $C \uparrow M$ oder $\mathtt{Func}(M, C)$ bezeichnet (Definition 5.10.61). Das war die Klasse, die alle Funktionen von M in C enthält.

(3) Für Klassen C wurde außerdem die *Potenzklasse von C* eingeführt und mit $\mathcal{P}(C)$ bezeichnet. Das war die Klasse, die alle Teilmengen von C enthält (Definition 5.10.14).

(4) Für Klassen C und natürliche Zahlen n wurde schließlich eine *Potenz der Klasse C mit der Zahl n* definiert und mit $C \uparrow n$ oder C^n bezeichnet. (Definition 5.16.16). Es war $C^0 = \{\emptyset\}$, $C^1 = C$, $C^2 = C \times C$, $C^3 = (C \times C) \times C$ usw.

Ein *Zusammenhang zwischen den Potenzen gemäß (1) und (2)* wird am Ende dieses Abschnitts in Satz 5.163 S. 251 aufgezeigt. Er besteht darin, *dass wenn C eine endliche Menge mit c Elementen und M eine solche mit m Elementen ist, C^M genau c^m Elemente besitzt.*

Den *Zusammenhang zwischen den Potenzen gemäß (2) und (3)* aber macht das folgende Theorem deutlich: Es zeigt, dass für Mengen M die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ immer mit der Potenz $\{a, b\}^M$ einer beliebigen Zweiermenge $\{a, b\}$ mit M gleichmächtig ist.

5.18.3 Theorem Seien a und b irgendwelche voneinander verschiedenen Individuen.
Dann gilt für jede Menge M, dass $\mathcal{P}(M) \sim \{a, b\}^M$.

Beweis. Siehe Anhang S. 432. □

Zur Potenz einer Klasse mit einer Zahl gemäß (4) ist zunächst anzumerken, dass C^n doppeldeutig ist, sobald das zugrunde liegende Modell der Arithmetik ein solches ist, in dem als ≪Zahlen≫ Mengen fungieren (wie es z. B. im Standardmodell der Fall ist). Man kann dann C^n sowohl im Sinne von (4) als auch im Sinne von (2) verstehen. Auch muss man damit rechnen, dass die Klasse C selbst eine Zahl sein kann: dann kann man die Potenz sogar im Sinne von (1) interpretieren. Aus dem Zusammenhang geht zwar meist hervor, was gemeint ist, aber für Zweifelsfälle schlage ich folgende Schreibweisen vor:

- $C_{\ Zahl\uparrow Zahl}\ n$ für die Potenz der Zahl C mit der Zahl n (im Sinne von (1)),
- $C_{\ Klasse\uparrow Menge}\ n$ für die Potenz der Klasse C mit der Menge n (im Sinne von (2)).
- $C_{\ Klasse\uparrow Zahl}\ n$ für die Potenz der Klasse C mit der Zahl n (im Sinne von (4)).

Ein beachtenswerter *Zusammenhang zwischen der Potenz im Sinne von (2) und (4)* ist nun der, dass man die Elemente von C^M (d. h. $C_{\ Klasse\uparrow Menge}\ M$) ebenso wie die von $C^{\ n}$ (d. h. $C_{\ Klasse\uparrow Zahl}\ n$) einsetzen kann, um mehrere Elemente von C geordnet (und mit möglicher Wiederholung desselben Elements) zusammenzufassen. Dass nämlich die Elemente von C^M als solche Zusammenfassungen gedeutet werden können, wurde schon auf S. 146–147 erörtert: Dort hatten wir die Funktionen f mit Definitionsbereich M als *M-Tupel* bezeichnet und als geordnete Zusammenfassung von Objekten gedeutet. Ist zum Beispiel $M = \{1, 3, 5\}$ und $C = \{a, e\}$, so ist $\left\langle {a\ e\ e \atop 1\ 3\ 5} \right\rangle$ (d. h. die Funktion, die 1 auf a, 3 auf e und 5 auch auf e wirft) ein Element von C^M, welches die Elemente a, e, e von C in dieser Reihenfolge zusammenfasst. Auch die Elemente von C^n (d. h. $C_{\ Klasse\uparrow Zahl}\ M$) kann man nun als derartige Zusammenfassungen ansehen. $C^2 := C \times C$ enthält nämlich die geordneten Paare $\langle a, b\rangle$ mit Komponenten a und b aus C, und $C^3 := (C \times C) \times C$ enthält die Paare $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$ mit erster Komponente $\langle b, c\rangle$ aus $C \times C$ und zweiter Komponente c aus C; hierfür schreibt man kurz $\langle a, b, c\rangle$ und sieht dies als eine geordnete Zusammenfassung der Elemente a, b, c aus C an, in der zuerst a, dann b und dann c „kommt“. Analog ist C^4 eine geordnete Zusammenfassung mit vier Komponenten usw. Braucht man also geordnete Zusammenfassungen von Elementen von C mit n Komponenten, so kann man sowohl Elemente von C^n wie auch jene von C^M nehmen (wobei M eine Menge mit n Elementen ist).

Um diese Arten geordneter Zusammenfassungen zu unterscheiden, nenne ich die Elemente von C^M «funktionale Tupel», und die Elemente von C^n «nichtfunktionale Tupel». Ein Nachteil der funktionalen Tupel ist zunächst, dass man *irgendeine* Menge M mit n Elementen als Indexklasse wählen muss, die gar nichts mit den Objekten zu tun hat, die man ordnen will. Dies fällt auch in der Notation auf, in der man bei funktionalen Tupeln die Elemente einer Indexklasse M „mitschleppen" muss: vgl. etwa das nichtfunktionale Tupel $\langle a, e, e\rangle$ mit einem entsprechenden M-Tupel wie $\left\langle \begin{smallmatrix} a & e & e \\ 1 & 3 & 5 \end{smallmatrix} \right\rangle$. Um diesen Nachteil loszuwerden, kann man für die Zusammenfassung von n Elementen ein für allemal eine „Mustermenge" M mit n Elementen auswählen, und dann die C^M-Tupel als die „standardmäßigen" Tupel mit n Komponenten aus C ansehen. Als Mustermenge M mit n Elementen bietet sich nun die NEUMANNsche Zahl n selbst an, die ja eine Menge mit genau n Elementen ist:

5.18.4 Definition Für Zahlen n seien die *standardmäßigen Tupel mit n Komponenten* die funktionalen n-Tupel, deren Definitionsbereich die NEUMANNsche Zahl n ist.

Das standardmäßige Tupel, in dem zuerst a, dann e und dann wieder e kommt, wäre also das 3-Tupel $\left\langle \begin{smallmatrix} a & e & e \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right\rangle$, wobei $0, 1, 2$ die NEUMANNschen Zahlen sind, welche die Elemente der NEUMANNschen 3 sind, während es sich bei $\left\langle \begin{smallmatrix} a & e & e \\ 1 & 3 & 5 \end{smallmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{smallmatrix} a & e & e \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right\rangle$ und $\left\langle \begin{smallmatrix} a & e & e \\ \omega & \emptyset & 0 \end{smallmatrix} \right\rangle$ um funktionale Tupel mit 3 Komponenten handelt, die *keine* standardmäßigen Tupel sind. Man beachte:

5.18.5 Theorem *Die Indizes eines n-Tupels für $n \neq 0$ sind die Zahlen k mit $k \leq n-1$, so dass das Tupel eine 0-te, ..., und $n-1$-te Komponente, aber keine n-te Komponente hat.*

Beweis. Nach Satz 5.159 S. 248 sind die Elemente von n die Zahlen k mit $k \leq n-1$. □ Für standardmäßige Tupel braucht man die Elemente ihres Indexbereichs M nun nicht mehr zu notieren, sondern nur die zusammengefassten Objekte in der Reihenfolge ihres Auftretens:

5.18.6 Definition Eine Zeichenreihe $\leqslant \ldots \geqslant$, die mit der Klammer $\leqslant$ beginnt und mit der Klammer $\geqslant$ endet, wobei zwischen diesen Klammern m durch Kommata getrennte Objektbezeichnungen stehen, soll stets das standardmäßige m-Tupel bezeichnen, das die aufgezählten Objekte in der Reihenfolge ihrer Aufzählung zusammenfasst; $\leqslant\geqslant$ bezeichnet das leere Tupel $\emptyset$.

Beispielsweise steht $\leqslant a, e, e\geqslant$ für $\left\langle \begin{smallmatrix} a & e & e \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right\rangle$, $\leqslant a, e, a, e, e\geqslant$ für $\left\langle \begin{smallmatrix} a & e & a & e & e \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix} \right\rangle$ usw. Jetzt ist kein großer Unterschied mehr zwischen funktionalen Tupeln wie $\leqslant a, e, a\geqslant$ und nicht-funktionalen Tupeln wie $\langle a, e, a\rangle$ zu sehen: interpretieren wir C^3 im Sinne von (4), so ist dies die Klasse aller $\langle x, y, z\rangle$ mit x, y, z aus C, und interpretieren wir C^3 im Sinne von (2), so ist dies die Klasse aller $\leqslant x, y, z\geqslant$ mit x, y, z aus C. Daher ist das folgende Theorem nun ohne weiteres einleuchtend:

5.18.7 Theorem *Die Klassen $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Zahl} n$ und $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Menge} n$ sind gleichmächtig.*

Beweis. Die Funktion, welche jedes $\leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n\geqslant$ mit Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus C auf $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ wirft, ist offensichtlich eine Bijektion von $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Zahl} n$ in $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Menge} n$. □

Die Potenzen C^n im Sinne von $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Zahl} n$ haben die nützliche Eigenschaft, dass $C^1 = C$ gilt und für jedes von 0 verschiedene n stets $C^{n+1} = C^n \times C$ ist, was man in Induktionsbeweisen ausnutzen kann. Doch auch in diesem Punkt erweisen sich die Potenzen $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Menge} n$ als gleichwertig: versteht man C^n im Sinne von $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Menge} n$, so gilt nämlich $C^1 \sim C$ und $C^{n+1} \sim C^n \times C$ für jedes n:

5.18.8 Theorem *Für Klassen C und Zahlen n aus ω gilt $C^0 = \{\emptyset\}$, $C^1 \sim C$, $C^2 \sim C \times C$ und $C^{n+1} \sim C^n \times C$* (wobei die Potenzen im Sinn von ${}_{Klasse}\!\uparrow_{Menge}$ gemeint sind).

Beweis. Siehe Anhang S. 432–433. □ So hat die Verwendung von C^n im Sinne von $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Zahl} n$ keinen entscheidenden Vorteil mehr. Dann aber spricht für den Gebrauch der mit ${}_{Klasse}\!\uparrow_{Menge}$ gebildeten Potenzen, dass diese „allgemeiner“ sind, weil sie auch zu Klassen führen können, welche „Tupel mit unendlich vielen Komponenten“ enthalten. Daher schließe ich C^n im Sinne von $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Zahl} n$ aus dem weiteren Diskurs aus:

5.18.9 Vereinbarung C^n soll für Zahlen n fortan immer im Sinne von $C\,{}_{Klasse}\!\uparrow_{Menge} n$ verstanden werden. Somit enthält C^n die Funktionen von n in C, die wir nach Definition 5.18.4 auch als ≪standardmäßige n-Tupel mit Komponenten aus C≫ verwenden.

So viel zu den verschiedenen Potenzen und ihrer Bedeutung. Nun können die entscheidenden Aussagen über die „Abgeschlossenheit der Endlichkeit“ wie folgt formuliert werden:

5.18.10 Theorem *Seien A und B endlich, habe A n und B m Elemente und sei k eine Zahl. Dann gilt:*

$A \cup B$	*ist endlich und hat,*	*falls A und B disjunkt sind,*		$m + n$ *Elemente.*	(5.161)
$A \times B$	*ist endlich und hat*	mn	*Elemente.*		(5.162)
A^B	*ist endlich und hat*	m^n	*Elemente.*		(5.163)
A^k	*ist endlich und hat*	m^k	*Elemente.*		(5.164)
$\mathcal{P}(A)$	*ist endlich und hat*	2^n	*Elemente.*		(5.165)

Beweis. Siehe Anhang S. 433. □

Bemerkung. Die Formeln (5.161) bis (5.165) zeigen im Hinblick darauf, dass die Potenzierung „schneller“ als die Multiplikation, und diese wieder „schneller“ als die Addition zu größeren Zahlen führt,[599] dass die Bildung der Potenzen „schneller“ zu größeren Mengen führt als die Bildung des Kreuzprodukts, und diese wieder „schneller“ als die Bildung der Vereinigung. In diesem Sinn können also Potenzoperationen als die „stärksten“ unserer Mengenoperationen gelten. Neben den in Theorem 5.18.10 betrachteten Operationen sind es noch die „großen Versionen“ der Vereinigung und des Kreuzprodukts, die meist zu größeren Klassen führen. Aber auch diesbezüglich gilt:

5.18.11 Theorem Sei $\langle x \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Familie endlicher Mengen mit endlichem Indexbereich I, und $\mathfrak{M}$ eine endliche Mengenklasse mit nur endlichen Mengen als Elementen.
Dann sind auch $\bigcup_{i\in I} \theta_i$ und $\bigtimes_{i\in I} \theta_i$ sowie $\bigcup \mathfrak{M}$ und $\bigtimes \mathfrak{M}$ endlich.

Beweis. Siehe Anhang S. 434. □

Zu erörtern bleiben noch die Operationen $\setminus$ (Klassendifferenz), $\cap$ (Schnitt) und $\complement$ (Komplementbildung). Das Resultat von Klassendifferenz und Schnitt ist stets eine Teilklasse einer der Ausgangsklassen, so dass nach Satz 5.143 S. 244 auch diese Operationen bei Verwendung endlicher Ausgangsklassen nur endliche Klassen hervorbringen. Das gilt auch für die „großen“ Schnitte $\bigcap$ und $\bigcap$, *es sei denn*, man schneidet über die leere Klasse: dann ergibt sich die Unmenge $\mathbb{D}$.[600] Ebenso ist das Komplement einer Menge (auch dasjenige einer endlichen Menge) nach Korollar 5.15.13 S. 203 stets eine Maximalklasse der Stufe $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$. Wir können also zusammenfassen:

[599] Dies haben wir in den Bemerkungen nach Def. 5.16.23 und Definition 5.16.24 festgestellt (S. 218).

[600] Siehe die Erläuterungen im Anschluss an Definitionen 5.10.22 S. 126 und 5.10.72 S. 149.

5.18.12 Theorem

- *Sind A und B endliche Klassen, ist $\mathfrak{M}$ eine endliche Mengenklasse endlicher Mengen, und ist $\langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Familie endlicher Mengen mit endlichem Indexbereich, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, A^B, $\mathcal{P}(A)$, $\bigcup \mathfrak{M}$, $\times\, \mathfrak{M}$, $\bigcup_{i\in I} \theta(i)$, und $\bigtimes_{i\in I} \theta(i)$ endlich. Auch $\bigcap \mathfrak{M}$ und $\bigcap_{i\in I} \theta(i)$ sind endlich, wenn $\mathfrak{M}$ bzw. I nichtleer sind.*
- *Falls aber $\mathfrak{M}$ bzw. I leer ist, so ist $\bigcap \mathfrak{M}$ bzw. $\bigcap_{x\in I} \theta(x)$ gleich $\mathbb{D}$. Außerdem ist $\complement A$ für Mengen A stets eine mit $\mathbb{D}$ gleichmächtige Unmenge.*

Die Situation für den Bereich der *endlichen Mengen* ist damit vollkommen analog zu der in Abschnitt 5.10 festgestellten Situation für den Bereich der *Mengen* überhaupt: Wie man ausgehend von Mengen immer Mengen erhält, so ausgehend von endlichen Mengen immer endliche Mengen – wobei in beiden Fällen die großen Schnitte über die leere Klasse und die Komplementbildung ausgenommen sind, die zu Maximalklassen der Stufe $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$ führen. *Ohne jede Ausnahme* aber können wir sagen:

> Schlechthin *alle* unsere Operationen führen, wenn nur endliche Mengen beteiligt sind, immer zu endlichen Mengen *oder* zu mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen Unmengen: *niemals* aber zu *unendlichen Mengen*, von deren Existenz wir inzwischen ja wissen.

Das heißt insbesondere: Wenn wir die Frage klären wollen, ob es außer der Stufe $\llbracket \omega \rrbracket$ und der Unmengenstufe $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$ noch weitere Stufen der Unendlichkeit gibt, so müssen wir, um Klassen dieser Stufen mit unseren Operationen zu erreichen, als Ausgangsklassen auf jeden Fall unendliche Klassen nehmen. Die hierzu erforderlichen Untersuchungen von Operationen mit unendlichen Ausgangsklassen nehme ich in Abschnitt 5.20 auf. Im folgenden Abschnitt 5.19 soll zunächst ein weiteres Axiom eingeführt werden, das mit dem bis jetzt erarbeiteten Wissen bequem formuliert und diskutiert werden kann: das Antizirkularitätsaxiom.

5.19 Das Antizirkularitätsaxiom (und Fundierungsaxiom)

Zu den üblichen Axiomen der Mengenlehre gehört das so genannte *Fundierungsaxiom*, das manchmal auch *Regularitätsaxiom* genannt wird. Es macht eine Aussage über so genannte «unendliche $\in$-Ketten». Ich erkläre zunächst diesen Begriff:

5.19.1 Definition Sei $n \in \omega$ und $n > 1$. Dann ist eine *$\in$-Kette der Länge n* ein n-Tupel $\langle\!\langle f_0, \ldots, f_{n-1} \rangle\!\rangle$ so dass für alle Indizes i mit $i \neq 0$ stets $f_i \in f_{i-1}$ gilt. Gilt außerdem $f_0 = f_{n-1}$, so heißt die $\in$-Kette *geschlossen*. Eine *unendliche $\in$-Kette* ist ein ω-Tupel f so dass für alle Indizes i mit $i \neq 0$ stets $f_i \in f_{i-1}$ gilt. Gilt außerdem für verschiedene Indizes i, j stets $f_i \neq f_j$, so heißt die unendliche $\in$-Kette *geradlinig unendlich*.[601] Es gilt demnach:

- Eine *$\in$-Kette der Länge* 2 ist ein 2-Tupel $\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle$ mit $f_1 \in f_0$,
- eine *$\in$-Kette der Länge* 3 ist ein 3-Tupel $\langle\!\langle f_0, f_1, f_2 \rangle\!\rangle$ mit $f_2 \in f_1 \in f_0$,
- eine *$\in$-Kette der Länge* 4 ist ein 4-Tupel $\langle\!\langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle\!\rangle$ mit $f_3 \in f_2 \in f_1 \in f_0$, usw.

- Eine *geschlossene $\in$-Kette der Länge* 2 wäre $\langle\!\langle a, a \rangle\!\rangle$, wenn $a \in a$,
- eine *geschlossene $\in$-Kette der Länge* 3 wäre $\langle\!\langle a, x, a \rangle\!\rangle$, wenn $a \in x \in a$,
- eine *geschlossene $\in$-Kette der Länge* 4 wäre $\langle\!\langle a, u, x, a \rangle\!\rangle$, wenn $a \in x \in u \in a$ usw.

- Eine *unendliche $\in$-Kette* wäre ein ω-Tupel mit $\ldots f_4 \in f_3 \in f_2 \in f_1 \in f_0$,
  wobei die Bezeichnungen gleichsam „von links aus dem Unendlichen kommen“;
  sie ist *geradlinig unendlich*, wenn alle Komponenten $(\ldots f_4, f_3, f_2, f_1, f_0)$ verschieden sind.

In allen obigen Definitionen sprechen wir statt von $\in$-Ketten von *Mengen*ketten, falls die f_i zusätzlich Mengen sind. Wichtig sind für uns vor allem die geschlossenen Mengenketten:

5.19.2 Definition Eine *geschlossene Mengenkette* ist eine Funktion von einer Zahl $n > 1$ in $\mathbb{M}$, so dass $f_0 = f_{n-1}$ ist und für alle von 0 verschiedenen Elemente i von n gilt: $f_i \in f_{i-1}$.[602]

Für eine Mengenlehre, die auch Unmengen zulässt, ist vorab die folgende Feststellung wichtig:

5.19.3 Theorem

In jeder unendlichen $\in$-Kette f sind alle f_i für $i \neq 0$ Mengen. (5.166)

Jede geschlossene $\in$-Kette f ist eine Mengenkette, da jedes f_i dort eine Menge ist. (5.167)

Beweis. Zu (5.166). Sei f eine $\in$-Kette und $i \neq 0$. Dann gilt $f_i \in f_{i-1}$. Also ist f_i Element einer Klasse und daher ein Individuum. Ist f sogar eine *unendliche* $\in$-Kette, so ist außerdem $i + 1$ ein Index von f, und es gilt $f_{i+1} \in f_i$.[603] Da also f_i ein Element hat, ist f_i eine Klasse. Insgesamt ist f_i eine Klasse, die ein Individuum ist: also eine Menge. Damit ist (5.166) bewiesen.

---

601 Die formalen Definitionen lauten:

f (ist) $\in$-Kette der Länge n $:\Leftrightarrow f$ n-Tupel $\wedge \bigwedge_{i \in n} (i \neq 0 \rightarrow f_i \in f_{i-1})$.

f (ist) geschlossene $\in$-Kette $:\Leftrightarrow \bigvee_{n \in \omega} (n > 1 \wedge f \in$-Kette der Länge $n \wedge f_{n-1} = f_0)$.

f (ist) unendliche $\in$-Kette $:\Leftrightarrow f$ ω-Tupel $\wedge \bigwedge_{i \in n} (i \neq 0 \rightarrow f_i \in f_{i-1})$.

f (ist) geradlinig unendliche $\in$-Kette $:\Leftrightarrow f$ ist unendliche $\in$-Kette und $\bigwedge_{i \in \omega} \bigwedge_{j \in \omega} (i \neq j \rightarrow f_i \neq f_j)$.

Wenn man die Minusoperation nicht einführen will, kann man hier für «$i - 1$» bzw. «$n - 1$» den Term «der Vorgänger von i» bzw. «von n» setzen, der wegen des vierten PEANOschen Axioms wohldefiniert ist.

602 Formal: f (ist) geschlossene Mengenkette $:\Leftrightarrow \bigvee_{n \in \omega \setminus \{0,1\}} \Big(f\colon n \longrightarrow \mathbb{M} \wedge \bigwedge_{i \in n \setminus \{0\}} (f_i \in f_{i-1}) \wedge f_0 = f_{n-1} \Big)$.
Hierbei kann man $i - 1$ durch «der Vorgänger von i» ersetzen (siehe Fußnote 601).

603 Da i nach Satz 5.135 S. 219 der unmittelbare Vorgänger von $i + 1$ ist, gilt nach Satz 5.136, dass $i = (i + 1) - 1$, und da f eine $\in$-Kette ist, ist f_{i+1} Element von $f_{(i+1)-1}$, d. h. von f_i.

Zu (5.167). In einer *geschlossenen* $\in$-Kette gilt für *jeden* Index i, dass f_i sowohl Element einer Klasse ist als auch selbst ein Element hat. So ist f_i zugleich Individuum und Klasse, also eine Menge. □

Das Fundierungsaxiom soll nun ausdrücken: *Es gibt keine unendlichen $\in$-Ketten.* Es wird aber nur selten so formuliert, denn man führt es meist schon an Anfang der Mengenlehre ein, wo aber der Begriff der unendlichen $\in$-Kette noch nicht zur Verfügung steht. So verwendet man die Formulierung: *Jede nichtleere Mengenmenge $\mathfrak{M}$ hat ein Element M mit der Eigenschaft $M \cap \mathfrak{M} = \emptyset$.* Diese Formulierung hat aber den Nachteil, dass sich wohl kaum jemand etwas Konkretes darunter vorstellen kann. Man benötigt dann früher oder später einen Äquivalenzbeweis, der (bei vorausgesetzter Gültigkeit der übrigen Axiome) die Gleichwertigkeit der beiden Formulierungen aufzeigt.

5.19.4 Fundierungsaxiom. *Zu jeder Mengenmenge $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ gibt es ein M mit $M \in \mathfrak{M}$ und $M \cap \mathfrak{M} = \emptyset$.* Hiermit ist äquivalent: *Es gibt keine unendlichen $\in$-Ketten.*

Äquivalenzbeweis. Siehe Anhang S. 434–435. □

Bemerkung. Ich halte dieses Axiom aus gleich zu besprechenden Gründen für *nicht* plausibel.

Das Fundierungsaxiom hat eine „negative“ Natur, da es die *Nichtexistenz* gewisser Objekte fordert. Nachdem es erstmals 1925 von John von Neumann erwogen worden war,[604] wurde es 1930 von Zermelo in die überarbeitete Version seiner axiomatischen Mengenlehre eingefügt[605] und erfreut sich seitdem (fast) allgemeiner Anerkennung. Die wichtigste Leistung des Axioms ist nun die, dass es nicht nur unendliche, sondern auch *geschlossenen* $\in$-Ketten ausschließt:

5.19.5 Theorem *Gilt das Fundierungsaxiom, so gibt es kleine geschlossenen $\in$-Ketten.*

Beweis. Gilt das Fundierungsaxiom, so gibt es keine unendliche $\in$-Kette. Gäbe es dann eine *geschlossene* $\in$-Kette wie zum Beispiel $\langle\!\langle a, x, a \rangle\!\rangle$ mit $a \in x \in a$, ließe sich aber sofort eine *unendliche* $\in$-Kette angeben, denn es gilt ja dann auch $\langle\!\langle \cdots \in a \in x \in a \in x \in a \rangle\!\rangle$. □
Gilt also das Fundierungsaxiom, kann man nun mittels Theorem 5.19.5 schließen:

- Es gilt niemals $a \in a$, sonst wäre $\langle\!\langle a, a \rangle\!\rangle$ eine geschlossene $\in$-Kette.
- Es gilt niemals $a \in x \in a$, sonst wäre $\langle\!\langle a, x, a \rangle\!\rangle$ eine geschlossenen $\in$-Kette.
- Es gilt niemals $a \in x \in u \in a$, sonst wäre $\langle\!\langle a, u, x, a \rangle\!\rangle$ eine geschlossenen $\in$-Kette, usw.

Indem das Fundierungsaxiom unendliche und geschlossene $\in$-Ketten ausschließt, schließt es auch die Existenz gewisser Klassen aus bzw. fordert, dass Klassen einen ganz bestimmten Aufbau haben müssen: Nennen wir eine Klasse *zirkulär*, wenn sie am Ende einer geschlossenen $\in$-Kette steht, *unendlich tief*, wenn sie am Ende einer geradlinig unendlichen $\in$-Kette auftaucht, und *wohlfundiert*, wenn sie weder zirkulär noch unendlich tief ist, so schließt das Fundierungsaxiom die Existenz zirkulärer und unendlich tiefer Klassen aus, und fordert, dass alle Klassen wohlfundiert sein sollen.

5.19.6 Definition

C (ist) *unendlich tief*, $:\Leftrightarrow$ es gibt eine *geradlinig unendliche* $\in$-Kette f, so dass $C = f_0$.
C (ist) *zirkulär* $:\Leftrightarrow$ es gibt eine *geschlossene* $\in$-Kette f, so dass $C = f_0$.
C (ist) *wohlfundiert* $:\Leftrightarrow$ C ist weder zirkulär noch unendlich tief.

---

604 Neumann überprüfte es mit positivem Ergebnis auf seine logische Vereinbarkeit mit den übrigen Axiomen (vgl. Neumann, *Eine Axiomatisierung*, Kap. II, § 5, S. 55 Axiom IV.4 und Neumann, *Werke*, Einleitung, S. 498f). Zuvor (1922) hatte bereits Adolf Abraham Fraenkel den Ausschluss aller über die „Bedürfnisse der Mathematik“ hinausgehenden Mengen durch ein „Beschränktheitsaxiom“ gefordert (vgl. Fraenkel, *Cantor-Zermelosche Mengenlehre* S. 52f und Fraenkel, *Mengenlehre* S. 355f).

605 Vgl. Zermelo, *Grenzzahlen und Mengenbereiche* S. 31.

Unendlich tief ist also eine Klasse C, wenn sie ein (von sich selbst verschiedenes) Element x_1 hat, das ein (von sich und C verschiedenes) Element x_2 hat, das ein (von sich und x_1 und C verschiedenes) Element x_3 hat usw. ad infinitum, so dass «$\ldots x_2 \in x_1 \in C$» gilt. Die Bezeichnung «unendlich tief» ist dadurch motiviert, dass man sich die Elemente einer Klasse C auf einer „tieferen Ebene" angesiedelt denkt als C selbst: Die Elemente von C kann man sich nämlich als Fundamente oder Säulen denken, auf denen C aufruht, und in diesem Bild müssen Klassen immer auf einem „höheren" Niveau als ihre Elemente liegen. Diese Niveaus oder Ebenen sollte man nicht mit den Klassenstufen verwechseln. Im Reich der Stufen liegen nämlich Klassen mit gleich vielen Elementen gleich hoch, so dass etwa die drei einelementigen Mengen $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ und $\{\emptyset\}$ auf ein und derselben „Stufe" liegen, während im Reich der jetzt betrachteten „Ebenen" die Menge $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ *über* ihrem Element $\{\{\emptyset\}\}$ liegt, und dieses wieder *über* $\{\emptyset\}$. Eine unendlich tiefe Klasse muss nun sogar eine endlose Reihe derartiger Ebenen unter sich haben (auch wenn sie nur einelementig ist).

Zirkulär ist eine Klasse C, wenn sie Element von sich selbst ist ($C \in C$), oder wenn sie ein Element x hat, von dem sie selbst Element ist ($C \in x \in C$) oder wenn sie ein Element hat, welches ein Element hat, von dem sie selbst Element ist ($C \in x \in u \in C$) usw. Solche Klassen sind also ganz oder teilweise „aus sich selbst aufgebaut" und deshalb in dem obigem Bild von den Ebenen nicht unterzubringen, es sei denn, man legt C auf *mehrere* Ebenen: Wenn $C \in C$ ist, müsste C auf *allen* Ebenen, wenn $C \in x \in C$ ist, auf *jeder zweiten* Ebene liegen usw. Jede zirkuläre Klasse muss eine Menge sein, da sie stets Element einer Klasse ist: *Zirkuläre Klassen und zirkuläre Mengen sind daher ein und dasselbe.*

Wohlfundiert ist schließlich eine Klasse C, von der aus man in endlich vielen Schritten zu einem „absoluten Fundament" hinabsteigen kann: Geht man von der wohlfundierten Klasse C zur Ebene eines ihrer Elemente hinunter, steigt dann von dieser Ebene weiter hinab zur Ebene eines Elements dieses Elements usw., so gelangt man schließlich zu einem Element, das „ganz unten" liegt, und dies gilt für jeden beliebigen „Weg nach unten", den man von C aus gehen kann. Die Forderung, dass es keine unendlichen $\in$-Ketten gibt, bedeutet nun offenbar, dass jede Klasse in dieser Weise wohlfundiert ist, und so erklärt sich der Name „Fundierungsaxiom".

Nun stellt sich die Frage, ob das Fundierungsaxiom im Rahmen unserer realistischen Mengenlehre plausibel ist. Mir scheint es nur *teilweise* akzeptabel zu sein, nämlich insofern es zirkuläre Klassen bzw. geschlossene $\in$-Ketten ablehnt. Diesen Teil werden ich als „Antizirkularitätsaxiom" übernehmen. Die Behauptung jedoch, dass es keine unendlich tiefen Klassen bzw. geradlinig unendlichen $\in$-Ketten gibt, dürfte *wohl kaum a priori einsichtig sein.*

Überlegen wir zuerst, was *zugunsten* dieses Aspektes des Fundierungsaxioms angeführt werden kann. Wenn es unendliche $\in$-Ketten gibt, stoßen wir im Bereich der Mengen auf eine *neue Dimension des Unendlichen*: Es gibt dann „der Tiefe nach" unendliche Klassen, während man die gewöhnlichen unendlichen Klassen als „der Breite nach" unendlich bezeichnen könnte. Durch Zulassung solcher Klassen wird das Klassenuniversum zweifellos komplizierter und unübersichtlicher. Indem das Fundierungsaxiom derartige Klassen ausschließt, trägt es also zur Vereinfachung bei. Dieser *pragmatische* Vorteil des Axioms ist jedoch kein Argument für seine *Wahrheit*. – Theoretisch interessanter ist die Behauptung, dass das Fundierungsaxiom unmittelbar einsichtig sei und zu den Urintentionen der Mengenlehre gehöre.[606] Dabei stützt man sich auf die Prämisse, dass das Mengenuniversum „von unten her" konstruiert werden muss: „Zuerst" soll nur die Ebene der Urelemente existieren, „dann" werden Mengen 1-ter Art (solche mit Urelementen als Elementen) hinzugefügt, „dann" Mengen 2-ter Art (solche mit Urelementen und Mengen 1-ter Art als Elementen) usw. Wenn

[606] Beispielsweise heißt es bei Ebbinghaus, *Mengenlehre* S. 177: „Tragen die Axiome ... willkürliche Züge? ... Hinsichtlich Ext[ensionalitätsaxiom], Aus[wahlaxiom] und Fund[ierungsaxiom] werden wir diese Frage verneinen wollen. Denn diese Axiome beinhalten Gesichtspunkte, die für die Mengenlehre eine grundsätzliche und intuitiv naheliegende Bedeutung haben ...."

man aber, wie in vorliegender Arbeit geschehen, Mengen als bereits gegebene Denkformen einführt, die aus widerspruchsfreien Erkenntnisakten abstrahiert sind, ist eine solche „Konstruktion“ unnötig. Die entscheidende Frage ist dann vielmehr die, ob eine unendlich tiefe Menge Inhalt einer widerspruchsfreien Vorstellung sein kann. Hier wird man nun sagen dürfen: *Es macht keine wesentlich größeren Schwierigkeiten, sich «unendlich tiefe» Mengen vorzustellen, als es Schwierigkeiten macht, sich überhaupt unendliche Mengen vorzustellen.*

Über die Zurückweisung möglicher Argumente für das Fundierungsaxiom in seiner üblichen Form hinaus möchte ich nun versuchen, positiv den folgenden Satz zu begründen:

Es gibt unendlich tiefe Mengen. (5.168)

Plausibilitätsbetrachtung. In einem zum Streckenmodell der natürlichen Zahlen analogen Zeitmodell (siehe Beispiel 5.16.62 S. 231) können wir uns die natürlichen Zahlen als Zeitpunkte eines beidseitig begrenzten Zeitintervalls denken. Sämtliche Zahlen $0, 1, 2 \ldots$ dieses Modells sollen also Zeitpunkte zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten A und Ω sein, wobei wir es natürlich auch *so* einrichten können, dass die 0 dem *späteren* Zeitpunkt Ω entspricht, und dass dann *größere* Zahlen immer *früheren* Zeitpunkten entsprechen. Stellen wir uns nun ein erkennendes Wesen vor, das zum Zeitpunkt Ω bzw. 0 einen Erkenntnisakt ausübt, dessen direkter Inhalt ein anderer Erkenntnisakt ist, den dasselbe Wesen zu dem früheren Zeitpunkt 1 ausgeübt hat, wobei der Inhalt dieses Erkenntnisaktes abermals ein anderer Erkenntnisakt ist, den das Wesen zu dem noch früheren Zeitpunkt 2 ausgeübt hat usw. Wenigstens prinzipiell besteht kein Grund, warum es unmöglich sein sollte, dass der Gegenstand der Betrachtung dieses Wesens zu jedem Zeitpunkt n ein zu dem früheren Zeitpunkt $n + 1$ ausgeübter Erkenntnisakt gewesen sein könnte. Nach den erforderlichen Abstraktionen erhalten wir dann aus dem im Zeitpunkt 0 ausgeübten Erkenntnisakt eine einelementige Menge M_0, deren Element eine einelementige Menge M_1 ist (die dem Erkenntnisakt im Zeitpunkt 1 entspricht), deren Element wieder eine einelementige Menge M_2 ist usw. Insgesamt steht dann M_0 offenbar am Ende einer geradlinig unendlichen $\in$-Kette und ist also eine unendlich tiefe Menge. □

So halte ich es für ratsam, auf das Fundierungsaxiom zu verzichten. Es ist zum Aufbau der modernen Mathematik auch nicht wirklich erforderlich, weshalb es von einigen Mengentheoretikern ausgelassen wird. Von denen, die dies tun,[607] ist wohl am weitesten Peter Aczel gegangen, der verschiedene „Anti-Fundierungsaxiome“ aufstellte, welche die „Existenz von allen möglichen nicht-wohlfundierten Mengen“ einer jeweils spezifischen Art postulieren.[608] Hierbei ist Aczel jedoch nicht primär ontologisch motiviert; seine Motivation ist es, zirkuläre Prozesse in der Informatik mengentheoretisch zu modellieren.[609] Dabei lässt er auch zirkuläre Mengen zu, so dass dieser (wenn auch sicher interessante) Ansatz mit einer realistischen Mengeninterpretation nicht kompatibel ist. So möchte ich

[607] Als Erster hat Mirimanoff 1917 die Möglichkeit der Existenz nicht-wohlfundierter Mengen erwogen; er nannte sie „ensembles extraordinaires“ (vgl. Mirimanoff, *Les Antinomies* S. 42f). Hinweisen möchte ich ferner außer auf Peter Aczel (siehe Haupttext) auf Petr Hájek und Petr Vopěnka: In deren *Theory of Semisets* werden drei verschieden starke Fundierungsaxiome D1, D2, D3 diskutiert (*Semisets* Nr. 1450, S. 83, Nr. 3101, S. 139 und Nr. 3132, S 149), die jedoch in der Grundtheorie nicht vorausgesetzt werden. Urelemente werden als Mengen x mit $x = \{x\}$ angesehen, sind also nicht wohlfundiert (Nr. 3141, S. 152). Hájek stellt auch in seinem Artikel *Modelle der Mengenlehre* verschiedene nicht-wohlfundierte Mengentypen vor (S. 109f). Des Weiteren muss hier Quine genannt werden, der das Fundierungsaxiom explizit ablehnt (vgl. Quine, *Set Theory* S. 229 und S. 114 Fußnote 1). Nicht nur sind bei ihm alle Nichtklassen Elemente von sich selbst (Quine, *Mathematical Logic* S. 122 sowie Scott, *Quine's Individuals*), sondern es gilt auch: „Many classes are indeed members of themselves“ (Quine, *Mathematical Logic* S. 125), beispielsweise gilt $V \in V$ für die Klasse V aller Individuen (ebd. Satz 210 S. 163). Für eine begriffsartige Klassenlehre ist das durchaus konsequent. Vgl. auch Oberschelps *allgemeine Mengenlehre*, in der auf das Fundierungsaxiom verzichtet wird, und das Zitat von Skolem (unten, Fußnote 610).

[608] Vgl. Aczel, *Non-Well-Founded Sets* Vorwort S. XVIII: „every possible non-well-founded set exists“.

[609] Vgl. Aczel, *Non-Well-Founded Sets* Vorwort S. XI.

weder das volle Fundierungsaxiom noch ein Anti-Fundierungsaxiom voraussetzen, sondern schließe lediglich die zirkulären Mengen bzw. geschlossene Mengenketten durch folgendes Axiom aus:

5.19.7 Dreizehntes Axiom der Mengenlehre: Antizirkularitätsaxiom *Es gibt keine geschlossene Mengenkette.* Mit (5.167) folgt unmittelbar: *Es gibt keine geschlossene $\in$-Kette.*

Plausibilitätsbetrachtung. Angenommen, es liegt eine geschlossene Mengenkette f der Länge n vor. Nach (5.167) ist dann f_0 eine *Menge*. Man kann also einen widerspruchsfreien Erkenntnisakt mit den Elementen von f_0 als direktem Inhalt ausüben. Dann aber würde f_0 wegen $f_0 = f_{n-1} \in \ldots f_1 \in f_0$ direkt oder indirekt zum Inhalt dieses Erkenntnisaktes dazugehören, was mit der Struktur unseres Erkennens nicht vereinbar ist (vgl. Kapitel 3 S. 25–26). □

Natürlich kann es *andere* Interpretationen für die Konzepte der Mengenlehre geben, in denen zirkuläre Klassen oder Mengen vorkommen.[610] Auch in der *erweiterten Mengenlehre*, in der Begriffe als Klassen vorkommen, gibt es geschlossene $\in$-Ketten, denn ein Begriff kann ja Instanz von sich selbst sein: z. B. gilt $\mathbb{D} \in \mathbb{D}$ (die Kollektion aller Objekte ist selbst ein Objekt) und $\mathbb{C} \in \mathbb{C}$ (die Kollektion aller Kollektionen ist selbst eine Kollektion). Als unmittelbare Konsequenz aus dem Antizirkularitätsaxiom halte ich (für die elementar-allgemeine realistische Mengentheorie) fest:

5.19.8 Korollar *Niemals gilt $a \in a$. Oder anders gesagt: Die Relation $\in$ ist irreflexiv.*

Beweis. Wäre $a \in a$, so wäre $\langle\!\langle a, a \rangle\!\rangle$ eine geschlossene $\in$-Kette. □

Wir haben nun *alle klassischen Axiome der Mengenlehre* besprochen, zu denen ich die zwölf bisher aufgestellten Axiome *ohne das Axiom für Urelemente* rechne.[611] Darüber hinaus gibt es noch sog. „starke Unendlichkeitsaxiome“, die über die gewöhnliche Zermelo-Fraenkelsche und auch die Neumann-Bernays-Gödelsche Mengenlehre hinausführen – unter ihnen das „Universenaxiom“, welches das vierzehnte und letzte Axiom unserer „realistischen Mengenlehre“ werden soll. Um starke Unendlichkeitsaxiome mit ihren Konsequenzen diskutieren zu können, ist es aber notwendig, in die eigentliche transfinite Mengenlehre einzudringen, die es mit unendlichen Mengen zu tun hat, die *über* der Stufe $\|\omega\|$ liegen. Als erstes erörtere ich daher im folgenden Abschnitt, ob es solche Mengen überhaupt gibt bzw. welche Operationen zu ihnen führen.

---

610 Vgl. neben Aczel und den in Fußnote 607 genannten Autoren auch die Stellungnahme von Thoralf Skolem, welcher meinte, dass „viele gewiss bestreiten“ werden, dass eine Menge sich nicht selbst enthalten könne, „denn die Mengen kann man sich wohl als eine Art von Katalogen vorstellen, und solche können sich ja selbst anführen“ (Skolem, *Grundlagendiskussionen* S. 79).

611 Der Begriff „klassisch“ darf hierbei nicht zu eng genommen werden. Klassisch sind die hier aufgestellten Axiome nur von ihrer wesentlichen Idee her. So ist unser Auswahlaxiom stärker als die wirklich klassische Version, aber die Idee eines Auswahlaxioms ist klassisch. Ebenso ist die im Rahmenaxiom vollzogene konkrete Gleichsetzung von $\top$ mit $\emptyset$, $\bot$ mit $\{\emptyset\}$ und $\underline{\bot}$ mit $\mathbb{D}$ in gewisser Weise willkürlich, und in der Mengenlehre werden die Wahrheitswerte meist gar nicht explizit betrachtet. Aber die Idee, Wahrheitswerte mit Individuen gleichzusetzen, kann (wenigstens für die sog. Ausdruckslogik) als klassisch gelten (vgl. Glubrecht et al., *Klassenlogik* S. 334).

5.20 Unendliche Mengen höherer Stufen

Im Weiteren werden die folgenden beiden Theoreme benötigt. Das erste entspricht dem von EUKLID ausgesprochenen Grundsatz ≪*wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich*≫.[612] Mengentheoretisch gedeutet heißt dies: Fügt man zu gleichmächtigen Klassen A_1 und B_1 gleich viele neue Elemente hinzu (vereinigt also A_1 mit einer disjunkten Klasse A_2, und B_1 mit einer disjunkten Klasse B_2, wobei $A_2 \sim B_2$), so sind die resultierenden Klassen $A_1 \cup A_2$ und $B_2 \cup B_2$ wieder gleichmächtig. Das zweite Theorem drückt einen ebenso plausiblen Gedanken aus: *Gleiches gekreuzt bzw. potenziert mit Gleichem ergibt Gleiches*. Wer indessen meint, dass diese Sätze keines Beweises bedürfen, dem wird es zu denken geben, dass der ebenfalls von EUKLID aufgestellte Grundsatz: ≪*wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich*≫,[613] *falsch* ist: Ist $A \sim B$, und entfernt man aus A eine Teilmenge T und aus B ein Teilmenge S, wobei T und S gleichmächtig sind, so können die Resultate $A \setminus T$ und $B \setminus S$ dennoch *verschiedene* Mächtigkeiten haben.[614] Die Täuschung, welcher der „gesunde Menschenverstand" hier unterliegt, ist vergleichbar mit jener, die uns glauben lässt, dass keine Klasse mit einer ihrer echten Teilklassen gleichmächtig sein kann.

5.20.1 Theorem Seien die Klassen A_1, A_2 und B_1, B_2 jeweils disjunkt. *Gilt dann* $A_1 \sim B_1$ *und* $A_2 \sim B_2$, *so folgt* $A_1 \cup A_2 \ \sim \ B_1 \cup B_2$. *Dies bleibt wahr, wenn man* $\sim$ *durch* $\precsim$ *ersetzt.*

Beweis. Siehe Anhang, S. 435. □

5.20.2 Korollar Seien A_1, A_2, B_1 und B_2 Klassen.

Gilt $A_1 \precsim B_1$ *und* $A_2 \sim B_2$ *so folgt* $A_1^{A_2} \ \precsim \ B_1^{B_2}$. (5.169)

Gilt $A_1 \precsim B_1 \neq \emptyset$ *und* $A_2 \precsim B_2$ *so folgt* $A_1^{B_2} \ \precsim \ B_1^{A_2}$. (5.170)

Beweis. Siehe Anhang S. 435–436. □

5.20.3 Theorem Seien A_1, A_2, B_1, B_2, A, B Klassen und sei n eine Zahl. Dann gilt:

Wenn $A_1 \sim B_1$ *und* $A_2 \sim B_2$, *so folgt* $A_1 \times A_2 \ \sim \ B_1 \times B_2$. (5.171)

Wenn $A_1 \sim B_1$ *und* $A_2 \sim B_2$, *so folgt* $A_1^{A_2} \sim B_1^{B_2}$. (5.172)

Wenn $A \sim B$, *so folgt* $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$. (5.173)

Wenn $A \sim B$, *so folgt* $A^n \sim B^n$. (5.174)

Zusatz: (5.171), (5.173) und (5.174) bleiben wahr, wenn man überall $\sim$ durch $\precsim$ ersetzt.

Beweis. Siehe Anhang S. 436. □ In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, wie man von Mengen einer gegebenen Unendlichkeitsstufe zu solchen höherer Stufen gelangt, insbesondere zu unendlichen Mengen, die über der Stufe ω liegen. Wir teilen zunächst die unendlichen Klassen ein in solche, die auf $\llbracket \omega \rrbracket$ liegen und solche, die dort nicht liegen, indem wir die ersteren ≪abzählbar unendlich≫ und die letzteren ≪überabzählbar unendlich≫ nennen:

---

612 Vgl. EUKLID, *Elemente* Buch 1 Axiom 2, Ausgabe Heiberg/Stamatis Band 1 S. 5, Ausgabe Thaer S. 3.

613 Vgl. EUKLID, *Elemente* Buch 1 Axiom 3, Ausgabe Heiberg/Stamatis Band 1 S. 5, Ausgabe Thaer S. 3.

614 Ist etwa $A = B = \mathbb{N}$, $S = \mathbb{N}^*$ und $T = \mathbb{N}_g$ (wobei $\mathbb{N}$ Trägerklasse eines Arithmetik-Modells, $\mathbb{N}^*$ die Teilklasse der Zahlen ohne die Null und $\mathbb{N}_g$ die Teilklasse der geraden Zahlen des Modells ist), so ist $A \sim B$ und $S \sim T$, aber $A \setminus S$ ist die *einelementige* Menge $\{0\}$, während $B \setminus T$ die *unendliche* Menge der ungeraden Zahlen ist. Seine Gültigkeit behält das euklidische Axiom allerdings, wenn „Gleicheit" als unterschiedslose Identität (=) gedeutet wird: Dann beruht es auf der Einsetzungsregel der Gleichheitslogik (vgl. das Axiomen-Schema 5 auf S. 380), dass man von $a = b$ auf $a - c = b - c$ schließen darf.

5.20.4 Definition Die Klassen der Stufe $\llbracket\omega\rrbracket$, also nach Korollar 5.16.54 die Trägerklassen von Modellen der Arithmetik, heißen *abzählbar unendlich.* Die Klassen C höherer Stufen, die also mächtiger sind als Trägerklassen von Modellen der Arithmetik, heißen *überabzählbar unendlich* oder kurz *überabzählbar*. Klassen schließlich, die nicht höher als $\llbracket\omega\rrbracket$ angesiedelt sind, also auf $\llbracket\omega\rrbracket$ oder darunter liegen, heißen *höchstens abzählbar unendlich* oder kurz *abzählbar*:

C (ist) abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow\ \omega \sim C$, das heißt $C \in \llbracket\omega\rrbracket$.
C (ist) überabzählbar unendlich $:\Leftrightarrow\ \omega \prec C$, das heißt $\llbracket\omega\rrbracket <_{Fr} \llbracket C\rrbracket$.
C (ist) höchstens abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow\ C \precsim \omega$, das heißt $\llbracket C\rrbracket \leq_{Fr} \llbracket\omega\rrbracket$.

Wenn wir eine überabzählbar unendliche Mengen gefunden haben, sind auch alle mit ihr gleichmächtigen Mengen überabzählbar, denn die Eigenschaft der Überabzählbarkeit überträgt sich genau wie die Endlichkeit und Abzählbar-Unendlichkeit auf die gleichmächtigen Klassen:

5.20.5 Theorem Sei $A \sim B$, d. h. A und B liegen auf derselben Klassenstufe.
Ist dann A endlich bzw. abzählbar unendlich bzw. überabzählbar, so auch B.

Beweis. Per Definition und wegen Kriterium 5.152 S. 247 gilt, dass A genau dann endlich bzw. abzählbar unendlich bzw. überabzählbar unendlich ist, wenn $A \prec \omega$ bzw. $A \sim \omega$ bzw. $\omega \prec A$ gilt. Gilt dies, so folgt aus der Gleichmächtigkeit von A und B wegen Theorem 5.15.4 S. 201 und der Transitivität von $\sim$, dass auch $B \prec \omega$ bzw. $B \sim \omega$ bzw. $\omega \prec B$ ist. Daher ist auch B endlich bzw. abzählbar unendlich bzw. überabzählbar unendlich. □ Nützlicher als diese Definitionen sind oft die folgenden Zusammenhänge der Unendlichkeits-Begriffe:

5.20.6 Theorem

C ist unendlich	$\Leftrightarrow$	*C hat eine abzählbar unendliche Teilklasse.*	(5.175)
C ist höchstens abzählbar unendlich	$\Leftrightarrow$	*C ist endlich oder abzählbar unendlich.*	(5.176)
C ist überabzählbar	$\Leftrightarrow$	*C ist unendlich und liegt nicht auf $\llbracket\omega\rrbracket$.*	(5.177)

Beweis. Siehe Anhang S. 436–437. □ Dass überhaupt Klassen oberhalb von $\llbracket\omega\rrbracket$ existieren, wissen wir schon: Denn nach Satz 5.94 S. 201 muss jede Unmenge über der Menge ω liegen. Wir wollen nun aber fragen, ob es auch *Mengen* gibt, die überabzählbar unendlich sind. Diese müssten auf Klassenstufen unterhalb von $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$, aber oberhalb von $\llbracket\omega\rrbracket$ liegen. Um die Existenz überabzählbar unendlicher Mengen zu beweisen, wollen wir versuchen, eine solche Menge aus endlichen oder abzählbar unendlichen Mengen mit Hilfe von Klassenoperationen zu erzeugen. Wie wir in Abschnitt 5.18 gesehen haben, gelingt dies nicht, wenn wir unsere Operationen auf endliche Ausgangsklassen anwenden. So müssen wir Klassenoperationen betrachten, an der *mindestens eine abzählbar unendliche Menge* beteiligt ist. Der einfachste Versuch dieser Art wäre, einer abzählbar unendlichen Menge N ein Individuum a hinzuzufügen, also $N \cup \{a\}$ zu bilden. Dies führt aber nicht weiter, denn die Hinzufügung eines Elements a zu einer unendlichen Menge U führt niemals zu einer mächtigeren Menge:

5.20.7 Lemma *Ist U unendlich und $\{a\}$ einelementig, so ist U mit $U \cup \{a\}$ gleichmächtig.*

Beweis. Siehe Anhang S. 437. □ Die Aussage des Lemmas lässt sich verallgemeinern:

5.20.8 Theorem *Ist U unendlich und E endlich, so ist U mit $U \cup E$ und $U \setminus E$ gleichmächtig.*[615]

[615] Falls U eine Unmenge ist, haben wir in Theorem 5.15.12 bereits einen allgemeineren Satz bewiesen: U ist dann mit $U \cup M$ und mit $U \setminus M$ für *beliebige* Mengen M gleichmächtig. Vgl. auch 5.20.10 und 5.20.11.

Beweis. Siehe Anhang S. 437. □ Auch aus der Vereinigung *zweier* gleichmächtiger unendlicher Mengen U_1 und U_2 resultiert niemals eine mächtigere Klasse. Dies lässt sich nicht nur für unendliche Mengen, sondern auch für Unmengen der uns geläufigen Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ und $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ verifizieren und ist daher vermutlich für Unendlichkeit schlechthin charakteristisch:[616]

5.20.9 Theorem Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$. *Sind dann U_1 und U_2 mit U gleichmächtig, so gilt dies auch für $U_1 \cup U_2$. Sind insbesondere N_1 und N_2 abzählbar unendliche Mengen, gilt dies auch für $N_1 \cup N_2$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 437–439. □ Wenn demnach die Vereinigung einer unendlichen Klasse U mit einer gleichmächtigen Klasse keine mächtigere Klasse erzeugt, wird sich dies auch nicht durch Vereinigung von U mit einer schmächtigeren Klasse erzielen lassen. In der Tat gilt:

5.20.10 Korollar Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$, und sei $A \precsim U$. *Dann ist $U \cup A$ mit U gleichmächtig.*

Beweis. Siehe Anhang S. 439. □ Das Hinzufügen einer „kleineren“ Klasse A verändert also die (relationstheoretische) Größe des unendlichen U nicht. Dies gilt auch für das Wegnehmen eines solchen A, sofern U Menge ist oder zu den Unmengen der Stufe $\llbracket\Omega\rrbracket$ gehört:[617]

5.20.11 Korollar Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufe $\llbracket\Omega\rrbracket$, und sei $A \prec U$. *Dann ist U mit $U \setminus A$ gleichmächtig.*

Beweis. Siehe Anhang S. 439–440. □ Durch die Sätze 5.20.8 und 5.20.9 (vgl. auch 5.20.10 sowie 5.161 S. 251) hat sich nun *die Vereinigung zweier Mengen als schlechthin ungeeignet* erwiesen, um größere unendliche Mengen aus kleineren zu erzeugen. So müssen wir es mit Operationen versuchen, von denen wir gesehen haben, dass sie „schneller“ zu größeren Mengen führen als die Vereinigung: Kreuzprodukt und Potenzbildung (siehe Bemerkung nach Theorem 5.18.10). Wir betrachten zunächst das Kreuzprodukt $N \times N$ der Trägerklasse N eines Arithmetik-Modells mit sich selbst:

	0	1	2	3	4	5	...
0	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 0,3\rangle$	$\langle 0,4\rangle$	$\langle 0,5\rangle$	...
1	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 1,3\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	...
2	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 2,2\rangle$	$\langle 2,3\rangle$	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	...
3	$\langle 3,0\rangle$	$\langle 3,1\rangle$	$\langle 3,2\rangle$	$\langle 3,3\rangle$	$\langle 3,4\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	...
4	$\langle 4,0\rangle$	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 4,3\rangle$	$\langle 4,4\rangle$	$\langle 4,5\rangle$	...
5	$\langle 5,0\rangle$	$\langle 5,1\rangle$	$\langle 5,2\rangle$	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 5,4\rangle$	$\langle 5,5\rangle$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Man stellt sich die Elemente von $N \times N$ am besten so vor, dass sie in einem Rechtecksschema mit „unendlich vielen“ Spalten und Zeilen untergebracht sind (vgl. auch Abbildung 5.9 S. 130):

[616] Für hypothetische Unmengen U, die nicht diesen Stufen angehören, sehe ich momentan allerdings keinen Weg, dies zu zeigen. Entsprechendes gilt für die Frage, ob U in den folgenden Sätzen 5.20.10, 5.20.11, 5.20.13, 5.20.14, 5.20.15, 5.20.17, und 5.20.18 einer beliebigen Unmengenstufe angehören kann. Wenigstens gilt aber $U \sim U \cup M$, wann immer U eine Unmenge und M eine Menge ist (Theorem 5.15.12).

[617] Es bleibt offen, ob $U \sim (U \setminus A)$ auch gilt, wenn U eine hypothetische Unmenge einer anderen Unmengenstufe als $\llbracket\Omega\rrbracket$ ist, ebenso wie offen bleiben muss, ob $U \sim (U \cup A)$ für hypothetische Unmengen *zwischen* $\llbracket\Omega\rrbracket$ und $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ gilt. Nur wenn A eine *Menge* ist, gilt beides wegen Theorem 5.15.12 S. 203 in voller Allgemeinheit.

Sowohl die Spalten wie auch die Zeilen sind in diesem Rechtecksschema mit den Zahlen aus N durchnummeriert, und in dem Rechteck, in dem sich die m-te Zeile mit der n-ten Spalte kreuzt, steht das Paar $\langle m, n\rangle$ aus $N \times N$. Obwohl nun diese Menge anschaulich gesprochen „unendlich mal unendlich“ viele Elemente hat, gilt dennoch:

5.20.12 Lemma *Sei N abzählbar unendlich. Dann ist $N \times N$ mit N gleichmächtig.*

Beweis. Da alle Modelle der Arithmetik mit N gleichmächtig sind (Theorem 5.16.53 S. 228), brauchen wir nur zu zeigen, dass es ein Modell der Arithmetik gibt, dessen Trägerklasse $N \times N$ ist. Anschaulich können wir ein solches Modell der Arithmetik wie folgt beschreiben. Man betrachte in obigem Rechteck die folgenden Diagonalen:

- Die erste (Quasi-)Diagonale bestehe nur aus $\langle 0, 0\rangle$ allein,
- die zweite Diagonale sei die Linie, welche $\langle 1, 0\rangle$ und $\langle 0, 1\rangle$ verbindet,
- die dritte Diagonale sei die Linie, welche $\langle 2, 0\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$ und $\langle 0, 2\rangle$ verbindet,
- die vierte Diagonale sei die Linie, welche $\langle 3, 0\rangle$, $\langle 2, 1\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$ und $\langle 0, 3\rangle$ verbindet, usw.

Jedes Zahlenpaar $\langle m, n\rangle$ liegt auf einer dieser unendlich vielen Diagonalen. Wenn man nun die erste, zweite, dritte usw. Diagonale in der beschriebenen Reihenfolge zusammensetzt, erhält man die Reihe $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 2, 0\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 0, 2\rangle$, $\langle 3, 0\rangle$, $\langle 2, 1\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$ $\langle 0, 3\rangle$, ..., in der offenbar alle Elemente von $N \times N$, die zuvor auf einer „unendlichen Rechtecksfläche“ verteilt waren, in einer einzigen Reihe untergebracht sind. Als die ≪Null≫ des zu konstruierenden Modells kann man nun $\langle 0, 0\rangle$ nehmen, und als ≪Nachfolger≫ eines Zahlenpaares $\langle m, n\rangle$ das in dieser Reihe auf $\langle m, n\rangle$ folgende. Diese anschauliche Überlegung ist natürlich kein strenger Beweis, lässt sich aber in einen solchen umwandeln, was im Anhang S. 440–441 durchgeführt ist. □ Lemma 5.20.12 lässt sich nun zum folgenden Theorem verallgemeinern:

5.20.13 Theorem Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$. *Dann gilt $U \times U \sim U$, und sind U_1 und U_2 mit U gleichmächtig, gilt auch $U_1 \times U_2 \sim U$. Sind insbesondere N_1 und N_2 abzählbar unendliche Mengen, so auch $N_1 \times N_2$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 441–442. □ Wenn nun schon das Kreuzprodukt einer unendlichen Menge U mit einer gleichmächtigen Menge keine mächtigere Menge erzeugt, kann dies auch nicht durch „Kreuzung“ von U mit einer schmächtigeren Menge gelingen:

5.20.14 Korollar Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$, *und sei $A \precsim U$. Dann sind $U \times A$ und $A \times U$ leer* (falls A leer ist) *oder mit U gleichmächtig* (sonst). *Ist insbesondere N abzählbar unendlich und A endlich, so sind $N \times A$ und $A \times N$ höchstens abzählbar unendlich.*

Beweis. Siehe Anhang S. 442. □ So können wir also weder durch Vereinigung noch durch das Kreuzprodukt von *zwei* kleineren Mengen auf eine Unendlichkeitsstufe gelangen, die über der maximalen Stufen der beiden Mengen liegt. Als Nächstes versuchen wir, *mehr als zwei Mengen* zu vereinigen oder zu kreuzen. Das folgende Theorem und sein Korollar zeigen zunächst, dass wir auch durch „große Vereinigungen“ nicht weiterkommen:

5.20.15 Theorem Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$. Sei $\langle i \in D \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Klassenfamilie, wobei D und die Klassen $\theta(i)$ alle $\sim U$ bzw. alle $\precsim U$ sind. *Dann gilt auch $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \sim U$ bzw. $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \precsim U$. Ist insbesondere D und jedes $\theta(i)$ abzählbar bzw. höchstens abzählbar unendlich, gilt das auch für $\bigcup_{i\in D} \theta(i)$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 442–443. □

5.20.16 Korollar Sei U eine unendliche Menge, und sei $\mathfrak{M}$ ebenso wie jedes M aus $\mathfrak{M}$ gleichmächtig mit U bzw. $\precsim U$. *Dann gilt* $\bigcup \mathfrak{M} \sim U$ *bzw.* $\bigcup \mathfrak{M} \precsim U$. *Ist insbesondere* $\mathfrak{M}$ *und jedes Element von* $\mathfrak{M}$ *abzählbar bzw. höchstens abzählbar unendlich, gilt das auch auf* $\bigcup \mathfrak{M}$.

Beweis. Dies folgt aus Theorem 5.20.15, da $\bigcup \mathfrak{M} = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ ist. □ Schließlich führen auch Kreuzprodukte eines unendlichen U mit *endlich* vielen Mengen sowie Potenzen von U mit einer *endlichen* Menge nicht über die Unendlichkeitsstufe von U hinaus:

5.20.17 Theorem Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket \Omega \rrbracket$ oder $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$. *Ist* E *eine nichtleere endliche Menge oder eine von Null verschiedene natürliche Zahl, so ist* $U \sim U^E$, *und ist* E *die leere Menge bzw. die Zahl* 0, *so ist* U^E *das einelementige* $\{\emptyset\}$. *Ist insbesondere* N *abzählbar unendlich und* E *endlich, so ist* N^E *höchstens abzählbar unendlich.*

Beweis. Siehe Anhang S. 443. □

5.20.18 Korollar Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket \Omega \rrbracket$ oder $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$. Sei $\langle i \in D \mapsto \theta(i) \rangle$ eine Klassenfamilie mit endlichem D und $\theta(i) \precsim U$ für alle i aus U. *Dann folgt* $\bigtimes_{i \in D} \theta(i) \precsim U$. *Ebenso folgt* $\bigtimes \mathfrak{M} \precsim U$ *für endliche Mengenklassen* $\mathfrak{M}$ *mit Elementen* $\precsim U$. *Ist insbesondere* D *bzw.* $\mathfrak{M}$ *endlich und jedes* $\theta(i)$ *bzw. jedes Element von* $\mathfrak{M}$ *höchstens abzählbar unendlich, so ist auch* $\bigtimes_{i \in D} \theta(i)$ *bzw.* $\bigtimes \mathfrak{M}$ *höchstens abzählbar unendlich.*

Beweis. Siehe Anhang S. 443–444. □ Alle vorstehenden Ergebnisse lauten zusammengefasst:

- Überabzählbar unendliche Mengen kann man grundsätzlich nicht durch Vereinigung *endlich vieler oder selbst abzählbar unendlich vieler* kleinerer Mengen erhalten.
- Man erhält sie auch nicht als Potenz einer kleineren Menge mit einer natürlichen Zahl oder einer *endlichen* Menge, und auch nicht als Kreuzprodukt *endlich vieler* kleinerer Mengen.

Gehen wir aber zu „noch stärkeren“ Operationen über, so kommen wir endlich zum Durchbruch: Nach dem „Satz von Cantor“ ist *für jede Menge* M *die Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ *stets mächtiger als* M *selbst*.[618] Also ist $\mathcal{P}(M)$ für abzählbar unendliches M überabzählbar unendlich.[619]

5.20.19 Satz von Cantor *Für jede Menge* M *gilt* $M \prec \mathcal{P}(M)$.
Zusatz. *Dies ist äquivalent mit* $M \prec \{0,1\}^M$.

Bemerkung. Dies gilt *nicht* für Unmengen, z. B. gilt nicht $\mathbb{D} \prec \mathcal{P}(\mathbb{D})$, sondern $\mathbb{D} \sim \mathcal{P}(\mathbb{D})$.[620]

---

618 Dieser Satz geht auf Cantors Aufsatz über eine *Frage der Mannigfaltigkeitslehre* (1890) zurück. Cantor spricht dort allerdings nicht von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, sondern zeigt, dass für jede Menge M die Menge der Funktionen von M in $\{0,1\}$ eine höhere Mächtigkeit hat als M selbst: dass also $M \prec \{0,1\}^M$ gilt. Es sind jedoch die Aussagen $M \prec \{0,1\}^M$ und $M \prec \mathcal{P}(M)$ äquivalent: Gilt eine von ihnen, so kann man nämlich in ihr wegen der Gleichmächtigkeit von $\{0,1\}^M$ mit $\mathcal{P}(M)$ (Theorem 5.18.3 S. 249) gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 $\mathcal{P}(M)$ durch $\{0,1\}^M$ bzw. $\{0,1\}^M$ durch $\mathcal{P}(M)$ ersetzen. In der Form $M \prec \mathcal{P}(M)$ tauchte der Satz zuerst 1907 in den *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* von Ernst Zermelo auf (Satz 39 S. 267), wo er als „Satz von Cantor“ bezeichnet wurde.

619 Daraus lässt sich leicht folgern, dass sich unsere negativen Ergebnisse hinsichtlich der Potenzierung und des Kreuzprodukts in Theorem 5.20.17 und Korollar 5.20.18 nicht noch verschärfen lassen: Eine Potenz C^N mit *abzählbar unendlichem* N kann überabzählbar sein, ebenso wie das Kreuzprodukt abzählbar unendlich vieler Mengen. Denn C^N ist ja schon für zweielementiges C nach Theorem 5.18.3 S. 249 immer mit $\mathcal{P}(N)$ gleichmächtig (siehe auch Theorem 5.20.21), und $\bigtimes_{i \in N} C$ ist mit C^N identisch.

620 Es ist daran zu erinnern, dass $\mathcal{P}(U)$ für eine *Unmenge* U nicht die Klasse *aller* Teilklassen, sondern nur diejenige aller Teil*mengen* von U ist. Also sind die Elemente von $\mathcal{P}(\mathbb{D})$ Individuen, d. h. $\mathcal{P}(\mathbb{D})$ ist Teilklasse von $\mathbb{D}$, weshalb (nach Satz 5.89 S. 200) $\mathcal{P}(\mathbb{D}) \precsim \mathbb{D}$ gilt. Umgekehrt gilt wegen Satz 5.90 S. 200, dass $\mathbb{D} \precsim \mathcal{P}(\mathbb{D})$, da die Funktion, die jedes Individuum x auf $\{x\}$ wirft, eine Injektion von $\mathbb{D}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{D})$ ist. Insgesamt folgt daher mit Theorem 5.15.5 S. 201, dass $\mathbb{D} \sim \mathcal{P}(\mathbb{D})$.

Beweis. Der Zusatz wurde in Fußnote 618 bewiesen. Zum Beweis von $M \prec \mathcal{P}(M)$ ist zunächst zu bemerken, dass $\langle m \in M \mapsto \{m\}\rangle$ eine Injektion von M in $\mathcal{P}(M)$ ist, so dass nach Satz 5.90 S. 200 $M \precsim \mathcal{P}(M)$ gilt. Nun ist nur noch zu zeigen, dass $M \sim \mathcal{P}(M)$ falsch ist: dass es also *keine* Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$ gibt. Hierzu zeigen wir für jede Funktion f von M in $\mathfrak{P}(M)$, dass sie *nicht* surjektiv ist. Ein Ausschnitt aus einem Pfeildiagramm von f könnte wie folgt aussehen:

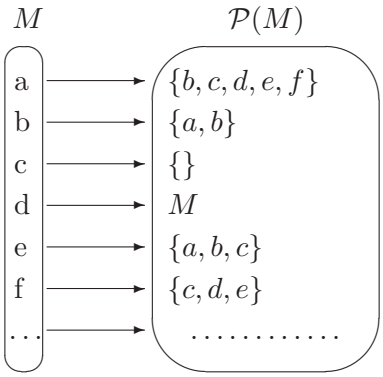


Abbildung 5.29: Eine Funktion f von M in $\mathcal{P}(M)$

Indem wir nun eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die im Pfeildiagramm links *nicht* aufgeführt ist, zeigen wir, dass die Funktion f nicht surjektiv ist:

1. Der Funktionswert $f(a)$ ist in unserem Beispiel $\{b, c, d, e, f\}$, worin a *nicht* enthalten ist. Wir nehmen deshalb a in die zu konstruierende Teilmenge T auf. Diese bekommt also die Gestalt $\{a, \ldots\}$, wodurch sie sich von $\{b, c, d, e, f\}$ $(= f(a))$ unterscheidet.

2. Der Funktionswert $f(b)$ ist $\{a, b\}$, worin b enthalten ist. Wir nehmen deshalb b *nicht* in die zu konstruierende Teilmenge T auf. Diese hat also immer noch die Gestalt $\{a, \ldots\}$, wobei in $\ldots$ kein b vorkommt. So unterscheidet sie sich nun auch von $\{a, b\}$ $(= f(b))$.

3. Der Funktionswert $f(c)$ ist in unserem Beispiel die leere Menge $\emptyset$, in der c *nicht* enthalten ist. Wir nehmen deshalb c in die zu konstruierende Teilmenge T auf. Diese bekommt nun die Gestalt $\{a, c, \ldots\}$, wodurch sie sich nun auch von $\emptyset$ $(= f(c))$ unterscheidet usw.

Wir bestimmen also für alle x aus M: x soll *dann und nur dann* in die Teilmenge T aufgenommen werden, wenn x *nicht* Element von $f(x)$ ist. So erreichen wir, dass sich T von *allen* Funktionswerten $f(x)$ unterscheidet, also im Pfeildiagramm links nicht vorkommt.[621] □

Bevor wir den Cantorschen Satz weiter beleuchten, ist zu Theorem 5.20.17 noch Folgendes nachzutragen. Nach jenem Theorem gilt $U \sim U^A$, wenn U eine unendliche und A eine nichtleere endliche Menge ist. Ist nun A unendlich, so muss dies im Allgemeinen nicht gelten,[622] aber $U \sim U^A$ gilt auch für unendliches A, *wenn U auf der Stufe der Potenzmenge von A liegt*:

[621] Ohne Bezug auf die Anschauung führt man diesen Beweis wie folgt. Sei f eine beliebige Funktion von M in $\mathcal{P}(M)$. Wir definieren $T := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin f(x)\}$. T ist Element von $\mathcal{P}(M)$, aber kein Funktionswert von f. Für jedes x aus M gilt nämlich: Wenn $x \notin f(x)$ ist, so ist die Bedingung für die Mitgliedschaft von x in T (≪$x \in M$ und $x \notin f(x)$≫) erfüllt, also ist dann $x \in T$. Wenn aber $x \in f(x)$ ist, so ist die genannte Bedingung *nicht* erfüllt, also ist dann $x \notin T$. Im *jedem* Fall gibt es also ein Individuum – nämlich x – das in der einen der beiden Mengen $f(x)$ und T enthalten, in der anderen aber nicht enthalten ist, und daher sind diese beiden Mengen verschieden. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass für jedes x aus M gilt $T \neq f(x)$. Also gehört T nicht zu $\mathtt{Wb}(f)$ und f ist daher keine Surjektion von M in $\mathcal{P}(M)$. □

[622] Nach 5.20.21 ist U^A im Fall $A = U$ gleichmächtig mit $\mathcal{P}(U)$, also nach Theorem 5.20.19 *mächtiger* als U.

5.20.20 Theorem *Ist A unendliche Menge und U mit $\mathcal{P}(A)$ gleichmächtig, so gilt $U \sim U^A$. Insbesondere ist $\mathcal{P}(A)$ selbst ein solches U, also gilt für unendliches A stets $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A)^A$.*

Beweis.[623] Es gilt $U \sim \mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A \sim \{0,1\}^{A\times A} \sim (\{0,1\}^A)^A \sim \mathcal{P}(A)^A \sim U^A$. □ Für unendliches U liegt nun gemäß dem CANTORschen Satz die Potenz $\{0,1\}^U$ einer zweielementigen Menge $\{0,1\}$ mit U auf einer höheren Unendlichkeitsstufe als U. Erst recht wird also C^U für eine *mehr als zweielementige Klasse* C auf einer höheren Stufe liegen. Dies bestätigt das folgende Theorem, welches zugleich zeigt, dass C^U, solange C nicht mächtiger als $\mathcal{P}(U)$ ist, auf keiner anderen Stufe als $\mathcal{P}(U)$ liegt. Insbesondere kann man durch die Bildung von Potenzen C^U mit höchstens abzählbar unendlicher Mengen C und U *keine größeren* überabzählbaren Mengen erzeugen, als es bereits mit der Potenzmengenbildung $\mathcal{P}(U)$ möglich ist.

5.20.21 Theorem U sei eine unendliche Menge und C habe mindestens zwei Elemente. *Dann ist $U \prec C^U$, und wenn außerdem $C \precsim \mathcal{P}(U)$ ist, so gilt $C^U \sim \mathcal{P}(U)$.*
Da U selbst ein solches C ist,[624] *gilt insbesondere $U^U \sim \mathcal{P}(U)$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 444. □ Eine unmittelbare Konsequenz aus dem Satz von CANTOR ist, dass es über jeder Mengenstufe $\llbracket M \rrbracket$ eine größere gibt: Aus $M \prec \mathcal{P}(M)$ folgt ja mit Blick auf Satz 5.108 S. 204 sofort $\llbracket M \rrbracket <_{Fr} \llbracket \mathcal{P}(M) \rrbracket$. Wir müssen uns daher in unserem Bild vom Klassenuniversum (siehe Abbildung 5.28 S. 246) den Raum zwischen $\llbracket \omega \rrbracket$ und $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$ mit einer endlosen Reihe weiterer Mengenstufen angefüllt denken und können festhalten:

5.20.22 Korollar *Über jeder Mengenstufe liegt stets noch eine weitere, d. h. die Ordnungsrelation $<_{Fr}$ hat im Bereich der Mengenstufen kein maximales Element.*

Aufgrund von Theorem 5.15.17 S. 205 wissen wir, dass *wenn* eine Mengenstufe einen Nachfolger hat, sie auch einen *unmittelbaren* Nachfolger besitzt. Somit können wir Theorem 5.15.17 jetzt ohne weiteres wie folgt verschärfen:

5.20.23 Korollar *Jede Mengenstufe besitzt eine „nächst höhere" Klassenstufe, d. h. einen* unmittelbaren *Nachfolger, und dieser ist ebenfalls eine Mengenstufe.*

Bemerkung. Demgegenüber muss eine Mengenstufe, auch wenn sie einen Vorgänger hat, keineswegs einen *unmittelbaren* Vorgänger besitzen, wie das Beispiel $\llbracket \omega \rrbracket$ zeigt.[625]

Die erste überabzählbare Mengenstufe, die uns der Satz von CANTOR erschließt, ist die Mengenstufe, auf der $\mathcal{P}(\omega)$ liegt. Die Mengen dieser Stufe nennt man *kontinuierlich unendlich*:[626]

5.20.24 Theorem und Definition *Es gilt $\llbracket \omega \rrbracket <_{Fr} \llbracket \mathcal{P}(\omega) \rrbracket$*, und die auf der Mengenstufe $\llbracket \mathcal{P}(\omega) \rrbracket$ liegenden Klassen heißen *kontinuierlich* unendlich oder *Kontinua. Zu diesen gehören alle Potenzmengen $\mathcal{P}(N)$ für abzählbar unendliche Mengen N, und außerdem mindestens eine Ordinalzahl.* Die

---

623 Die folgende Gleichmächtigkeitskette lässt sich im Einzelnen so zu begründen. $U \sim \mathcal{P}(A)$ gilt nach Voraussetzung; $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$ wegen Theorem 5.18.3 S. 249; $\{0,1\}^A \sim \{0,1\}^{A\times A}$ wegen Satz 5.172 und weil $\{0,1\} \sim \{0,1\}$ und nach Theorem 5.20.13 $A \sim A \times A$ gilt; $\{0,1\}^{A\times A} \sim (\{0,1\}^A)^A$ wegen Theorem 5.12.8 S. 166; $(\{0,1\}^A)^A \sim \mathcal{P}(A)^A$ wegen Satz 5.172 und weil $A \sim A$ und nach Theorem 5.18.3 $\{0,1\}^A \sim \mathcal{P}(A)$ ist, und schließlich $\mathcal{P}(A)^A \sim U^A$ wieder wegen Satz 5.172 und weil $A \sim A$ und nach Voraussetzung $\mathcal{P}(A) \sim U$ ist.

624 U hat als unendliche Menge mehr als zwei Elemente und es gilt $U \precsim \mathcal{P}(U)$.

625 Die Klassenstufen $\mathfrak{S}$ unterhalb von $\llbracket \omega \rrbracket$ sind nach Satz 5.149 S. 246 Endlichkeitsstufen, so dass die darauf liegenden Klassen nach Satz 5.156 S. 248 gleichmächtig mit einer NEUMANNschen Zahl n sind; $\mathfrak{S}$ ist dann also die Stufe $\llbracket n \rrbracket$. Aber nach Satz 5.160 S. 248 gilt für jede NEUMANNsche Zahl p, die größer als n ist, dass $\llbracket n \rrbracket < \llbracket p \rrbracket < \llbracket \omega \rrbracket$, und so kann $\llbracket n \rrbracket$ nicht unmittelbarer Vorgänger der Stufe $\llbracket \omega \rrbracket$ sein.

626 Grund für diese Bezeichnung ist, dass (wie wir in Abschnitt 5.21 sehen werden) auf dieser Stufe die Menge aller Punkte einer Strecke, einer Gerade, einer Ebene und auch des ganzen Raumes liegt.

kleinste kontinuierlich unendliche Ordinalzahl wird mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet und gilt als Hauptrepräsentant dieser Unendlichkeitsstufe, weshalb wir für $\llbracket \mathcal{P}(\omega) \rrbracket$ standardmäßig $\llbracket \mathfrak{c} \rrbracket$ schreiben. Wir fassen schließlich alle Kontinua mit allen auf tieferen Stufen gelegenen Klassen zu den *höchstens kontinuierlich unendlichen* Klassen zusammen.[627]

Beweis. Gemäß Satz 5.108 S. 204 folgt wegen $\omega \prec \mathcal{P}(\omega)$, dass $\llbracket \omega \rrbracket <_{Fr} \llbracket \mathcal{P}(\omega) \rrbracket$. Gemäß Satz 5.173 S. 258 folgt wegen $N \sim \omega$, dass $\mathcal{P}(N) \sim \mathcal{P}(\omega)$, also liegen $\mathcal{P}(N)$ und $\mathcal{P}(\omega)$ auf derselben Stufe. Nach Korollar 5.14.17 S. 197 liegt auf $\llbracket \mathcal{P}(\omega) \rrbracket$ mindestens eine Ordinalzahl, und so gibt es eine kleinste solche Ordinalzahl, die wir $\mathfrak{c}$ nennen. □ Will man von der Stufe $\llbracket \mathfrak{c} \rrbracket$ aus durch Operationen Mengen höherer Stufen erreichen, so stößt man auf ähnliche Schwierigkeiten wie beim Übergang von abzählbar unendlichen zu kontinuierlich unendlichen:

5.20.25 Theorem Sei R kontinuierlich unendlich und N abzählbar unendlich. Dann gilt:

R ist mit $R \times R$ und auch mit $N \times R$ und $R \times N$ gleichmächtig. (5.178)

R ist auch mit R^n für jede von 0 verschiedene Zahl n gleichmächtig. (5.179)

R ist auch mit R^N gleichmächtig. (5.180)

Mächtiger als R sind aber $\mathcal{P}(R)$ und R^R, wobei $\mathcal{P}(R) \sim R^R$ gilt. (5.181)

Beweis. (5.178) folgt aus 5.20.13 und 5.20.14.[628] (5.179) folgt aus Theorem 5.20.17.
(5.180) folgt aus Theorem 5.20.20.[629] (5.181) folgt aus dem Satz von Cantor und 5.20.21.[630] □

Der Satz von Cantor hat eine **für Philosophie und Theologie bedeutsame Konsequenz**. Dass es keine größte Menge gibt, bedeutet ja, wenn wir die realistische Interpretation der Mengen als Denkformen zugrunde legen, dass es zu jedem widerspruchsfreien Erkenntnisakt A der uns bekannten Art stets einen ebensolchen Erkenntnisakt A' gibt, dessen Inhalt noch umfassender ist als der von A. *Unsere Erkenntnis ist daher so geartet, dass sie grundsätzlich stets erweiterungsfähig ist.* Das aber heißt zweierlei: Zum einen werden wir nie das Stadium der Allwissenheit erreichen, zum anderen werden wir aber auch nie auf eine Grenze stoßen, die uns grundsätzlich am weiteren Erkenntniszuwachs hindert. Beides zusammengenommen kann man klassisch so ausdrücken: *Menschliches Erkennen ist potentiell unbegrenzt.*[631] Dieses Faktum der metaphysischen Psychologie ist nicht nur philosophisch interessant, sondern bestätigt auch die theologische Einstufung des Menschen, wonach dieser in der Mitte zwischen dem in festen Grenzen eingeschlossenen Teil der Schöpfung und dem absolut unendlichen Gott steht, indem er zwar von Natur aus stets begrenzt ist, aber dennoch auf eine immer tiefere Erkenntnis des grenzenlosen Gottes hin angelegt ist.

---

627 Formal: $\mathfrak{c} :\equiv \min_{<_{\mathtt{On}}} \{\alpha \mid \alpha \in \mathtt{On} \wedge \alpha \sim \mathcal{P}(\omega)\}$.
C (ist) kontinuierlich unendlich $:\Leftrightarrow \mathcal{P}(\omega) \sim C$ (d. h. $C \in \llbracket \mathcal{P}(\omega) \rrbracket = \llbracket \mathfrak{c} \rrbracket$).
C (ist) höchstens kontinuierlich unendlich $:\Leftrightarrow C \precsim \mathcal{P}(\omega)$ (d. h. $\llbracket C \rrbracket \leq_{Fr} \llbracket \mathcal{P}(\omega) \rrbracket = \llbracket \mathfrak{c} \rrbracket$).

628 Nach Theorem 5.20.13 ist R mit $R \times R$ gleichmächtig. Außerdem gilt nach dem Satz von Cantor $\omega \prec \mathcal{P}(\omega)$, und in dieser Aussage darf man gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 das ω durch das gleichmächtige N und das $\mathcal{P}(\omega)$ durch das gleichmächtige R ersetzen. So gilt also $N \prec R$, und nach Korollar 5.20.14 folgt die Gleichmächtigkeit von $N \times R$ und $R \times N$ mit R.

629 Da N mit ω gleichmächtig ist, ist $\mathcal{P}(N)$ nach (5.173) mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig, was wieder mit R gleichmächtig ist. So gilt $R \sim \mathcal{P}(N)$, und nach Theorem 5.20.20 folgt $R \sim R^N$.

630 Nach dem Satz von Cantor gilt $R \prec \mathcal{P}(R)$, nach Theorem 5.20.21 gilt $\mathcal{P}(R) \sim R^R$, und so kann man gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 in $R \prec \mathcal{P}(R)$ das $\mathcal{P}(R)$ durch R^R ersetzen und erhält $R \prec R^R$.

631 Analog zum „potentiell Unendlichen“ (siehe S. 15–16) ist das „potentiell Unbegrenzte“ zu definieren als etwas, dessen Größe *stets vermehrt* werden kann, das aber dennoch immer *begrenzt* bleibt. Damit ist also gesagt, dass es niemals die höchste, nicht mehr übersteigbare Stufe des Unendlichen (das *absolut Unendliche*) erreichen kann, es ist aber nicht ausgeschlossen, dass es untere Stufen des Unendlichen erreicht.

5.21 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und die euklidische Geometrie

Ganzzahlklassen, Rationalzahlklassen und Zahlengeraden

In Abschnitt 2.3 hatten wir außer den «natürlichen Zahlen» auch die «ganzen», die «rationalen» und die «reellen Zahlen» als Punkte auf der Standard-Zahlengeraden eingeführt und die Klassen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ der natürlichen bzw. ganzen bzw. rationalen bzw. reellen Zahlen als unendlich bezeichnet. In diesem und im folgenden Abschnitt soll geklärt werden, in welchem Sinn dies richtig ist und auf welcher Stufe der Unendlichkeit diese Klassen liegen.

Man kann die ganzen, rationalen und reellen Zahlen ohne jeden geometrischen Bezug axiomatisch einführen,[632] und erhält dann verschiedene den jeweiligen Axiomen entsprechende «Modelle» dieser Zahlen: strukturierte Klassen, deren Trägerklasse mit einer Ordnungsrelation $<$ und zwei Operationen $+$ und $\cdot$ ausgestattet ist, und die durch Erweiterung von Modellen der Arithmetik konstruiert werden. Es zeigt sich, dass alle Modelle der ganzen Zahlen wie auch jene der rationalen und der reellen Zahlen unter sich jeweils in einem bestimmten Sinn gleichwertig («isomorph») sind, wobei insbesondere *ihre Trägerklassen gleichmächtig sind*. Da wir uns nur für die Größe der Klassen interessieren, genügt es daher, *irgendeine* Trägerklasse eines Modells der ganzen, rationalen und reellen Zahlen herauszugreifen: Was wir über *deren* Größe ermitteln, gilt dann auch für die Trägerklassen *aller anderen* Modelle. Wir wählen die anschaulichen geometrischen «Modelle», die bereits in Abschnitt 2.3 betrachtet wurden. Da wir die Zahlenoperationen für $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ nicht benötigen, können wir uns hier den gewöhnlichen axiomatischen Zugang zu diesen Klassen ersparen. Dennoch möchte ich die Klassen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ *präziser* und auch *abstrakter* beschreiben, als es in Abschnitt 2.3 geschehen ist, wodurch – was die Größenbetrachtungen angeht – eine vollkommen exakte Darstellung dieser Klassen möglich ist. Wir benötigen zunächst folgendes Lemma:

5.21.1 Lemma *Ist N abzählbar unendlich, so gibt es disjunkte abzählbar unendliche Mengen N_1 und N_2 derart dass $N = N_1 \cup N_2$.*

Beweis. N ist Träger eines Modells der Arithmetik, wir können also als N_1 die Menge der geraden und als N_2 die Menge der ungeraden Zahlen von N nehmen. Diese sind abzählbar unendlich (da es selbst Trägerklassen von Modellen der Arithmetik sind), disjunkt und vereinigen sich zu N.[633] □

Kommen wir nun zur Klasse $\mathbb{Z}$. Deren Konstruktion aus Abschnitt 2.3 können wir jetzt mit Hilfe des Begriffs eines Zahlenstrahlmodells der Arithmetik (Beispiel 5.16.59 S. 230) wie folgt wiedergeben. Auf einer Geraden g betrachten wir ein Zahlenstrahlmodell der Arithmetik, dessen Trägermenge wir mit $\mathbb{N}$ bezeichnen und dessen von Null verschiedene Zahlen $1, 2, 3 \ldots$ rechts vom Nullpunkt 0 liegen. Sei -1 der Punkt links von 0, der gleich weit von 0 entfernt ist wie 1. Dann nennen wir die Trägerklasse des von 0 und -1 induzierten Zahlenstrahlmodells der Arithmetik $\mathbb{N}^-$, und die von 0 verschiedenen Zahlen dieses Modells $-1, -2, -3, \ldots$ Die in Abschnitt 2.3 eingeführte Klasse $\mathbb{Z}$ ist dann die Klasse mit den Elementen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, also die Vereinigung $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-$ der abzählbar unendlichen Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^-$, welche nur die Zahl 0 gemeinsam haben. Indem wir nun von der speziellen Natur von $\mathbb{N}^+$ und $\mathbb{N}^-$ abstrahieren, gelangen wir zu folgender Definition:

5.21.2 Definition Eine Klasse Z heißt eine *Ganzzahlklasse* und ihre Elemente heißen *ganze Zahlen*, wenn es abzählbar unendliche Klassen N und N^- gibt, die nur ein Element gemeinsam haben, so dass Z die Vereinigung $N \cup N^-$ ist.[634]

---

632 Dies ist z. B. bei Landau, *Grundlagen der Analysis* und Oberschelp, *Zahlensystem* durchgeführt.

633 Vgl. Theoreme 5.16.56 und 5.16.57 S. 230.

634 Formal: Z (ist) Ganzzahlklasse $:\Leftrightarrow \bigvee_{NN^-} \big(N \sim \omega \ \wedge\ N^- \sim \omega \ \wedge\ (N \cap N^-) \sim 1 \ \wedge\ Z = N \cup N^-\big)$.

Unter „der“ Ganzzahlklasse $\mathbb{Z}$ verstehen wir eine fest ausgewählte Ganzzahlklasse.[635] Es folgt nun:

5.21.3 Theorem *Jede Ganzzahlklasse Z ist eine abzählbar unendliche Menge, und jede abzählbar unendliche Menge ist eine Ganzzahlklasse.*

Beweis. Jede Ganzzahlklasse Z ist nach Theorem 5.20.9 als Vereinigung zweier abzählbar unendlicher Klassen N und N^- ebenfalls abzählbar unendlich. Sei umgekehrt A abzählbar unendlich. Nach Lemma 5.21.1 ist dann A die Vereinigung zweier abzählbar unendlicher Mengen N_1 und N_2 ohne gemeinsames Element. Ist 0 irgendein Element von N_1 so ist nach 5.20.8 auch $N_2 \cup \{0\}$ abzählbar unendlich. Setzen wir nun $N := N_1$ und $N^- := N_2 \cup \{0\}$, so haben N und N^- nur das Element 0 gemeinsam und es gilt $A = N \cup N^-$. Folglich ist A eine Ganzzahlklasse. □

Um die Klasse $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden einzuführen, hatten wir in Abschnitt 2.3 für jede von 0 verschiedene natürliche Zahl n je eine Klasse von «n-tel Zahlen» eingeführt, die wir mit $\ldots, \frac{-2}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ bezeichneten und die eine Ganzzahlklasse $\mathbb{Z}_n$ bilden. $\mathbb{Q}$ war dann die Vereinigung aller n-tel Zahlen (für jedes n). Das können wir jetzt so ausdrücken: $\mathbb{Q}$ war die Vereinigung der unendlich vielen Ganzzahlklassen $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots$ Dabei war $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ hatte unendlich viele Elemente, die keine ganzen Zahlen waren, d. h. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ war eine unendliche Klasse. Abstrahieren wir nun von der speziellen Natur der n-tel Zahlen, gelangen wir zu folgender Definition:

5.21.4 Definition Eine Klasse Q heißt eine *Rationalzahlklasse* und ihre Elemente heißen *rationale Zahlen*, wenn es für jede natürliche Zahl n (> 0) eine Ganzzahlklasse (d. h. abzählbar unendliche Menge) Z_n gibt – d. h. wenn es eine Familie von Ganzzahlklassen $\langle n \in \omega \setminus \{0\} \mapsto Z_n \rangle$ gibt – derart dass Q die Vereinigung $\bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} Z_n$ aller dieser Ganzzahlklassen ist und $Q \setminus Z_1$ unendlich ist.[636] Unter „der“ Rationalzahlklasse $\mathbb{Q}$ wollen wir eine fest ausgewählte Rationalzahlklasse verstehen.[637]

Bemerkung. Die Familie der Ganzzahlklassen muss nicht disjunkt sein. Denn für die Klasse $\mathbb{Q}$ aus Abschnitt 2.3 (Erklärung 2.3.6 S. 22) war beispielsweise $\frac{2}{1}$ dasselbe wie $\frac{4}{2}$, es gab also ein gemeinsames Element von $\mathbb{Z}_1$ und $\mathbb{Z}_2$. Wir wollen aber andererseits auch nicht ausdrücklich fordern, dass die Klassen Z_n gemeinsame Elemente haben. Derartige Zusatzforderungen sind für uns überflüssig, weil *alle* gemäß Definition 5.21.4 gebildeten Rationalzahlklassen gleichmächtig sind, *unabhängig* davon, ob die verwendeten Familie von Ganzzahlklassen disjunkt ist oder nicht:

5.21.5 Theorem *Jede Rationalzahlklasse Q ist eine abzählbar unendliche Menge, und jede abzählbar unendliche Menge ist eine Rationalzahlklasse.*

Beweis. Sei Q eine Rationalzahlklasse, also eine Vereinigung $\bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} Z_n$ abzählbar vieler abzählbar unendlicher Mengen Z_n. Nach Theorem 5.20.15 ist eine solche Vereinigung ebenfalls abzählbar unendlich. Sei umgekehrt A abzählbar unendlich, so gibt es nach Lemma 5.21.1 zwei abzählbar unendliche Mengen S und T, die kein gemeinsames Element haben und deren Vereinigung A ist. Sei nun Z die Familie mit Definitionsbereich $\omega \setminus \{0\}$, für die Z_1 die Klasse S und Z_n für alle $n \in \omega \setminus \{0\}$ mit $n \neq 1$ die Klasse T ist. Dann ist $A = \bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} Z_n$ und $A \setminus Z_1$ ist die unendliche Klasse T. Also ist A eine Rationalzahlklasse. □ Die letzten beiden Theoreme bedeuten, dass Rationalzahlklassen, Ganzzahlklassen und abzählbar unendliche Mengen ein und dasselbe sind: Man kann jede abzählbar unendliche Menge als Modell der Arithmetik, Ganzzahlklasse oder Rationalzahlklasse betrachten.

---

635 Etwa die in Abschnitt 2.3 beschriebene (siehe auch Definition 5.21.27 S. 276).

636 Formal: Q (ist) Rationalzahlklasse $:\Leftrightarrow$
$\bigvee_Z \Big(Z \text{ ist } \omega \setminus \{0\}\text{-Tupel} \wedge \bigwedge_{n \in \omega \setminus \{0\}} Z_n \sim \omega \wedge Q = \bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} Z_n \wedge Q \setminus Z_1 \text{ unendlich} \Big)$.

637 Etwa die in Abschnitt 2.3 beschriebene (siehe auch Definition 5.21.25 S. 275).

Schließlich hatten wir $\mathbb{R}$ als die Klasse *aller* Punkte einer Zahlengeraden angesehen. Wir abstrahieren auch hier von der speziellen Struktur einer Geraden und definieren:

5.21.6 Vorläufige Definition der Zahlengeraden Eine Klasse R heißt *eine Zahlengerade* und ihre Elemente heißen *reelle Zahlen*, wenn R mit der Klasse der Punkte einer Geraden gleichmächtig ist. Unter „der" Klasse $\mathbb{R}$ verstehen wir eine fest ausgewählte Zahlengerade.

Bemerkung. Die „endgültige Definition" wird erst später aufgestellt (5.21.24 S. 275). Das Problem mit der vorliegenden Definition ist, dass in unserer „offiziellen", aus der Ursprache entwickelten Sprache[638] der Begriff ≪Gerade≫ bislang nicht definiert wurde. Am natürlichsten erschiene es, ≪ist eine Gerade≫ als neuen nichtlogischen Funktor der Ursprache zuzulassen, der unmittelbar die anschaulich gegebene geometrische Bedeutung hat. Aber dies würde unsere Sprache für die logische Modelltheorie komplizierter machen. Ich möchte darum im folgenden Abschnitt 5.21 zeigen, wie man die geometrischen Grundkonstanten im Rahmen unserer Mengenlehre axiomatisch einführen kann, *ohne* die Ursprache zu erweitern.[639] Es lässt sich dann das folgende Theorem beweisen, dessen Bedeutung man kaum überschätzen kann:

Jede reelle Zahlengerade R ist gleichmächtig mit $\mathcal{P}(\omega)$, insbesondere gilt $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$.

Das bedeutet also, dass Zahlengeraden überabzählbar, und zwar ≪kontinuierlich unendlich≫ im Sinne von Definition 5.20.24 sind, so dass es sich auch mengentheoretisch um ≪Kontinua≫ handelt. Außerdem zeigt sich hier eine fundamentale Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden ($\mathbb{R}$) und den natürlichen Zahlen (ω), *die vordergründig eigentlich gar nichts miteinander zu tun haben*. Das Theorem ist so gesehen die Schnittstelle zwischen den beiden klassischen mathematischen Disziplinen Arithmetik und Geometrie.

Darf man davon ausgehen, dass die Klasse $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit $\mathcal{P}(\omega)$ und daher mit $\{0,1\}^\omega$ gleichmächtig ist, so kann man jede reelle Zahl durch eine „Ziffernfolge" mit Nullen und Einsen eindeutig charakterisieren, in der abzählbar unendlich viele Ziffern aufeinander folgen. Solche Ziffernfolgen entsprechen nämlich den Funktionen von ω in $\{0,1\}$, d. h. den Elementen von $\{0,1\}^\omega$. Statt Ziffernfolgen mit nur zwei Ziffern können wir hier ebenso gut auch solche mit zehn Ziffern betrachten, da $\mathcal{P}(\omega)$ nach Theorem 5.20.21 auch mit Z^ω für eine Menge Z mit zehn Ziffern gleichmächtig ist. Man könnte diesen Grundgedanken benutzen, um auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ eine Dezimalbruchdarstellung einzuführen, mit deren Hilfe man sodann eine Ordnungsrelation sowie eine Additions– und Multiplikationsoperation definieren könnte, derart dass die bekannten Rechenregeln für reelle Zahlen gelten. Dies alles fußt also letztlich auf dem Theorem $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$, und so ist es erstaunlich, dass man gewöhnlich nur wenig Mühe aufwendet, um dieses wichtige Theorem zu beweisen.

In den modernen Lehrbüchern der Analysis wird die Klasse $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen üblicherweise abstrakt mit den (nicht-geometrischen) Axiomen über Zahlenoperationen eingeführt, wobei in den beigegebenen Illustrationen diese Klasse ohne Begründung durch eine Gerade veranschaulicht wird. Auch in den Lehrbüchern der Geometrie wird meist einfach postuliert, dass es eine Bijektion von den Punkten einer Gerade auf die (arithmetisch eingeführte und daher von vornherein mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtige) Menge $\mathbb{R}$ gibt.[640] Auf diese Weise entsteht häufig der falsche Eindruck, als sei die

638 Siehe S. 114.

639 Hierzu werde ich gewisse charakteristische Eigenschaften der anschaulich gegebenen Geraden durch Axiome formulieren, und als Geraden „irgendwelche" Objekte ansehen, welche die genannten Eigenschaften besitzen (siehe Definition 5.21.15 S. 273). Dabei darf man in unserem *realistischen* Modell der Mengenlehre natürlich davon ausgehen, dass auch die „echten" Geraden von „echten" Anschauungsräumen unter den Fallbeispielen für die Axiome enthalten sind, auch wenn man diese „echten" geometrischen Gebilde *als solche* in der mengentheoretischen Sprache nicht eigens ansprechen kann.

640 Vgl. Jacobs, *Geometry* Postulate 5 S. 57: „The points of a line can be numbered, so that (a) to every point there corresponds exactly one real number called its coordinate, (b) to every real number there corresponds exactly one point ...".

Korrespondenz von reellen Zahlen und Punkten etwas Selbstverständliches. Für die realistische Fundierung der Mathematik ist es dagegen von allergrößter Wichtigkeit, den Satz $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$ zu beweisen, wobei $\mathbb{R}$ aber nicht ein algebraisches Konstrukt ist, sondern die Klasse der Punkte einer Geraden (oder eine hierzu gleichmächtige Klasse), für welche man nicht von vornherein die Existenz einer Dual– oder Dezimalbruchdarstellung voraussetzen darf. Was wir über $\mathbb{R}$ voraussetzen, sind nur *geometrische* Axiome, die anschaulich plausibel sind. Ein solches Axiomensystem hat erstmals EUKLID angegeben, das allerdings lückenhaft war; 1899 hat HILBERT in seinen *Grundlagen der Geometrie* die Lücken dieses Systems geschlossen und es zugleich in die moderne mathematische Sprache übersetzt. Im Folgenden möchte ich einige dem HILBERTschen System nahestehenden Axiome in der Sprache der hier entwickelten Mengenlehre formulieren, deren Wahrheit (sofern nötig) anschaulich begründen, und zeigen, wie allein aus ihnen (und den schon besprochenen Axiomen der Mengenlehre) der Satz $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$ abgeleitet werden kann.

Euklidische Geometrie und die Menge $\mathbb{R}$

HILBERT beginnt seine Einführung in die Geometrie mit der Feststellung, dass „drei Systeme von Dingen“ gegeben sind, wobei „die Dinge des ersten Systems“ *Punkte*, diejenigen des zweiten *Geraden*, und diejenigen des dritten *Ebenen* heißen,[641] und für diese „Dinge“ gewisse Axiome gelten. In modernerer Fassung können wir dieses „Rahmenpostulat“ durch folgendes ersetzen: Gegeben ist eine Klasse $\mathcal{R}$, die der euklidische *Raum* heißt, gewisse Teilklassen von $\mathcal{R}$, die *Ebenen* heißen, und gewisse Teilklassen von $\mathcal{R}$, die *Geraden* heißen. Obgleich der Raum ebenso wie eine Ebene und eine Gerade im anschaulichen Sinn nicht bloß eine Punktklasse ist,[642] sind hier abstrakte Punktklassen gemeint, für welche die Klasse der Punkte in einem Anschauungsraum, auf einer anschaulichen Ebenen oder einer anschaulichen Geraden Konkretisierungen darstellen sollen. «$\mathcal{R}$», «ist Gerade» und «ist Ebene» sind Grundkonstanten: $\mathcal{R}$ ist ein Name für eine Klasse, und die beiden anderen Konstanten sind einstellige Formelfunktoren.[643] Eine Konstante «ist Punkt» ist unnötig; wir setzen Punkte einfach mit Individuen gleich (P ist Punkt $:\Leftrightarrow$ P ist Individuum), so dass die Punkte im Raum, auf einer Geraden g oder auf einer Ebenen E einfach die Elemente von $\mathcal{R}$ bzw. g bzw. E sind.

Da es hier nicht mein Ziel ist, die ganze Geometrie zu begründen, sondern nur die Mächtigkeit der Geraden, Ebenen und des Raumes zu bestimmen, erörtere ich nur die hierzu nötigen Axiome (so lasse ich die Kongruenzaxiome für Winkel aus). Des Weiteren formuliere ich die benötigten Axiome im Gegensatz zu HILBERT mit den Hilfsmitteln der Mengenlehre (was sie einfacher macht) und nehme noch einige Sätze als Axiome hinzu, die man aus den HILBERTschen Axiomen erst (zum Teil mit erheblichem Aufwand) ableiten müsste, die aber im Anschauungsraum ebenso evident sind wie die HILBERTschen Axiome. Denn mein Ziel ist es nicht, von *möglichst wenigen*, sondern von *möglichst einleuchtenden* Axiomen auszugehen, die eine klare Tatsache beschreiben, sobald man unter dem «Raum» $\mathcal{R}$ die Klasse aller Punkte eines Anschauungsraumes versteht und unter einer «Geraden» bzw. «Ebenen» die Klasse der auf einer Geraden bzw. Ebenen dieses Anschauungsraums liegenden Punkte. Für diese Interpretation gebe ich nach Angabe der Axiome auch jeweils Plausibilitätsbetrachtungen an. Zunächst führe ich die folgenden üblichen Redeweisen ein:

5.21.7 Definition Für Punkte P, Geraden g, Ebenen E und beliebige Punktklassen A und B

641 HILBERT, *Geometrie* S. 2.

642 Siehe Fußnote 20 auf S. 40.

643 Wir könnten statt dieser beiden Funktoren jeweils einen Namen nehmen, welcher die Klasse aller Geraden bzw. aller Ebenen bezeichnet, *wenn* wir bereits jetzt davon ausgehen könnten, dass alle Geraden bzw. Ebenen tatsächlich Elemente einer Klasse sein können, d. h. dass die einer Gerade bzw. Ebenen entsprechende Punktmenge niemals eine Unmenge ist. Doch momentan wissen wir noch nicht, wie groß diese Punktmengen sind. Erst am Ende des Abschnitts wird sich ergeben, dass alle Geraden und Ebenen kontinuierlich unendlich (und somit Mengen) sind.

bedient man sich in der Geometrie folgender Redeweisen:

- «A und B schneiden sich» $:\Leftrightarrow\ A \cap B \neq \emptyset$.
- «A und B scheiden sich in P» oder «P ist Schnittpunkt von A und B» $:\Leftrightarrow\ P \in A \cap B$.
- «P liegt auf A» oder «A geht durch P» $:\Leftrightarrow\ P \in A$.
- «g liegt auf E» $:\Leftrightarrow\ g \subseteq E$.

Ich formuliere nun zunächst nur Axiome für Geraden, die *keinen Bezug auf den Raum oder andere Geraden und Ebenen nehmen*, so dass die Konstanten $\mathcal{R}$, «ist Gerade» und «ist Ebene» darin nicht auftauchen, abgesehen von der generellen Voraussetzung «für jede Gerade g gilt», die allen diesen Axiomen vorangestellt werden muss.[644] Das erste Axiom ist das folgende:

5.21.8 Inzidenzaxiom[645] der Geraden Für jede Gerade g gilt:

(I1) *Auf g liegen mindestens zwei Punkte.*

Plausibilitätsbetrachtung. Das ist vollkommen klar. □ Natürlich gibt es mehr als nur zwei Punkte auf einer Geraden, aber dies können wir erst aus den übrigen Axiomen ableiten. Während das Inzidenzaxiom (I1) im Anschauungsraum „auf den ersten Blick“ einleuchtet, erfordert das nun zu besprechende *Vollständigkeitsaxiom* einige Überlegung, um Plausibilität zu erlangen. In dieser Hinsicht ist es noch problematischer als das später zu besprechende *Parallelenaxiom*.[646] Das Vollständigkeitsaxiom knüpft an den auf S. 180–181 erörterten Begriff des Supremums einer nach oben beschränkten Klasse bzgl. einer Vollordnung $<$ an. Ist $<$ eine Relation in G, die irreflexiv, transitiv und linear ist, also $\langle G, < \rangle$ eine vollgeordnete Klasse, so kann zusätzlich noch die in der folgenden Definition beschriebene „Vollständigkeitsbedingung“ erfüllt sein, und man spricht gegebenenfalls von einer „vollständig geordneten Klasse“:

5.21.9 Theorem und Definition Eine vollgeordnete Klasse $\mathcal{A} := \langle A, R \rangle$ heißt *vollständig* bzw. *vollständig geordnete Klasse*, wenn jede nichtleere *nach oben beschränkte* Teilklasse von A eine *kleinste obere Schranke* (ein Supremum) besitzt.[647] Wenn dies gilt, so besitzt auch jede nichtleere *nach unten beschränkte* Teilklasse von A eine *größte untere Schranke* (ein Infimum).

Beweis. Siehe Anhang S. 444. □ Das Vollständigkeitsaxiom lautet nun:[648]

5.21.10 Vollständigkeitsaxiom der Geometrie und Definition Für jede Gerade g gilt:

(V) *Es gibt eine Relation $<$, so dass $\langle g < \rangle$ eine vollständig geordnete Klasse ist; insbesondere hat jede nach oben bzw. unten beschränkte Teilklasse von g ein Supremum bzw. Infimum.*

---

644 Aufgrund dessen beschreiben diese Axiome die „absoluten Geometrie der Geraden g“, wobei wir unter g eine beliebige Klasse verstehen, welche diese Axiome erfüllt.

645 Inzidenzaxiome machen Aussagen über die Existenz von Punkten, Geraden und Ebenen sowie das Verhältnis von Geraden und Ebenen zueinander. Hilbert gibt acht Inzidenzaxiome an, die er „Axiome der Verknüpfung“ nennt (vgl. Hilbert, *Geometrie* S. 3–4).

646 Zu diesem siehe S. 278–279.

647 Formal: $\mathcal{A}$ (ist) vollständig geordnete Klasse $:\Leftrightarrow$
$\bigvee_{AR} \Big(\langle A, R \rangle \text{ Vollordnung} \wedge \bigwedge_{T} \Big((\emptyset \neq T \subseteq A) \wedge T \text{ nach oben } R\text{-beschränkt} \rightarrow (\inf_R T) \in A \Big) \ \wedge\ \mathcal{A} = \langle A, R \rangle \Big)$.

648 Normalerweise wird das, was ich hier unter der Bezeichnung „Vollständigkeitsaxiom“ zusammenfasse, in mehrere Axiome aufgeteilt: Einige von ihnen stellen sicher, dass eine Vollordnung $<$ über g existiert, und das eigentliche Vollständigkeitsaxiom fordert die *Vollständigkeit* von $\langle g, < \rangle$. Im System von Hilbert wird z. B. die Tatsache, dass es eine Vollordnung über g gibt, mit Hilfe einer axiomatisch beschriebenen dreistelligen „Zwischenrelation“ bewiesen (vgl. Hilbert, *Geometrie* § 3, S. 4–8, bes. Satz 6 S. 8). Das eigentliche Vollständigkeitsaxiom wurde erstmals 1872 (in einer zu der hier angeführten äquivalenten Form) von Dedekind formuliert, um das „Wesen der Stetigkeit“ auszudrücken (Dedekind, *Stetigkeit* § 3 S. 10). Hilbert drückte den wesentlichen Inhalt des Axioms durch seine beiden „Axiome der Stetigkeit“ aus (Hilbert, *Geometrie* S. 30–33).

Ist das Axiom wahr, so existiert nicht nur *eine* solche Relation.[649] Es soll daher für jede Gerade g ein solches $<$ fest ausgewählt werden und $<^g$ heißen;[650] sind Missverständnisse ausgeschlossen, schreiben wir dafür einfach $<$.

Plausibilitätsbetrachtung. Wir können uns vorstellen, dass die Gerade g von links nach rechts verläuft und dann als $<$ die Links-Rechts-Relation auf g nehmen. Es ist vollkommen klar, dass dieses $<$ eine Vollordnung über g ist; zu zeigen bleibt aber, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Teilklasse T von g ein Supremum besitzt. Wir können uns vorstellen, dass die zu T gehörigen Punkte – und nur diese – ein Art Schatten nach links werfen, der unendlich lang ist, so dass der links von einem jeden $t \in T$ liegende Teil der Geraden *dunkel* ist, während für jeden Punkt der Geraden, der keinen Punkt von T rechts von sich hat, der rechts von ihm liegende Teil der Geraden *hell* aussieht, weil auf ihn kein Schatten fällt. Weil nun T *nichtleer* ist, hat die Gerade einen *dunklen Teil*, und da T *nach oben beschränkt* ist, auch einen *hellen Teil*. Dabei kann es aber nicht verschiedene dunkle Teile D_1, D_2 geben, die durch eine helle Zone H voneinander getrennt wären (denn die Punkte des rechts von H liegenden dunklen Teils würden mit ihrem Schatten H verdunkeln), und auch nicht verschiedene helle Teile H_1, H_2, die durch eine dunkle Zone D voneinander getrennt wären (denn die Punkte von D würden mit ihrem Schatten eine der beiden Zonen H_1 oder H_2 verdunkeln). Also sieht man auf der Geraden nur zwei Zonen, eine helle und eine dunkle. Stellt man sich nun diese Gerade mit ihren beiden Zonen vor, *so nimmt man eine Grenze wahr*, in welcher die Zonen „aufeinander treffen“: Nämlich einen Punkt p, so dass links von p die Gerade dunkel und rechts von p die Gerade hell ist. Dieses p ist nun eine kleinste obere Schranke (ein Supremum) von T. Denn einerseits ist p eine obere Schranke von T (sonst müsste es in T einen Punkt t rechts von p geben; dann aber wäre die Strecke von p bis t, die rechts von p liegt, dunkel, was nicht der Fall ist), und andererseits gibt es keine obere Schranke s von T, die kleiner als p ist, also links von p liegt (sonst wäre die Strecke von s bis p, die links von p liegt, hell, was nicht der Fall ist). □ Die Ordnungsrelation $<^g$ erlaubt es uns nun, für die Gerade g folgende Ausdrucksweisen einzuführen:

5.21.11 Definition Gilt $a <^g b$, so heißt das Intervall $[a, b]$ die *Strecke* auf g von a bis b. $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ heißen die *Halbgeraden* oder *Strahlen* auf g mit Ausgangspunkt a. Ein *Grenzpunktpaar* von g ist ein Paar $\langle a, b\rangle$, für das $a <^g b$ gilt, und $\mathtt{GP}(g)$ bezeichnet die Klasse dieser Grenzpunktpaare.[651]

Außer dem Inzidenz– und Vollständigkeitsaxiom benötigen wir noch folgende Streckenaxiome.[652]

5.21.12 Streckenaxiome der Geraden Für jede Gerade g gilt:

(S) Es gibt Relationen $\cong$ und $\overset{\sim}{<}$, deren Feldbereich die Klasse $\mathtt{GP}(g)$ aller Grenzpunktpaare von g ist, und welche die nachfolgenden Bedingungen (S1) bis (S5) erfüllen.

---

649 Ist $\langle g, <\rangle$ vollständig vollgeordnet, gilt dies z. B. auch für $\langle g, >\rangle$, wobei $>$ die Umkehrrelation von $<$ ist.

650 Formal definieren wir: $<^g :\equiv \varepsilon\, r(\langle g, r\rangle$ ist vollständig geordnete Klasse). Diese Definition ist absolut, d. h. nimmt keinen Bezug auf die geometrischen Konstanten. Die Verwendung des Epsilon-Operators ist hier bequem, aber nicht unbedingt notwendig, denn man könnte statt dessen auch mit einer Variable arbeiten, die für „ein“ solches $<^g$ steht.

651 Formal definieren wir absolut (ohne Bezug auf geometrische Konstanten) für beliebige h, s, g, a:

h (ist) Halbgerade auf g mit Ausgangspunkt a $:\Leftrightarrow$ $h = [a, \infty)_{<^g} \vee h = (-\infty, a]_{<^g}$.

h (ist) Halbgerade auf g $:\Leftrightarrow$ $\bigvee_{x \in g} \Big(h = [x, \infty)_{<^g} \vee h = (-\infty, x]_{<^g}\Big)$.

s (ist) Strecke auf g $:\Leftrightarrow$ $\bigvee_{x \in \mathcal{R}} \bigvee_{y \in \mathcal{R}} \Big(x \neq y \ \wedge x <^g y \ \wedge \ s = [x, y]_{<^g}\Big)$.

die Strecke auf g von a bis b $:\equiv$ $[a, b]_{<^g}$.

p (ist) Grenzpunktpaar auf g $:\Leftrightarrow$ $\bigvee_{a \in g} \bigvee_{b \in g} (a <^g b \ \wedge \ p = \langle a, b\rangle)$. $\mathtt{GP}(g) := \{x \mid x$ Grenzpunktpaar von $g\}$.

652 Im HILBERTschen System kommt man mit drei einfachen Streckenaxiomen für die Gerade aus, muss dann aber die übrigen hier als Axiome aufgestellten Sätze durch ziemlich aufwendige Beweise herleiten.

Zwischenbemerkung. Gilt $\langle a,b\rangle \cong \langle c,d\rangle$, so sollen die Grenzpunktpaare $\langle a,b\rangle$ und $\langle c,d\rangle$ sowie auch die entsprechenden Strecken $[a,b]$ und $[c,d]$ «kongruent» oder «gleichlang» heißen. Gilt $\langle a,b\rangle \overset{\sim}{<} \langle c,d\rangle$, so soll das erste Grenzpunktpaar «kürzer» als das zweite und das zweite «länger» als das erste heißen; dasselbe gilt auch für die entsprechenden Strecken $[a,b]$ und $[c,d]$. Der Grund, warum ich die Relationen $\cong$ und $\overset{\sim}{<}$ nicht gleich als Relation *zwischen den Strecken* einführe, ist der, dass wir bis jetzt noch damit rechnen müssen, dass Strecken Unmengen sein können, während Relationen (der elementaren Theorie) nur *Individuen auf Individuen* ausrichten können. Die Grenzpunktpaare haben also gegenüber den Strecken formal den Vorteil, dass sie auf jeden Fall Individuen sind.[653] Die Bedingungen (S1) und (S5) sind nun:

(S1) $\cong$ *ist eine Äquivalenzrelation*[654] *und* $\overset{\sim}{<}$ *eine Ordnungsrelation.*[655]
(S2) *Gilt* $\langle a,b\rangle \cong \langle x,y\rangle$ *und* $\langle b,c\rangle \cong \langle y,z\rangle$, *so auch* $\langle a,c\rangle \cong \langle x,z\rangle$.[656]
(S3) *Ist die Strecke* $[a,b]$ *eine Teilklasse der Strecke* $[c,d]$ *von* g, *so gilt* $\langle a,b\rangle \overset{\sim}{<} \langle c,d\rangle$.
(S4) *Gilt* $\langle a,b\rangle \overset{\sim}{<} \langle x,y\rangle$, *darf man* $\langle a,b\rangle$ *oder* $\langle x,y\rangle$ *durch ein kongruentes* $\langle u,v\rangle$ *ersetzen.*[657]
(S5) *Für Punkte* x,y *von* g *mit* $x \neq y$ *gibt es auf der Geraden* g

(a) *zu jedem* z *genau ein* z^+, *so dass* $z < z^+$ *und* $\langle x,y\rangle \cong \langle z,z^+\rangle$ *gilt,*
(b) *zu jedem* z *genau ein* z^-, *so dass* $z^- < z$ *und* $\langle x,y\rangle \cong \langle z^-,z\rangle$ *gilt,*
(c) *genau ein* m, *so dass* $x < m < y$ *und* $\langle x,m\rangle \cong \langle m,y\rangle$ *gilt.*

Für jedes g wählen wir nun Relationen $\cong$ und $\overset{\sim}{<}$ aus, derart dass Axiom (S) erfüllt ist, und nennen diese die *Kongruenzrelation* $\cong^g$ bzw. die *Längenrelation* $\overset{\sim}{<}^g$ auf g.[658]

Plausibilitätsbetrachtung. In der anschaulichen Interpretation gilt $\langle a,b\rangle \cong \langle x,y\rangle$ (d. h. die Grenzpunktpaare $\langle a,b\rangle$ und $\langle x,y\rangle$ sind gleichlang), wenn ein und dieselbe gerade „Messstrecke“ sowohl mit Strecke $[a,b]$ als auch mit Strecke $[x,y]$ exakt koinzidieren kann.[659] Ferner gilt $\langle a,b\rangle \overset{\sim}{<} \langle x,y\rangle$ (d. h. $\langle a,b\rangle$ ist kürzer als $\langle x,y\rangle$), wenn eine Messstrecke, die genau zwischen a und b passt, nur mit einer echten Teilklasse von $[x,y]$ exakt koinzidieren kann. Mit diesen Erklärungen sind die Axiome selbstverständlich gültig, wobei die Bedeutung von m, z^+ und z^- in Axiom (S5) folgende ist: m ist der „Mittelpunkt“ zwischen x und y, und z^+ bzw. z^- der Punkt rechts bzw. links von z, der von z gerade soweit entfernt ist, dass eine Messstrecke, die man $[x,y]$ exakt koinzidieren kann, genau dazwischen passt. □

Zur Bezeichnung der in Axiom (S5) genannten Punkte m, z^+, z^- definieren wir:

---

653 In Hilberts System haben die Relationen $\cong$ und $\overset{\sim}{<}$ die Grenzpunktpaare *des ganzen Raumes* als Feldobjekte. Genauer gesagt arbeitet Hilbert nicht mit Grenzpunktpaaren $\langle a,b\rangle$, sondern mit „Systemen von zwei Punkten“, also zweielementigen Mengen $\{a,b\}$, die für ihn zugleich als „Strecken“ fungieren (vgl. *Geometrie* S. 5). Das ist aber kein wesentlicher Unterschied. – Ein diesen allgemeineren Vorgaben des Hilbertschen Systems angepasstes Axiom (S) erhält man, wenn man obigen Vorspann weglässt und direkt (S1) bis (S5) zitiert, wobei man vor (S3) und (S5) jeweils noch «für jede Gerade g gilt:» setzen muss. In unserem System bekommen wir dagegen für jede Gerade g ein *je eigenes* $\cong$ und $\overset{\sim}{<}$, und da es auch mehrere derartige Relationen $\cong$ und $\overset{\sim}{<}$ für dieselbe Gerade g geben kann, werden wir im Anschluss an die Formulierung von (S1) bis (S5) jeweils *eine* derartige Relation auswählen und $\cong^g$ bzw. $\overset{\sim}{<}^g$ nennen.

654 Es gilt: $x \cong x$ (Reflexivität), $x_1 \cong x_2 \to x_2 \cong x_1$ (Symmetrie) und $x_1 \cong x_2 \cong x_3 \to x_1 \cong x_3$ (Transitivität).

655 Es gilt: $x \overset{\sim}{<} x$ ist falsch (Irreflexivität) und $x_1 \overset{\sim}{<} x_2 \overset{\sim}{<} x_3 \to x_1 \overset{\sim}{<} x_3$ (Transitivität).

656 Diese im Hilbertschen System wichtige „Additivität“ werden wir *nicht* benötigen.

657 Das soll heißen: Gilt $\langle a,b\rangle \overset{\sim}{<} \langle x,y\rangle$ und $\langle a,b\rangle \cong \langle u,v\rangle$, so gilt auch $\langle u,v\rangle \overset{\sim}{<} \langle x,y\rangle$. Und ebenso: Gilt $\langle a,b\rangle \overset{\sim}{<} \langle x,y\rangle$ und $\langle x,y\rangle \cong \langle u,v\rangle$, so gilt auch $\langle a,b\rangle \overset{\sim}{<} \langle u,v\rangle$.

658 Formal gehen wir wie folgt vor. Zuerst definieren wir: $\cong^g \;:\equiv\; \varepsilon \cong$ (es gibt ein $\overset{\sim}{<}$, so dass$(S1) \wedge \cdots \wedge (S5)$). Sind nun $(S1)^*, \ldots (S5)^*$ die Ausdrücke, die man erhält, wenn man in (S1), …, (S5) das $\cong$ durch $\cong^g$ ersetzt, so definieren wir weiter: $\overset{\sim}{<}^g \;:\equiv\; \varepsilon \overset{\sim}{<}((S1)^* \wedge \cdots \wedge (S5)^*)$.

659 Die Messstrecke kann also so auf jede der beiden Strecken gelegt werden, dass jeder Punkt der Messstrecke auf der Strecke, und jeder Punkt der Strecke auf der Messstrecke liegt, also insbesondere die Endpunkte von Strecke und Messstrecke zusammenfallen.

5.21.13 Definition

(1) $z \oplus_g (x,y)$ sei für Punkte x,y mit $x <^g y$ das durch (S5a) beschriebene z^+.
(2) $z \ominus_g (x,y)$ sei für Punkte x,y mit $x <^g y$ das durch (S5b) beschriebene z^-.
(3) $\mathfrak{m}_g(x,y)$ sei für Punkte x,y mit $x <^g y$ das durch (S5c) beschriebene m.
(4) $\mathfrak{m}_g(x,y)$ sei für Punkte x,y mit $y <^g x$ das dann gemäß (3) definierte $\mathfrak{m}(y,x)$.
(5) $\mathfrak{m}_g(x,y)$ sei für Punkte x,y auf g mit $x = y$ dasselbe wie x (so dass $\mathfrak{m}(x,y) = x = y$).

Wir lassen den Index weg und schreiben $z \oplus (x,y)$ bzw. $z \ominus (x,y)$ bzw. $\mathfrak{m}(x,y)$, wenn der Bezug zu g klar ist. $\mathfrak{m}(x,y)$ ist gemäß (3) bis (5) für *beliebige* Punkte x,y der Geraden g definiert und heißt *Mittelpunkt* oder *Mitte* von x und y auf g. $z \oplus (x,y)$ bzw. $z \ominus (x,y)$ heißt *Resultat der Abtragung der Strecke* $[x,y]$ *von* z *aus in Vorwärtsrichtung bzw. in Rückwärtsrichtung.*[660]

Unmittelbar aus den Definitionen und (S5) folgt:

5.21.14 Theorem Für Punkte x,y,z mit $x < y$ auf einer Geraden g gilt:

$$z < z \oplus (x,y), \quad \textit{und für} \quad z^+ := z \oplus (x,y) \quad \textit{gilt:} \quad \langle z, z^+\rangle \cong \langle x,y\rangle \tag{5.182}$$
$$z > z \ominus (x,y), \quad \textit{und für} \quad z^- := z \ominus (x,y) \quad \textit{gilt:} \quad \langle z^-, z\rangle \cong \langle x,y\rangle \tag{5.183}$$
$$x < \mathfrak{m}(x,y) < y, \quad \textit{und für} \quad m := \mathfrak{m}(x,y) \quad \textit{gilt:} \quad \langle x,m\rangle \cong \langle m,y\rangle \tag{5.184}$$

Da nun die Axiome der Geraden vollständig eingeführt sind, können wir den Begriff der «Geraden» im Rahmen unserer Mengentheorie exakt wie folgt erklären:

5.21.15 Definition Eine *Gerade* ist eine Klasse g, für welche die in den Axiomen (I1), (V) und (S) gemachten Aussagen gelten.[661]

Bemerkung. Da wir in keiner Definition, die zur Formulierung von (I1), (V) und (S) gebraucht wurde, auf geometrische Konstanten Bezug nahmen, kann die Definition der Geraden in der Ursprache formuliert werden, ohne dass zusätzliche Grundkonstanten eingeführt werden müssen. So ist es gelungen, einen geometrischen Begriff (bzw. dessen wesentliche Züge) in einer rein mengentheoretischen Sprache zu formulieren. Im Folgenden setzen wir voraus:

> g ist eine beliebige Gerade, auf die sich alles Weitere bezieht: z. B. stehen $<$, $\cong$, $\overset{\sim}{<}$, $[a,b]$, $[a,\infty)$ usw. für $<^g, \cong^g, \overset{\sim}{<}{}^g, [a,b]_{<^g}, [a,\infty)_{<^g}$ usw.

Es soll nun die Aussage $g \sim \mathcal{P}(\omega)$ bewiesen werden. Als ersten Schritt hierzu führen wir auf jeder Halbgeraden $[a,\infty)$ von g ein «Zahlenstrahlmodell der Arithmetik» ein. Das ist im Prinzip schon in Beispiel 5.16.59 S. 230 geschehen; es ist nur noch zu zeigen, wie die dortige Konstruktion auf der nun exakt eingeführten Geraden durchführbar ist. Wegen (I1) gibt es auf g zwei verschiedene Punkte, und da $<$ eine Vollordnung ist, ist einer von ihnen kleiner als der andere. So gibt es auf g also Punkte p und q mit $p < q$, und wir wählen zwei solche Punkte p und q fest aus. Da $<$ eine Ordnungsrelation mit nichtleerem Feldbereich ohne maximales Element ist,[662] folgt nun aufgrund von Theorem 5.16.55 S. 229:

---

[660] Die formalen Definitionen brauchen auch hier nicht auf geometrische Konstanten Bezug zu nehmen; wir definieren einfach für beliebige z,g,x,y:

$$z \oplus_g (x,y) :\equiv \imath\, z^+\Big(x <^g y \ \wedge\ z < z^+ \ \wedge\ \langle x,y\rangle \cong^g \langle z,z^+\rangle\Big),$$
$$z \ominus_g (x,y) :\equiv \imath\, z^-\Big(x <^g y \ \wedge\ z^- < z \ \wedge\ \langle x,y\rangle \cong^g \langle z^-,z\rangle\Big),$$
$$\mathfrak{m}_g(x,y) :\equiv \imath\, m\Big((x <^g y \ \wedge\ x <^g m <^g y \ \wedge\ \langle x,m\rangle \cong^g \langle m,y\rangle) \vee (y <^g x \ \wedge\ y <^g m <^g x \ \wedge\ \langle y,m\rangle \cong^g \langle m,x\rangle) \ \vee\ (x = m = y \in g)\Big)$$

[661] Formal: g (ist) Gerade $:\equiv$ (I1) $\wedge$ (V) $\wedge$ (S).

[662] Wegen Satz 5.182 ist für jedes x aus g der Punkt $x \oplus (p,q)$ größer als x.

5.21.16 Theorem *Zu jedem auf g liegenden Punkt a gibt es ein Modell $\mathcal{N}_a$ der Arithmetik, dessen Trägerklasse $\mathbb{N}_a$ der Wertebereich der rekursiv definierten Funktion*

$$f\colon \omega \longrightarrow g \text{ mit } f(\emptyset) = a \text{ und } f(n') = f(n) \oplus (p,q)$$

ist. Die Null ist in diesem Modell a, der Nachfolger eines n aus $\mathbb{N}_a$ ist $n \oplus (p,q)$ und die Kleinerrelation von $\mathcal{N}_a$ stimmt über Elementen von $\mathbb{N}_a$ mit der Kleinerrelation $<$ von g überein.

Im Folgenden sei für Punkte a unserer Geraden g mit «$\mathbb{N}_a$» stets die Trägerklasse dieses Modells der Arithmetik gemeint. Dann gilt:

5.21.17 Theorem *Für jeden Punkt a ist $\mathbb{N}_a$ eine Teilklasse der Halbgeraden $[a,\infty)$.*

Beweis. Dies wird durch triviale Induktion im Modell $\mathcal{N}_a$ bewiesen.[663] □ Da somit die Gerade g alle Zahlen eines Modells der Arithmetik enthält, hat g unendlich viele Punkte. Das folgende Theorem sagt nun etwas über die „Verteilung“ der Zahlen aus $\mathbb{N}_a$ auf der Halbgeraden $[a,\infty)$ aus, nämlich dass man „hinter“ jedem Punkt p der Halbgeraden, so weit er auch vom Nullpunkt a entfernt sein mag, immer noch Zahlen von $\mathbb{N}_a$ findet. Anders gesagt bedeutet dies, dass sich die Zahlen aus $\mathbb{N}_a$ auf der Halbgeraden $[a,\infty)$ „bis ins Unendliche“ erstrecken:

5.21.18 Theorem *Zu jedem p aus $[a,\infty)$ gibt es ein Element n von $\mathbb{N}_a$ mit $p < n$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 444–445. □ Zudem liegt jeder Punkt p der Halbgeraden zwischen einer eindeutig bestimmten Zahl n und ihrem Nachfolger $n+1$:

5.21.19 Theorem *Zu jedem p aus $[a,\infty)$ gibt es genau ein n aus $\mathbb{N}_a$, so dass $p \in [n, n+1)$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 445. □ Der nun folgende Satz ist mindestens ebenso fundamental wie $g \sim \mathcal{P}(\omega)$ selbst; ihm zufolge sind sämtliche Strecken mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig:

5.21.20 Theorem *Für Punkte a und b mit $a < b$ ist jedes der Intervalle $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ und (a,b) mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig.*

Beweis. Der Beweis dieses entscheidenden Theorems ist mit allen Details im Anhang S. 445–450 ausgeführt. □ Durch Kombination von 5.21.20 und 5.21.19 erhält man das folgende Theorem, das besagt, dass alle Halbgeraden mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig sind:

5.21.21 Theorem *Für Punkte a ist jedes der Intervalle $[a,\infty)$, (a,∞), $(-\infty,a)$ und $(-\infty,a]$ mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig.*

Beweis. Siehe Anhang S. 450–451. □ Mit Hilfe der beiden letzten Theoreme zeigt sich nun:

5.21.22 Theorem *Für die Gerade g gilt $g \sim \mathcal{P}(\omega)$.*

Beweis. Wir wählen Punkte a, b, c der Geraden mit $a < b < c$ aus.[664] Jeder Punkt von g gehört dann entweder zu $I_1 := (-\infty, a]$ oder zu $I_2 := (a,\infty)$, wobei I_1 und I_2 kein gemeinsames Element haben. Mithin ist g die Vereinigung $I_1 \cup I_2$ mit disjunkten Klassen I_1 und I_2. Es gilt auch für die Intervalle $J_1 := [a,b]$ und $J_2 := (b,c]$, dass diese disjunkt sind, und ihre Vereinigung ist das Intervall $J := [a,b]$. Nun sind die Intervalle I_1, I_2, J_1, J_2 und J aufgrund der Theoreme 5.21.20 und 5.21.21

[663] Induktionsanfang. 0, d. h. a, liegt in $[a,\infty)$. Induktionsschluss. Voraussetzung. Die Zahl n des Modells $\mathcal{N}_a$ liegt in $[a,\infty)$. Dann gilt $a \le n$, und der Nachfolger $n \oplus (p,q)$ ist größer als n, also gilt $a \le n < n \oplus (p,q)$ und somit auch $a < n \oplus (p,q)$. Also liegt $n \oplus (p,q)$ in $[a,\infty)$.

[664] Da es auf g Punkte p, q mit $p < q$ gibt, können wir wählen $a := p$, $c := q$ und $b := \mathfrak{m}(p,q)$.

alle mit $\mathcal{P}(\omega)$ und also auch miteinander gleichmächtig. Daher existiert eine Bijektion F_1 von I_1 in J_1 und eine Bijektion F_2 von I_2 in J_2. Da sowohl I_1 und I_2 als auch J_1 und J_2 jeweils disjunkt sind, ist $F_1 \cup F_2$ nach Satz 5.39 S. 144 eine Bijektion von $I_1 \cup I_2$ in $J_1 \cup J_2$, das heißt von der Geraden g in das Intervall J. Daher ist g mit J gleichmächtig, und J ist nach Theorem 5.21.20 mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig; also muss auch g mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig sein. □ Zusammenfassend folgt nun:

5.21.23 Korollar *Geraden, Halbgeraden, Strecken und mehrpunktige Intervalle*[665] *sind miteinander und mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtige und darum kontinuierlich unendliche Mengen.*

Beweis. Nach den letzten drei Theoremen sind alle genannten Klassen mit der Menge $\mathcal{P}(\omega)$ und also auch miteinander gleichmächtig. □ Jetzt ist klar, dass jede Menge R, die unserer „vorläufigen Definition“ 5.21.6 der reellen Zahlen entspricht (d. h. mit einer Geraden gleichmächtig ist), auch mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig, d. h. kontinuierlich unendlich bzw. ein Kontinuum ist; und dass umgekehrt jedes Kontinuum (d. h. jede mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtige Menge) mit einer (und daher jeder) Geraden gleichmächtig ist. ≪Mit einer Geraden gleichmächtig sein≫ ist also dasselbe wie ≪kontinuierlich unendlich sein≫. Obwohl nun (nach der exakten Definition 5.21.15 der Geraden) an der Definition 5.21.6 prinzipiell nichts mehr auszusetzen ist, ziehe ich als endgültige Definition die folgende vor:

5.21.24 Endgültige Definition der Zahlengeraden Eine Klasse R heißt *Zahlengerade* und ihre Elemente heißen *reelle Zahlen*, wenn R kontinuierlich unendlich ist.[666] Für Zahlengeraden R ist also $R \sim \mathcal{P}(\omega)$, und gemäß 5.21.22 ist R mit jeder Geraden gleichmächtig. Sprechen wir von „der“ Klasse $\mathbb{R}$, sei von jetzt an eine fest ausgewählte *Standard-Zahlengerade* gemeint, deren Elemente Urelemente sein sollen:[667] $\mathbb{R} \;:\equiv\; \boldsymbol{\varepsilon} R(R \sim \mathcal{P}(\omega) \text{ und } R \subseteq \mathbb{U})$.

Diese Definition ist gegenüber 5.21.6 vorzuziehen, da kontinuierliche Unendlichkeit einfacher definiert werden kann als der Begriff der ≪Geraden≫. Als unsere Standard-Zahlengerade $\mathbb{R}$, für die nach Definition $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$ und $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{U}$ gilt, können wir die in Abschnitt 2.3 beschriebene Gerade ausgewählt zu denken (obwohl wir dies formal nicht ausdrücken können). Wir können jetzt auch die anderen in Abschnitt 2.3 beschriebenen Klassen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ formal einführen. Zunächst soll $\mathbb{Q}$ eine Rationalzahlklasse (d. h. nach 5.21.5 einfach: eine abzählbar unendliche Menge) sein, die Teilklasse von $\mathbb{R}$ ist. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar unendlich ist, muss $\mathbb{R}$ tatsächlich eine abzählbar unendliche Teilklasse besitzen,[668] und so definieren wir:

5.21.25 Definition $\mathbb{Q} := \boldsymbol{\varepsilon}\, Q\ (Q \sim \omega \text{ und } Q \subseteq \mathbb{R})$.

Demnach gilt per Definition $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; da aber $\mathbb{Q}$ nur abzählbar unendlich ist, kann keine Gleichheit herrschen und es gilt sogar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Am Ende von Abschnitt 2.3 wurde nun behauptet, dass es auf der Zahlengeraden auch „irrationale“ reelle Zahlen gibt, die nicht zu $\mathbb{Q}$ gehören, also in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen. Dass dies der Fall ist und dass auf der Zahlengeraden sogar „mehr“ irrationale als rationale Zahlen liegen, können wir nun sehr einfach in einem präzisen Sinn formulieren und beweisen. Es zeigt sich nämlich, dass es überabzählbar unendlich viele (und noch genauer: kontinuierlich unendlich viele) irrationale Zahlen gibt:

---

665 D. h. Intervalle mit mehr als einem Element im Gegensatz zu einpunktigen und leeren Intervallen wie z. B. $[a, a]$ und (a, a).

666 Formal: R (ist) Zahlengerade $:\Leftrightarrow$ R ist kontinuierlich unendlich.

667 Die letztere Forderung ist mathematisch entbehrlich, aber die Punkte einer *anschaulichen* Geraden – als welche wir uns die reellen Standard-Zahlen vorstellen wollen – sind nun einmal Urelemente, und aufgrund unseres Axioms für Urelemente (bzw. seines Korollars 5.15.21 S. 205) ist auch formal gesichert, dass $\mathbb{U}$ kontinuierlich unendliche Teilklassen besitzt, es also „aus Urelementen bestehende“ Zahlengeraden gibt.

668 Denn wegen $\omega \prec \mathbb{R}$ gibt es nach Satz 5.90 S. 200 eine Injektion f von ω in $\mathbb{R}$, und diese ist eine Bijektion von ω in ihren Wertebereich $\mathtt{Wb}(f)$, so dass dieser Wertebereich wie ω abzählbar unendlich ist (Theorem 5.20.5 S. 259). So ist $\mathtt{Wb}(f)$ eine abzählbar unendliche Teilklasse von $\mathbb{R}$.

5.21.26 Theorem *Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist kontinuierlich unendlich.*

Beweis. Weil $\mathbb{R}$ eine unendliche Menge mit $\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$ ist,[669] folgt aus Korollar 5.20.11 S. 260, dass $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gleichmächtig ist. Also ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ebenso wie $\mathbb{R}$ kontinuierlich unendlich. □

Weiter soll $\mathbb{Z}$ eine Ganzzahlklasse (d. h. nach Theorem 5.21.3 einfach: eine abzählbar unendliche Menge) sein, die Teilklasse von $\mathbb{Q}$ ist, derart dass auch die Klasse $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, mit der $\mathbb{Z}$ sich zu $\mathbb{Q}$ ergänzt, unendlich ist. Da nun $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist, können wir nach Lemma 5.21.1 S. 266 zwei abzählbar unendliche Mengen Y und Z ohne gemeinsames Element wählen, deren Vereinigung $\mathbb{Q}$ ist; die eine davon nennen wir die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen:[670]

5.21.27 Definition $\mathbb{Z} := \boldsymbol{\varepsilon}\ Z(\bigvee_Y (Y \sim Z \sim \omega \text{ und } Y \cap Z = \emptyset \text{ und } Y \cup Z = \mathbb{Q}))$.

Damit ist $\mathbb{Z}$ eine abzählbar unendliche echte Teilklasse von $\mathbb{Q}$. In genau gleicher Weise können wir auch aus $\mathbb{Z}$ zwei abzählbar unendliche Teilklassen M und N aussondern, die kein gemeinsames Element haben und deren Vereinigung $\mathbb{Z}$ ergibt; eine davon nennen wir die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:[671]

5.21.28 Definition $\mathbb{N} := \boldsymbol{\varepsilon}\ N(\bigvee_M (M \sim N \sim \omega \text{ und } M \cap N = \emptyset \text{ und } M \cup N = \mathbb{Z}))$.

So ist $\mathbb{N}$ eine abzählbar unendliche echte Teilklasse von $\mathbb{Z}$. Das Symbol $\mathbb{N}$ hat nun eine *absolute Bedeutung* bekommen; es bezeichnet die Trägerklasse eines besonderen Modells der Arithmetik, dessen Elemente Urelemente sind. Wir können jetzt noch irgendein Element $0_{\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ aussuchen, das als Null dienen soll, und wegen Theorem 5.16.52 S. 228 wissen wir, dass es dann ein Modell der Arithmetik gibt, dessen Träger $\mathbb{N}$ und dessen Null $0_{\mathbb{N}}$ ist; wir können also noch eine entsprechende Sukzessorfunktion $S_{\mathbb{N}}$ wählen und das Modell $\langle \mathbb{N}, \langle 0_{\mathbb{N}}, S_{\mathbb{N}} \rangle \rangle$ als unser „geometrisches“ Standardmodell der Arithmetik ansehen.

5.21.29 Definition $0_{\mathbb{N}} :\equiv \boldsymbol{\varepsilon}\ x\ (x \in \mathbb{N})$. $S_{\mathbb{N}} :\equiv \boldsymbol{\varepsilon}\ S\ (\langle \mathbb{N}, \langle 0_{\mathbb{N}}, S \rangle \rangle$ ist Arithmetik-Modell).

Mit diesen Definitionen gilt nun offenbar also die berühmte Teilmengenbeziehung:

5.21.30 Theorem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Die Mächtigkeit der Ebenen und des Raumes

Als Nächstes wird sich zeigen, dass nicht nur die „eindimensionalen“ Gebilde, von denen in Korollar 5.21.23 die Rede war, sondern auch Ebenen und euklidische Räume kontinuierlich unendlich sind. So ist jede noch so kleine Strecke nicht nur mit jeder Geraden, sondern auch mit jeder Ebenen und sogar mit dem ganzen Raum gleichmächtig. Um diese Ergebnisse zu bekommen, müssen wir zunächst unsere axiomatische Basis ausbauen.[672] Konkret benötigen wir erstens noch weitere „Inzidenzaxiome“, und zweitens die „Parallelenaxiome“.

---

669 $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich, $\mathbb{R}$ aber kontinuierlich unendlich, also gilt $\mathbb{Q} \sim \omega$ und $\mathcal{P}(\omega) \sim \mathbb{R}$ und man kann in der wahren Aussage $\omega \prec \mathcal{P}(\omega)$ (Satz von Cantor) wegen Theorem 5.15.4 S. 201 die linke Seite durch $\mathbb{Q}$ und die rechte Seite $\mathcal{P}(\omega)$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen; so erhält man $\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$.

670 Die andere ist dann $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ und ihre Elemente heißen *echte Bruchzahlen*.

671 Die andere ist dann $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ und ihre Elemente heißen *negative ganzen Zahlen*.

672 Im Gegensatz zum Vorhergehenden werden wir für Definitionen jetzt auf die geometrischen Konstanten ≪ist Gerade≫ und ≪ist Ebene≫ zurückgreifen. Diese Konstanten brauchen nicht ursprachlich gegeben zu sein, sondern können in der rein mengentheoretischen Sprache auf verschiedene Weise definiert werden, so etwa durch arithmetische Begriffe (vgl. Hilbert, *Geometrie* S. 34–37).

Zusätzlich zu Axiom (I1) gibt es bei HILBERT sinngemäß noch folgende Inzidenzaxiome:[673]

5.21.31 Inzidenzaxiome für die Ebenen und den Raum

(I2) *Zwei Punkte liegen auf genau einer Geraden.*

(I3) *Drei Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen, liegen auf genau einer Ebenen.*

(I4) *Auf jeder Ebenen liegen mindestens drei Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen.*

(I5) *Liegen zwei Punkte einer Geraden auf einer Ebene, so liegt dort die ganze Gerade.*

(I6) *Schneiden sich zwei Ebenen, so ist die Schnittklasse eine Gerade.*

(I7) *Im Raum gibt es mindestens drei Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen.*

(I8) *Im Raum gibt es mindestens vier Punkte, die nicht auf derselben Ebene liegen.*

Plausibilitätsbetrachtung. Das ist alles vollkommen klar. □ Im Gegensatz hierzu gelten die nun folgenden Parallelenaxiome als problematisch. Zunächst wird Parallelität wie folgt definiert:

5.21.32 Definition Seien g_1, g_2 Geraden und $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Ebenen.
$\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ heißen (zueinander) parallele Ebenen (in Zeichen $\mathcal{E} \,[\![]\!]\, \mathcal{E}_2$) wenn sie entweder identisch sind oder kein gemeinsames Element haben.
g_1 und g_2 heißen (zueinander) parallele Geraden (in Zeichen $g_1 \,||\, g_2$), wenn sie in ein und derselben Ebene liegen, und entweder identisch sind oder kein gemeinsames Element haben.[674]

Allein aus den Inzidenzaxiomen lässt sich nun über Parallelität Folgendes beweisen:

5.21.33 Lemma *Zwei auf derselben Ebenen liegende Geraden schneiden sich entweder in genau einem Punkt oder sind parallel (aber nicht beides).*

Beweis. Wenn sich zwei auf derselben Ebenen liegende Geraden nicht in genau einem Punkt schneiden, so schneiden sie sich entweder überhaupt nicht (und sind daher parallel) oder sie schneiden sich in mehreren Punkten (dann haben sie mindestens zwei gemeinsame Punkte, sind also wegen Axiom (I2) identisch und damit wieder parallel). In jedem Fall gilt also *mindestens eine* der beiden Alternativen: Sie schneiden sich in genau einem Punkt oder sind parallel. *Beide* Alternativen können aber nicht wahr sein: Sind die Geraden parallel, so können sie sich nicht in genau einem Punkt schneiden, denn nach Definition der Parallelität haben sie entweder kein gemeinsames Element (schneiden sich also gar nicht) oder sind identisch (dann haben sie alle Punkte gemeinsam, und dies sind nach Axiom (I1) wenigstens zwei). □

5.21.34 Lemma *Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, in der eine Gerade g liegt (also $g \subseteq \mathcal{E}$). Dann liegt in $\mathcal{E}$ auch jede zu g parallele Gerade h, die mit $\mathcal{E}$ mindestens einen gemeinsamen Punkt hat.*

---

673 Vgl. HILBERT, *Geometrie*, Verknüpfungsaxiome S. 3–4. Statt (I4) fordert HILBERT nur, dass jede Ebene *mindestens einen* Punkt hat, und statt (I6) verlangt er, dass wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, sie noch mindestens einen weiteren gemeinsam haben. Aus diesen einfacheren Axiomen kann man mit relativ geringem Aufwand meine Versionen von (I4) und (I6) beweisen; diese sind jedoch unmittelbar einsichtig, so dass wir uns den Aufwand sparen, sie aus HILBERTschen Originalaxiomen erst abzuleiten.

674 Formal: $\mathcal{E}_1 \,[\![]\!]\, \mathcal{E}_1 \;:\Leftrightarrow\; \mathcal{E}_1$ Ebene $\wedge$ $\mathcal{E}_2$ Ebene $\wedge$ $((\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2) \vee (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset))$.
$g_1 \,||\, g_2 \;:\Leftrightarrow\; g_1$ Gerade $\wedge$ g_1 Gerade $\wedge \bigvee_{\mathcal{E}} (\mathcal{E}$ Ebene $\wedge\; g_1 \subseteq \mathcal{E} \;\wedge\; g_2 \subseteq \mathcal{E}) \;\wedge\; (g_1 = g_2 \;\vee\; (g_1 \cap g_2) = \emptyset)$.

Beweis. Sei h zu g parallel und habe mit $\mathcal{E}$ den Punkt P gemeinsam. Zu zeigen ist, dass $h \subseteq \mathcal{E}$. Ist $h = g$, folgt dies sofort aus $g \subseteq \mathcal{E}$. Sei also $h \neq g$. Aufgrund der Definition der Parallelität dürfen dann g und h gar keinen gemeinsamen Punkt haben, weshalb der auf h liegende Punkt P dann nicht auf g liegt. Wir wählen nun gemäß (I1) zwei Punkte A und B, die auf g liegen. Dann sind A, B, P drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte,[675] so dass es nach Axiom (I3) *genau eine* Ebene gibt, auf der diese drei Punkte liegen. Da sie aber alle auf $\mathcal{E}$ liegen, ist $\mathcal{E}$ *die einzige* A, B und P enthaltende Ebene. Nach Definition der Parallelität von Geraden muss es nun aber eine Ebene geben, auf der die parallelen Geraden g und h liegen. Auf dieser liegen dann auch P, A und B; also handelt es sich bei dieser gemeinsamen Ebenen um $\mathcal{E}$, und folglich liegt h in $\mathcal{E}$. □
Nun formulieren wir die Parallelenaxiome:

5.21.35 Parallelenaxiome

(P1) *Ist g Gerade und P Punkt, gibt es genau eine zu g parallele Gerade, auf der p liegt.*
(P2) *Ist $\mathcal{E}$ Ebene und P Punkt, gibt es genau eine zu $\mathcal{E}$ parallele Ebene, auf der p liegt.*
(P3) *Parallelität ist über Geraden und auch über Ebenen eine Äquivalenzrelation.*[676]

Die in (P1) beschriebene Gerade nennen wir *die Parallele zu g durch P*, die durch (P2) beschriebene Ebene *die Parallelebene zu $\mathcal{E}$ durch P*.[677]

Bemerkung. Man kommt eigentlich mit (P1) aus, während man (P2) und (P3) aus den übrigen HILBERTschen Axiomen ableiten kann. Das ist aber recht aufwendig, so dass ich (P2) und (P3) unter die Axiome aufnehme, zumal mir der Grad an Plausibilität für die drei Aussagen derselbe zu sein scheint. Auch (P1) ließe sich noch vereinfachen: Falls p auf g liegt, ist das Axiom trivial (die einzige Parallele zu g durch P ist dann g), und auch im allgemeinen Fall lässt sich beweisen, dass stets *mindestens* eine Parallele existiert.[678] So bleibt als „harter Kern“ des Axioms nur die Aussage, dass es *nicht mehrere* Parallelen zu g durch einen nicht auf g liegenden Punkt gibt; in einer hierzu äquivalenten Form war das Axiom ursprünglich auch von EUKLID formuliert worden.[679]

Plausibilitätsbetrachtung. Das Parallelenaxiom (P1) kann als das am meisten umstrittene geometrische Axiom gelten. Dies hängt damit zusammen, dass man, um über seine Wahrheit anschauliche Evidenz zu erlangen, nicht nur endliche Strecken, sondern zwei *ganze* Geraden betrachten muss. Geraden erstrecken sich jedoch „ins Unendliche“, wo die *unmittelbare* Anschauung versagt. Trotzdem *haben* wir eine halbwegs anschauliche Vorstellung von der ganzen Geraden,[680] und diese lässt uns das Axiom zweifellos plausibler erscheinen als seine Alternativen: dass es nämlich *keine* oder *mehrere* Parallelgeraden zu g durch P gibt. Setzt man eine dieser Alternativen voraus, erhält man

---

675 Lägen sie auf derselben Geraden k, so hätte diese mit g die Punkte A und B gemeinsam, so dass wegen der Eindeutigkeitsaussage von (I2) k mit g identisch wäre. Also müsste P auf g liegen, was falsch ist.

676 Das heißt: Es gilt $g \parallel g$ (Reflexivität), $g_1 \parallel g_2 \to g_2 \parallel g_1$ (Symmetrie) und $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3 \to g_1 \parallel g_3$ (Transitivität) für alle Geraden g, g_1, g_2, g_3, und Analoges gilt für die Parallelität von Ebenen.

677 Formal: $\ll$die Parallele zu g durch $p\gg$ $:\equiv$ $\iota\, g'(g' \parallel g \wedge P \in g')$, und
$\ll$die Parallelebene zu $\mathcal{E}$ durch $p\gg$ $:\equiv$ $\iota\, \mathcal{E}'(\mathcal{E}' \,[\![\!]\, \mathcal{E} \wedge P \in \mathcal{E}')$.

678 Vgl. HILBERT, *Geometrie* S. 28. Die anschauliche Beweisidee ist folgende: Man denke sich eine Z-förmige Figur mit der unteren Linie auf g liegend, die genau so groß ist, dass P auf der oberen Linie des Z aufliegt. Verlängert man die obere Linie dieses Z in beide Richtungen ins Unbegrenzte, erhält man eine Parallele zu g durch den Punkt P. Zur exakten Durchführung des Beweises benötigt man den „Satz vom Außenwinkel“, zu dessen Ableitung man die (hier nicht behandelten) Kongruenzaxiome für Winkel braucht.

679 Vgl. EUKLID, *Elemente* Buch 1 Postulat 5, Ausgabe Heiberg/Stamatis Band 1 S. 5, Ausgabe Thaer S. 3. EUKLID spricht allerdings nicht von Parallelen; die angegebene moderne Form des Postulats geht auf John PLAYFAIR (1748–1819) bzw. dessen Euklid-Kommentar *Elements of Geometry* (1796) zurück.

680 Diese Vorstellung besteht darin, dass wir, obgleich wir nur einen begrenzten Teil der Geraden (nämlich eine auf ihr liegende, durch Anfangs– und Endpunkt begrenzte Strecke) unmittelbar anschaulich vor Augen haben können, diesen Teil beliebig vergrößern können, ohne an eine prinzipielle Grenze zu stoßen.

zusammen mit gewissen anderen geometrischen Axiomen logisch konsistente Strukturen, die sog. „nichteuklidischen Geometrien“,[681] die jedoch *für den Anschauungsraum* nicht akzeptabel sind. □

Nachdem wir wissen, dass Geraden Kontinua sind, untersuchen wir nun die Ebenen. Wichtig ist zunächst die Tatsache, dass es in jeder Ebene ein „Koordinatensystem“ gibt:

5.21.36 Definition und Theorem Wir sagen, dass zwei Geraden *sich kreuzen*, wenn sie genau einen Punkt gemeinsam haben. Sich kreuzende Geraden g und h liegen stets in genau einer Ebene, welche der *Aufspann* $\mathtt{Spann}(g,h)$ dieser Geraden heißt. Ferner gibt es zu jeder Ebene $\mathcal{E}$ sich kreuzende Geraden g_0 und g_1, so dass $\mathcal{E}$ deren Aufspann ist. Für solche Geraden heißt $\leqslant g_0, g_1 \geqslant$ ein *Koordinatensystem* von $\mathcal{E}$.[682]

Beweis. Sei S der einzige Schnittpunkt von g und h und sei P bzw. Q je ein Punkt auf g bzw. h, der von S verschieden ist. Dann liegen S, P und Q nicht auf ein und derselben Geraden,[683] also gibt es nach (I3) genau eine Ebene, auf der S, P und Q liegen. Wegen (I5) liegt dann sowohl g als auch h in dieser Ebene, und eine weitere Ebene, auf der g und h liegen, gibt es nicht: sonst lägen S, P und Q auch auf dieser, was der Eindeutigkeitsaussage von (I3) widerspricht. So bleibt zu zeigen, dass es in jeder Ebene $\mathcal{E}$ sich kreuzende Geraden gibt. Nach (I4) gibt es in $\mathcal{E}$ drei nicht auf derselben Geraden liegende Punkte X, Y, Z. Gemäß (I2) sei g_0 die durch X und Y gehende und g_1 die durch X und Z gehende Gerade. Beide liegen nach (I5) in $\mathcal{E}$, sind *verschieden* (sonst würden X, Y, Z ja auf ein und derselben Geraden liegen) und schneiden sich in X. Außer X aber haben sie keinen weiteren Punkt gemeinsam, sonst wären sie nach der Eindeutigkeitsaussage von Axiom (I2) identisch. □

5.21.37 Theorem *Ist $\leqslant g_0, g_1 \geqslant$ ein Koordinatensystem von Ebene $\mathcal{E}$, so gilt $\mathcal{E} \sim g_0 \times g_1$.*

Beweis. Im Anhang S. 451–452 wird ausgeführt, wie man jedem Punkt P der Ebenen je einen Punkt P_0 von g_0 und einen Punkt P_1 von g_1 zuordnen kann (wobei P_0 die „nullte“ und P_1 die „erste Projektion“ von P bezüglich des Koordinatensystems heißt) derart dass die Funktion, die P auf das Paar $\langle P_0, P_1 \rangle$ seiner beiden Projektionen wirft, eine Bijektion ist von $\mathcal{E}$ in $g_0 \times g_1$ ist. □

5.21.38 Korollar *Für jede Ebene $\mathcal{E}$ gilt $\mathcal{E} \sim \mathbb{R}^2$.*

Beweis. Nach Satz 5.21.36 können wir in $\mathcal{E}$ ein Koordinatensystem $\leqslant g_0, g_1 \geqslant$ wählen, und nach Theorem 5.21.37 gilt $\mathcal{E} \sim g_0 \times g_1$. Nach Korollar 5.21.23 und Definition 5.21.24 gilt nun sowohl $g_0 \sim \mathbb{R}$ als auch $g_1 \sim \mathbb{R}$; also folgt mit Satz 5.171 S. 258, dass $g_0 \times g_1 \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nach Theorem 5.18.8 S. 250 ist schließlich $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$, so dass insgesamt $\mathcal{E} \sim g_1 \times g_2 \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$ gilt, also $\mathcal{E} \times \mathbb{R}^2$. □

Analoges gilt für den Raum. Hier führen wir ein „räumliches“ Koordinatensystem ein:

---

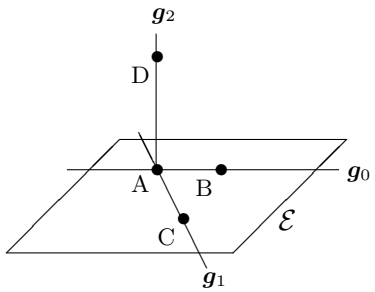
681 Die Forderung, dass es mehrere Parallelen gibt, heißt das *Lobatschewskische Parallelenpostulat*, und die Forderung, dass es keine gibt, das *Riemannsche*. Auf dem Lobatschewskischen Postulat baut die *hyperbolische*, auf dem Riemannschen die *elliptische Geometrie* auf, deren Spezialfall die *sphärische Geometrie* ist. Für beide Postulate gibt es sinnvolle Interpretationen. Dabei muss man im Riemannschen Modell allerdings noch weitere Axiome Hilberts streichen (weil man aus diesen, wie gesagt, die Existenz von *mindestens einer* Parallelen logisch ableiten kann). Vgl. zu den nicht-euklidischen Geometrien Moise, *Elementary Geometry* S. 139f–147; Jacobs, *Geometry* S. 579–604; Hilbert, *Geometrie* S. 159–177; Osserman, *Universe* S. 62–66 und Maor, *Infinity* S. 143–161. Zur Frage, welche dieser Geometrien den physikalischen Raum prägt, siehe S. 655–656.

682 Formal: g_1 kreuzt g_2 $:\Leftrightarrow$ g_1 Gerade $\wedge$ g_2 Gerade $\wedge \dot{\bigvee}_x (x \in (g_1 \cap g_2))$.
$\mathtt{Spann}(g_1, g_2)$ $:\equiv$ $\imath\, \mathcal{E}(\mathcal{E}$ Ebene $\wedge$ g_1 kreuzt g_2 $\wedge$ $g_1 \cup g_2 \subseteq \mathcal{E})$.
$\mathfrak{K}$ (ist) Koordinatensystem von $\mathcal{E}$ $:\Leftrightarrow$ $\bigvee_{g_1 g_2} \Big(g_1$ kreuzt g_2 $\wedge$ $\mathtt{Spann}(g_1, g_2) = \mathcal{E}$ $\wedge$ $\mathfrak{K} = \leqslant g_1, g_2 \geqslant\Big)$.

683 Wäre k eine solche Gerade, so hätte sie mit g die Punkte S und P gemeinsam, wäre also nach der Eindeutigkeitsaussage von Axiom (I2) mit g identisch; analog wäre sie auch mit h identisch, und so ergäbe sich $g = h$. Dann hätten aber g und h wegen (I1) mindestens zwei Punkte gemeinsam, was falsch ist.

5.21.39 Theorem und Definition *Es gibt Geraden g_0, g_1, g_2, so dass g_0 und g_1 sich kreuzende Geraden sind und g_2 deren Ebene* $\mathtt{Spann}(g_0, g_1)$ *nur im Schnittpunkt von g_0 und g_1 schneidet.* Für solche Geraden heißt $\langle g_0, g_1, g_2 \rangle$ ein *räumliches Koordinatensystem.*[684] $\mathtt{Spann}(g_0, g_1)$ heißt die *Grundebene* des Koordinatensystems und g_2 seine *Höhenachse.*

Beweis. Gemäß (I7) gibt es Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen; dann kreuzen sich die durch A und B gehende Gerade g_0 und die durch A und C gehende Gerade g_1. Nun liegen nach (I3) die Punkte A, B, C auf genau einer Ebene $\mathcal{E}$, und wegen (I5) ist $\mathcal{E}$ die Ebene, in der die sich kreuzenden Geraden g_0 und g_1 liegen. Wegen (I8) muss es noch mindestens einen Punkt D geben, der nicht in Ebene $\mathcal{E}$ liegt. Sei g_2 die durch A und D gehende Gerade. Diese schneidet $\mathcal{E}$ im Punkt A, und einen weiteren Schnittpunkt von $\mathcal{E}$ und g_2 gibt es nicht, sonst läge nach (I5) die ganze Gerade auf $\mathcal{E}$ (was falsch ist, da der Punkt D von g_2 nicht auf $\mathcal{E}$ liegt). □



5.21.40 Lemma *Ist $\mathcal{E}$ eine Ebene und h eine Gerade, die $\mathcal{E}$ in genau einem Punkt schneidet, so schneidet h auch jede Parallelebene von $\mathcal{E}$ in genau einem Punkt.*

Beweis Siehe Anhang S. 452–453. □

5.21.41 Theorem *Ist $\mathcal{E}$ ein Ebene und h eine Gerade, die $\mathcal{E}$* (und nach Lemma 5.21.40 folglich auch jede Parallelebene zu $\mathcal{E}$) *in genau einem Punkt schneidet, so gilt $\mathcal{R} \sim \mathcal{E} \times h$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 453–454. □

5.21.42 Korollar *Ist $\mathcal{R}$ ein euklidischer Raum, gilt $\mathcal{R} \sim \mathbb{R}^3$.*

Beweis. Nach 5.21.39 gibt es ein räumliches Koordinatensystem. Ist $\mathcal{E}$ dessen Grundebene und h dessen Höhenachse, so haben h und $\mathcal{E}$ nur einen gemeinsamen Punkt. Folglich gilt nach Theorem 5.21.41, dass $\mathcal{R} \sim \mathcal{E} \times h$. Nach Korollar 5.21.38 ist aber $\mathcal{E} \sim \mathbb{R}^2$ und nach Korollar 5.21.23 und Definition 5.21.24 gilt $h \sim \mathbb{R}$; also folgt (wegen Satz 5.171 S. 258), dass $\mathcal{E} \times h \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Nach Theorem 5.18.8 S. 250 ist schließlich $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^3$, so dass insgesamt $\mathcal{R} \sim \mathcal{E} \times h \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^3$ gilt, so dass $\mathcal{R} \sim \mathbb{R}^3$. □

Nun kann ein **Dimensionsbegriff** eingeführt werden: Ist n eine Zahl, soll jede zu $\mathbb{R}^n$ gleichmächtige Klasse, zum Beispiel also $\mathbb{R}^n$ selbst, als ein *n-dimensionaler Raum* gelten. Meist arbeiten Mathematiker mit komplizierteren Dimensionsbegriffen, die aber voraussetzen, dass die betrachtete Klasse mit einer quasi-geometrischen Struktur ausgestattet ist (etwa mit einer sog. Vektorraum-Struktur oder mit einer sog. Topologie). Der gerade erklärte Dimensionsbegriff benötigt dagegen keinerlei zusätzliche Strukturen, und das Kennzeichen eines n-dimensionalen Raumes R gemäß obiger Erklärung ist einfach, dass man seine Elemente (≪Punkte≫) eindeutig durch n reelle Zahlen beschreiben kann, die man seine ≪Koordinaten≫ nennt: Wegen der Gleichmächtigkeit mit $\mathbb{R}^n$ können wir nämlich eine Bijektion von R in $\mathbb{R}^n$ wählen, die jedem Punkt von R „sein“ n-Tupel $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ von reellen Zahlen $x_1, \ldots x_n$ zuordnet. In diesem Sinn müssen aufgrund der besprochenen Sätze *Geraden* als 1-dimensionale, *Ebenen* als 2-dimensionale und *euklidische Räume* als 3-dimensionale Räume aufgefasst werden. Beispiele für einen 4-dimensionalen Raum wären so genannte *Raum-Zeit-Kontinua.*[685]

---

684 Formal: $\mathfrak{K}$ (ist) räumliches Koordinatensystem $:\Leftrightarrow$
$\bigvee_{g_0 g_1 g_2} \Big(g_0$ kreuzt $g_1 \;\wedge\; g_2$ Gerade $\;\wedge\; \mathtt{Spann}(g_0, g_1) \cap g_2 = \{\imath\, x(x = g_0 \cap g_1)\} \;\wedge\; \mathfrak{K} = \langle g_0, g_1, g_2 \rangle \Big)$.

685 Läuft an jedem Punkt P eines 3-dimensionalen Raumes $\mathcal{R}$ eine mit $\mathbb{R}$ gleichmächtige Menge $\mathbb{E}_P$ von Ereignissen ab, so kann man für alle Punkte P diese „Ereignismengen“ $\mathbb{E}_P$ vereinigen und erhält dann eine Menge, die ein *Raumzeit-Kontinuum* $\mathcal{K}$ ist, dessen Elemente man *Raumzeit-Punkte* nennen kann.

Dieser Dimensionsbegriff kann nun dadurch erweitert werden, dass wir als Dimension n nicht nur natürliche Zahlen, sondern beliebige Mengen zulassen. Je nachdem, ob n eine endliche Menge (also etwa eine NEUMANNsche natürliche Zahl) oder eine unendliche Menge ist, sollen die n-dimensionalen Räume *endlichdimensional* bzw. *unendlichdimensional* heißen. Zum Beispiel wären $\mathbb{R}^\omega$ und $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ unendlichdimensionale Räume. Nun wird das folgende Theorem 5.21.43 zeigen, dass alle endlichdimensionalen Räume mit dem eindimensionalen Raum $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind, so dass *überhaupt kein Unterschied zwischen Räumen verschiedener endlicher Dimension* (in dem hier betrachteten Sinn) besteht, man also nicht von „der" Dimension eines Raumes sprechen kann: Um eine *eindeutige* Dimensionszahl zu bekommen, müsste man den betrachteten Klassen Strukturen hinzufügen (etwa eine Vektorraum-Struktur), was hier aber nicht weiter ausgeführt werden soll. Gemäß unserem einfachen Dimensionsbegriff aber kann man *alle endlichdimensionalen Räume genauso gut auch als* 1*-dimensional ansehen*, d. h. durch „Umordnung" der Punkte in einem n-dimensionalen Raum kann man alle diese Punkte auf eine Gerade (und wenn man will, auf eine noch so kleine Strecke) bannen. Wegen $\mathbb{R}^\omega \sim \mathbb{R}$, was ebenfalls im folgenden Theorem enthalten ist, gilt dasselbe auch dann noch, wenn der Raum abzählbar unendlich viele Dimensionen besitzt:

5.21.43 Theorem $\mathbb{R}$ *ist gleichmächtig mit* $\mathbb{R}^\omega$ *und mit* $\mathbb{R}^n$ *für jede von* 0 *verschiedene Zahl.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Sätzen 5.179 und 5.180 von Theorem 5.20.25 S. 265. □ Theorem 5.21.43 zeigt nun, dass unsere mit $\mathbb{R}^2$ gleichmächtigen Ebenen auch mit $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind: Ebenen sind relationstheoretisch nicht größer als die mit $\mathbb{R}$ gleichmächtigen Geraden, Halbgeraden und Strecken. Weiter zeigt das Theorem, dass der ganze mit $\mathbb{R}^3$ gleichmächtige euklidische Raum $\mathcal{R}$ ebenfalls nicht relationstheoretisch größer ist, so dass alle diese geometrischen „Grundgebiete" auf ein und derselben Mengenstufe der kontinuierlich unendlichen Mengen liegen. Auf dieser liegen des Weiteren sogar alle endlichdimensionalen Räume bis hin zu den unendlichdimensionalen Räumen mit abzählbar unendlicher Dimensionszahl. Besonders drastisch ausgedrückt lautet also das Resultat:

5.21.44 Theorem *Jede noch so kleine Strecke ist gleichmächtig mit dem gesamten dreidimensionalen euklidischen Raum, und sogar mit einem Raum, der abzählbar unendlich viele Dimensionen hat: Beides sind kontinuierlich unendliche Mengen.*

Die Tatsache, „dass Flächen, Körper, ja selbst Gebilde von ρ Dimensionen dieselbe Mächtigkeit haben wie Curven" wurde von Georg CANTOR im Jahre 1877 entdeckt; 1878 publizierte er einem Beweis hierfür und dehnte diesen Satz auf Räume mit abzählbar vielen Dimensionen aus.[686] Diese Ergebnisse waren der herrschenden Ansicht unter den damaligen Geometern entgegengesetzt, die in Bezug auf Linien, Flächen und Körpern vom „einfach", „zweifach" und „dreifach" Unendlichen sprachen.[687] CANTOR selbst fand seine Erkenntnis so unglaublich, dass er an DEDEKIND schrieb: „je le vois, mais je ne le crois pas."[688]

[686] Vgl. CANTORs Brief an DEDEKIND vom 20.6.1877 (CANTOR, *Briefe* S. 41) und seine *Beiträge zur Mannigfaltigkeitslehre*, besonders § 1 und § 8, Ausgabe Zermelo S. 122 und 131.

[687] Vgl. CANTORs Brief an DEDEKIND vom 20.6.1877 (CANTOR, *Briefe* S. 41).

[688] Brief vom 29.6.1877 (CANTOR, *Briefe* S. 44).

5.22 Die drei fundamentalen Unendlichkeitsstufen und das Kontinuumsproblem

Der vorhergehende Abschnitt hat gezeigt, dass selbst unendlichdimensionale Räume nicht mächtiger als $\mathbb{R}$ sein müssen. Doch gilt $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^x$ nicht für jedes *beliebige* x. Es gilt nämlich:

5.22.1 Theorem *Sind $\kappa, \kappa_1, \kappa_2$ kontinuierlich unendlich, so sind $\mathcal{P}(\kappa)$ und ${\kappa_1}^{\kappa_2}$ untereinander gleichmächtig, aber mächtiger als $\mathbb{R}$, d. h. es gilt $\mathbb{R} \prec {\kappa_1}^{\kappa_2} \sim \mathcal{P}(\kappa)$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 454. □ Durch Anwendung dieses Theorems erhalten wir:

5.22.2 Korollar *Für kontinuierlich unendliches κ gilt $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^\kappa \sim \mathcal{P}(\kappa)$, daher zum Beispiel $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^\mathfrak{c} \sim \mathcal{P}(\mathfrak{c})$.*

Beweis. Dies folgt aus Theorem 5.22.1 und der Tatsache, dass $\mathbb{R}$ und die Ordinalzahl $\mathfrak{c}$ kontinuierlich unendlich sind (siehe 5.20.25 und 5.21.24). □ So sind die Räume $\mathbb{R}^\kappa$ für kontinuierlich unendliches κ, d. h. Räume mit kontinuierlich unendlich vielen Dimensionen (die also ebenso viele Dimensionen haben, wie $\mathbb{R}$ Punkte besitzt), relationstheoretisch „größer“ als der gewöhnliche kontinuierlich unendliche Raum $\mathbb{R}$.[689] Weil aber $\mathbb{R}^\kappa \sim \mathcal{P}(\kappa)$ gilt, gehören diese Räume nun derjenigen Stufe an, auf welche wir nach dem Satz von Cantor durch Potenzmengenbildung gelangen, wenn wir von einer kontinuierlich unendlichen Menge κ ausgehen. Mengen dieser Stufe heißen *funktional unendlich*, weil die Menge $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ dazugehört, welche sämtliche *Funktionen* von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ als Elemente hat:

5.22.3 Theorem und Definition Eine Klasse heißt *funktional* unendlich, wenn sie mit $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ gleichmächtig ist, also zur Mengenstufe $\llbracket \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \rrbracket$ gehört. *Hier liegen alle Mengen $\mathcal{P}(\kappa)$ und ${\kappa_1}^{\kappa_2}$ für kontinuierlich unendliche Mengen $\kappa, \kappa_1, \kappa_2$. Außerdem muss auch mindestens eine Ordinalzahl hier liegen.* Die kleinste funktional unendliche Ordinalzahl wird mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet und gilt als der Hauptrepräsentant dieser Unendlichkeitsstufe, weshalb wir für $\llbracket \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \rrbracket$ standardmäßig $\llbracket \mathfrak{f} \rrbracket$ schreiben.[690]

Beweis. $\mathcal{P}(\omega)$ ist kontinuierlich unendlich, also gilt $\mathcal{P}(\omega) \sim \kappa$, und mit Satz 5.173 S. 258 folgt $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \sim \mathcal{P}(\kappa)$. Nach Theorem 5.22.1 ist außerdem $\mathcal{P}(\kappa) \sim {\kappa_1}^{\kappa_2}$, so dass $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$, $\mathcal{P}(\kappa)$ und ${\kappa_1}^{\kappa_2}$ auf derselben Mengenstufe liegen. Nach Korollar 5.14.17 S. 197 ist ferner die Klasse der hier liegenden Ordinalzahlen nichtleer, besitzt also ein Minimum, das wir $\mathfrak{f}$ nennen. □ Im folgenden Theorem werden die Größenverhältnisse zwischen den drei fundamentalen Unendlichkeitsstufen $\llbracket \omega \rrbracket$ der abzählbar unendlichen, $\llbracket \mathfrak{c} \rrbracket$ der kontinuierlich unendlichen und $\llbracket \mathfrak{f} \rrbracket$ der funktional unendlichen Mengen bestimmt:

---

689 Für den Leser, der mit der Theorie der Vektorräume vertraut ist, sei hier das Folgende angemerkt (siehe auch Fußnote 707 auf S. 287). Die Räume $\mathbb{R}^\kappa$ können als $\mathbb{R}$-Vektorräume betrachtet werden, bei denen Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise definiert ist; es handelt sich um ein sog. ≪direktes Produkt≫ von κ Kopien des Raumes $\mathbb{R}$. Weniger bekannt ist, dass die *Vektorraum*-Dimension dieser Räume für kontinuierlich unendliches κ *nicht* kontinuierlich unendlich, sondern noch größer ist. Allgemein gilt nämlich für unendlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume X, dass die Mächtigkeit $|X|$ von X (siehe Definition 5.30.1 S. 316) $= \max\{d, |\mathbb{R}|\}$ ist, wobei $|\mathbb{R}|$ die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ und d die Dimensionszahl des Raumes ist (vgl. Hewitt und Stroberg, *Abstract Analysis* S. 32 Exercise 4.60); hierbei sind $|X|, |\mathbb{R}|$ und d sog. unendliche Kardinalzahlen (vgl. Abschnitt 5.30). Weil also der Raum $\mathbb{R}^\kappa$ mächtiger als $\mathbb{R}$ ist, ist seine Dimensionszahl d hier gleich der Mächtigkeit von $\mathbb{R}^\kappa$. So besitzt der Raum $\mathbb{R}^\kappa$, wenn man ihn als Vektorraum betrachtet, nicht „ebenso viele (Vektorraum-)Dimensionen, wie $\mathbb{R}$ Punkte besitzt“, sondern sogar „ebenso viele, wie *er selbst* Punkte besitzt“. Mit Blick auf die folgende Definition 5.22.3 wäre daher zu sagen, dass die Vektorraum-Dimension von $\mathbb{R}^\kappa$ nicht ≪kontinuierlich unendlich≫, sondern ≪funktional unendlich≫ ist.

690 Formal: $\mathfrak{f} :\equiv \min_{<_{\mathtt{On}}} \{\alpha \mid \alpha \in \mathtt{On} \wedge \alpha \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))\}$.
C (ist) funktional unendlich $:\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \sim C$ (dazu ist äquivalent $C \in \llbracket \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \rrbracket$ sowie $C \in \llbracket \mathfrak{f} \rrbracket$).

5.22.4 Theorem *Es gilt* $\|\omega\| <_{Fr} \|\mathfrak{c}\| <_{Fr} \|\mathfrak{f}\|$, *für die Mengen* $\omega, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ *gilt entsprechend* $\omega \prec \mathfrak{c} \prec \mathfrak{f}$ *und für* $\omega, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ *als Ordinalzahlen gilt* $\omega < \mathfrak{c} < \mathfrak{f}$.

Beweis. Aus $\omega \prec \mathcal{P}(\omega) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ (Satz von CANTOR) folgt gemäß Satz 5.108 S. 204 dass $\|\omega\| <_{Fr} \|\mathcal{P}(\omega)\| <_{Fr} \|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))\|$, das heißt $\|\omega\| <_{Fr} \|\mathfrak{c}\| <_{Fr} \|\mathfrak{f}\|$. Daraus folgt wieder mit Satz 5.108 S. 204, dass $\omega \prec \mathfrak{c} \prec \mathfrak{f}$, und mit Satz 5.101 S. 201, dass $\omega < \mathfrak{c} < \mathfrak{f}$. □

Wir können nun die in der Mathematik gewöhnlich betrachteten Zahlenmengen in ihrem ergänzungs– und relationstheoretischen Größenverhältnissen wie folgt darstellen. Die Mengen $\mathbb{N}$ der natürlichen, $\mathbb{Z}$ der ganzen und $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen können wir als Teilmengen auf unserer Standard-Zahlengeraden $\mathbb{R}$ auffassen, so dass $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt.[691] Hierbei sind $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ relationstheoretisch gleich groß, nämlich abzählbar unendlich,[692] während $\mathbb{R}$ kontinuierlich unendlich ist.[693] Um nun gewissen Operationen (etwa das Wurzelziehen) auf alle reellen Zahlen ausdehnen zu können, benötigt man *weitere Zahlen*. Hierzu wählt man eine Ebene, in der $\mathbb{R}$ liegt, und erweitert die reellen Zahlen zur Menge $\mathbb{C}$ *aller* Punkte dieser Ebenen. Es gilt dann $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$ heißt die *komplexe Zahlenebene* $\mathbb{C}$. Wie jede Ebene ist $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und daher nach Theorem 5.21.43 auch wieder mit $\mathbb{R}$ gleichmächtig, also ist $\mathbb{C}$ ebenfalls kontinuierlich unendlich. Man kann $\mathbb{C}$ wieder als echte Teilmenge eines dreidimensionalen Raumes $\mathcal{R}$ auffassen und diesen Raum seinerseits als Teilmenge höherdimensionaler *Zahlenräume* $\mathcal{V}_4, \mathcal{V}_5, \ldots, \mathcal{V}_\omega$, die mit $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots, \mathbb{R}^\omega$ gleichmächtig sind. Auch diese Räume sind nach Theorem 5.21.43 mit $\mathbb{R}$ gleichmächtig und daher kontinuierlich unendlich. Schließlich kann man diese Reihe mit noch höherdimensionalen Räumen fortsetzen, wobei der mit $\mathbb{R}^{\mathfrak{c}}$ gleichmächtige Raum $\mathcal{V}_{\mathfrak{c}}$ wegen Theorem 5.22.1 funktional unendlich ist. Man stattet alle diese Räume meist mit einer sog. *Vektorraum-Struktur* aus und nennt ihre Elemente deshalb meist nicht *Zahlen*, sondern *Vektoren*. Eine besondere Rolle spielen der «Quaternionenraum» $\mathcal{V}_4$ und der «Oktionenraum» $\mathcal{V}_8$, die man auch $\mathbb{H}$ bzw. $\mathbb{O}$ nennt.[694] Es gilt nun also:

$$\underbrace{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}_{\text{abzählbar unendlich}} \subset \underbrace{\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathcal{R} \subset \mathbb{H} \subset \cdots \subset \mathbb{O} \subset \mathcal{V}_9 \subset \ldots \mathcal{V}_\omega \subset}_{\text{kontinuierlich unendlich}} \ldots \underbrace{\mathcal{V}_{\mathfrak{c}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim \mathbb{C}^{\mathbb{C}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})}_{\text{funktional unendlich}}$$

Zur formalen Definition der Räume $\mathcal{V}_\alpha$ siehe Abschnitt 5.23. Die wichtigsten drei Unendlichkeitsstufen, mit denen demnach die gewöhnliche Mathematik zu tun hat, sind folgende:

- Die unterste ist die Stufe $\|\omega\|$ der zum Zählen benutzten *abzählbar unendlichen* Trägerklassen für Modelle der Arithmetik. Hier liegen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und die als repräsentativ geltende Ordinalzahl ω, die Menge der NEUMANNschen natürlichen Zahlen.

- Die mittlere ist die Stufe $\|\mathfrak{c}\|$ der zum Messen benutzten *kontinuierlich unendlichen* Mengen, auf der $\mathcal{P}(\alpha)$ für abzählbar unendliches α (zum Beispiel $\mathcal{P}(\omega)$), die Zahlengerade $\mathbb{R}$, die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$, der euklidische Raum $\mathcal{R}$ und andere in der Geometrie betrachtete Mengen liegen; hier liegt auch die Ordinalzahl $\mathfrak{c}$.

- Die oberste ist die Stufe $\|\mathfrak{f}\|$, auf der $\mathcal{P}(\kappa)$ und $\kappa_1^{\kappa_2}$ für kontinuierlich unendliches $\kappa, \kappa_1, \kappa_2$ liegen (zum Beispiel $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)), \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$); ebenso die Ordinalzahl $\mathfrak{f}$.

691 Vgl. Theorem 5.21.30 S. 276; siehe auch die Ausführungen auf S. 23.

692 Siehe S. 266–267.

693 Siehe S. 274–275.

694 Diesen Mengen kann man eine der Struktur der reellen und komplexen Zahlen ähnliche Struktur verleihen, was in den 1840er Jahren entdeckt wurde, woran William Rowan HAMILTON und Arthur CAYLEY (1821–1895) maßgeblich beteiligt waren; daher spricht man bei den Vektoren von $\mathcal{V}_4$ bzw. $\mathcal{V}_8$ auch von den HAMILTONschen *Zahlen* oder *Quaternionen* bzw. CAYLEYschen *Zahlen* oder *Oktionen* (oder auch *Oktonionen*). Vgl. hierzu KOECHER und REMMERT, *Cayley-Zahlen* sowie KOECHER und REMMERT, *Quaternionen*.

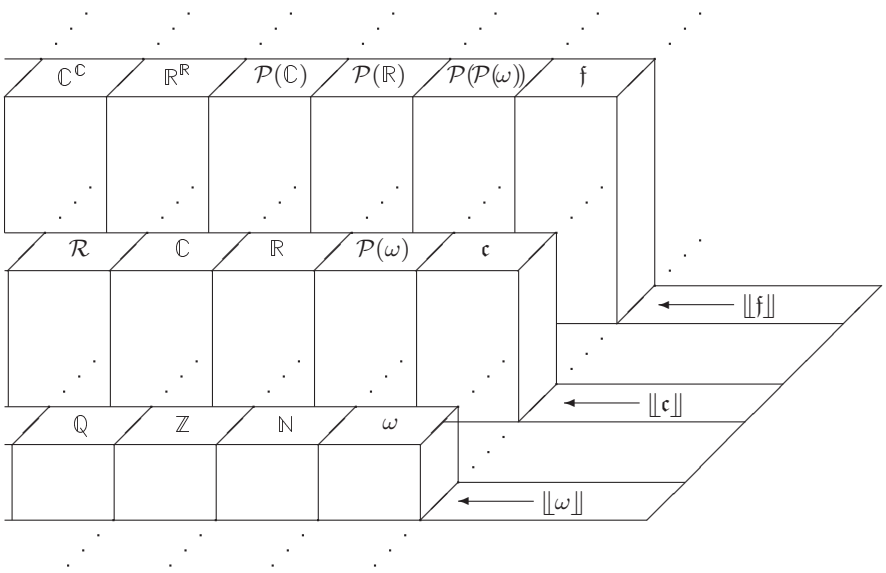


Abbildung 5.30: Die drei fundamentalen Unendlichkeitsstufen

Andere, insbesondere größere unendliche Mächtigkeiten tauchen in der gewöhnlichen Mathematik nicht auf, und auch die heutige Physik kommt ohne sie aus.[695]

Eine interessante Frage ist nun, wie die drei genannten Unendlichkeitsstufen in die Gesamtheit aller Klassenstufen einzuordnen sind. Klar ist, dass $\|\omega\|$ die kleinste Unendlichkeitsstufe ist (Satz 5.150 S. 246), und dass $\|\omega\|$ kleiner als die Stufe $\|\mathfrak{c}\|$ und diese wieder kleiner als $\|\mathfrak{f}\|$ ist (Theorem 5.22.4). Klar ist auch, dass eine Unendlichkeitsstufe keinen unmittelbaren Vorgänger haben muss, aber stets einen unmittelbaren Nachfolger hat (Korollar 5.20.23 S. 264 mit nachfolgender Bemerkung). Nun stellt sich aber die Frage, ob die Stufe $\|\mathfrak{c}\|$, zu welcher uns die Potenzmengenbildung ausgehend von Mengen aus $\|\omega\|$ brachte, tatsächlich die *unmittelbar* über $\|\omega\|$ folgende Stufe ist, oder ob es noch „Zwischenstufen“ gibt, so dass die unmittelbar über $\|\omega\|$ liegende Stufe tiefer als $\|\mathfrak{c}\|$ liegt. Diese Frage ist bis heute nicht entschieden. Cantor glaubte, dass es zwischen der Stufe der abzählbar unendlichen und der kontinuierlich unendlichen Mengen *keine* Zwischenstufe mehr gibt. Man nennt diese Annahme die *Kontinuumshypothese.* Allgemeiner stellten Adolf Lindenbaum und Alfred Tarski 1926 die Vermutung auf, dass die Menge $\mathcal{P}(M)$ für eine unendliche Menge M *immer* auf der nächst höheren Stufe der Unendlichkeit steht,[696] was man die *verallgemeinerte Kontinuumshypothese* nennt. Demnach müsste nicht nur $\|\mathfrak{c}\|$ unmittelbar über $\|\omega\|$, sondern auch $\|\mathfrak{f}\|$ wieder unmittelbar über $\|\mathfrak{c}\|$ kommen usw.

Mathematisch konnte man bis heute über die Größe des Kontinuums nur wenig ermitteln,[697] so dass noch unendlich viele Möglichkeiten offen bleiben. Eine dieser Möglichkeiten ist nach wie vor die von Cantor befürwortete, dass $\|\mathfrak{c}\|$ unmittelbar über $\|\omega\|$ liegt. Die bis heute wichtigsten Erkenntnisse im Zusammenhang mit der Kontinuumshypothese verdanken wir jedoch den Untersuchungen von Kurt Gödel und Paul Joseph Cohen. Gödel veröffentlichte 1940 einen Beweis dafür, dass die Cantorsche (und sogar die verallgemeinerte) Kontinuumshypothese nicht mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre im Widerspruch steht: d. h. sie ist nicht widerlegbar, wenn man (nur) diese Axiome voraussetzt.[698] Komplementär hierzu zeigte Cohen 1963, dass aber auch die

695 Vgl. die Ausführungen bei Penrose, *Reality* S. 378–381 über „sizes of infinity in physics“.

696 Vgl. Lindenbaum und Tarski, *Communications.*

697 Siehe Genaueres auf S. 334 mit Fußnote 860.

698 Vgl. Gödel, *Consistency.*

Annahme, die Kontinuumshypothese sei falsch, mit den Axiomen vereinbar ist.[699] So handelt es sich bei der Kontinuumshypothese um eine mathematische These, die *mit den üblichen Axiomen weder bewiesen noch widerlegt werden kann*, also relativ zu diesen Axiomen *unentscheidbar* ist.

Das bedeutet nicht, dass sie weder wahr noch falsch ist, sondern nur, dass die bisher verwendeten Axiome nicht ausreichen, um die Frage zu entscheiden. Man muss also entweder die Frage direkt aufgrund nicht-mathematischer Plausibilitätsbetrachtungen entscheiden (und dann die Kontinuumshypothese oder ihr Gegenteil direkt als ein intuitiv plausibel gemachtes neues Axiom aufstellen)[700] oder die Mengenlehre durch andere Axiome erweitern und hoffen, dass sich die Frage durch Ableitung aus einem erweiterten Axiomensystem entscheiden lassen wird. In jedem Fall benötigt man neue Intuitionen über den Mengen– oder Kontinuumsbegriff, die zu erarbeiten eine Aufgabe der Philosophie wäre. Ich möchte das Kontinuumsproblem hiermit auf sich beruhen lassen. Es sei allerdings noch darauf hingewiesen, dass eine Lösung des Kontinuumsproblems noch keineswegs den letzten Aufschluss darüber bieten würde, wie „mächtig“ die mit einem räumlichen Kontinuum gegebene Vielheit von Punkten tatsächlich sein kann. Wie sich zeigen wird (siehe S. 289–296), könnte es nämlich sein, dass Anschauungsräume in eine größere Klasse von Punkten eingeordnet sind, so dass man ihre eigentlichen Punkte durch weitere *uneigentliche Punkte* zu ergänzen hätte.

[699] Vgl. Cohen, *Independence results* und vom selben Autor *Continuum hypothesis* und *Set theory*.

[700] Cohen etwa glaubt im Gegensatz zu Cantor, dass die Kontinuumshypothese sich als evident falsch („obviously false“) herausstellen wird und Kontinua auf einer sehr viel höheren Stufe als abzählbar unendliche Mengen angesiedelt sind. Als Grund hierfür gibt er an, dass ω die einfachste unendliche Menge ist, während die kontinuierlich unendliche Menge $\mathfrak{c}$ durch ein ganz neues und kraftvolleres Prinzip („a totally new and more powerfull principle“), nämlich das Potenzmengenaxiom, generiert wird (vgl. Cohen, *Set Theory* S. 151).

5.23 Höherdimensionale Räume

Die im letzten Abschnitt genannten α-dimensionalen Räume $\mathcal{V}_\alpha$ (für Ordinalzahlen α) sollen nun exakt eingeführt werden. Als Hilfsmittel definieren wir zunächst analoge Räume $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\alpha$:

5.23.1 Definition $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ sei die Klasse aller Funktionen f von einer Ordinalzahl α in $\mathbb{R}$, die «als letzte Komponenten keine Nullen haben», das soll heißen: für jedes ξ aus α, für das $f(\xi) = 0_\mathbb{N}$ gilt, gibt es ein $\eta \in \alpha$ mit $\xi < \eta$ und $f(\eta) \neq 0_\mathbb{N}$. Weiter sei $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\alpha$ für Ordinalzahlen α die Klasse aller Funktionen aus $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$, deren Definitionsbereich ein ξ mit $\xi \leq \alpha$ ist.[701]
$\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\alpha$ heiße der *α-dimensionale* und $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ der *Ω-dimensionale reelle Funktionenraum.*

- $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_0$ ist also die Klasse der in $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ liegenden 0-Tupel, und da das einzige 0-Tupel $\emptyset$ in $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ liegt,[702] ist $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_0 = \{\emptyset\} = \mathbb{R}^0$ der 0-dimensionale Raum mit $\emptyset$ als einzigem «Punkt».

- $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ ist die Klasse der in $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ liegenden 0– und 1-Tupel, das ist $\{\emptyset\}$ vereinigt mit der Klasse $\{t \mid \text{es gibt ein } x \text{ aus } \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0_\mathbb{N} \text{ so dass } t = \langle\!\langle x \rangle\!\rangle\}$. Es gilt $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1 \sim \mathbb{R}$, denn die Funktion $f_\mathbb{R}$, die $\emptyset$ auf $0_\mathbb{N}$ und jedes $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ mit $x \neq 0_\mathbb{N}$ auf x wirft, ist eine Bijektion von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ in $\mathbb{R}$. Daher ist $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ eine Gerade oder 1-dimensionale Menge, welche das 0-dimensionale $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_0$ als echte Teilmenge hat, und die sich aus kontinuierlich unendlich vielen disjunkten 0-dimensionalen Mengen zusammensetzt, von denen $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_0$ eine ist.[703]

- $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2$ ist die Klasse der in $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ liegenden 0–, 1– und 2-Tupel, das ist die Vereinigung von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ und $\{t \mid \text{es gibt } x \text{ und } y \text{ aus } \mathbb{R} \text{ mit } y \neq 0_\mathbb{N} \text{ so dass } t = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle\}$. Es gilt $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2 \sim \mathbb{R}^2$, denn die Funktion f_2, die $\emptyset$ auf $\langle\!\langle 0_\mathbb{N}, 0_\mathbb{N} \rangle\!\rangle$, jedes $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{N}\}$ auf $\langle\!\langle x, 0_\mathbb{N} \rangle\!\rangle$ und jedes $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle$ mit $y \neq 0_\mathbb{N}$ auf sich selbst wirft, ist eine Bijektion von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2$ in $\mathbb{R}^2$. Zusätzlich hat $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2$ die Gerade $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ als echte Teilmenge, und entspricht einer Ebene, in der $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ die Rolle einer Geraden spielen kann. Denn $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2$ setzt sich aus kontinuierlich unendlich vielen disjunkten Geraden (oder 1-dimensionalen Mengen) zusammen, von denen $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ eine ist;[704] die übrigen lassen sich dann als «Parallelgeraden» von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ ansehen.

- In analoger Weise hat $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_3$ die Struktur eines 3-dimensionalen Raumes, in dem $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2$ eine ausgezeichnete Ebene ist, die zu einer Schar kontinuierlich unendlich vieler 2-dimensionaler Räume gehört, die sich zu $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_3$ zusammensetzen; die von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2$ verschiedenen Ebenen kann man als «Parallelebenen» von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2$ im Raum $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_3$ ansehen.

Diese Betrachtung lässt sich auf 4– und höherdimensionale Räume fortsetzen. So haben wir eine Reihe ineinander liegender Räume, deren Dimensionen alle Ordinalzahlen durchlaufen:

5.23.2 Theorem *Für jede Ordinalzahl α ist $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\alpha$ eine mit $\mathbb{R}^\alpha$ gleichmächtige (also α-dimensionale) Menge. Außerdem setzt sich $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_{\alpha+1}$ aus kontinuierlich unendlich vielen disjunkten α-dimensionalen*

---

701 Formal: $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}} :\equiv \Big\{ f \mid \Big(\bigvee_{\alpha \in \mathtt{On}} f \in \mathbb{R}^\alpha \wedge \bigwedge_{\xi \in \alpha} \big(f(\xi) = 0_\mathbb{N} \;\rightarrow\; \bigvee_{\eta \in \alpha} (\xi < \eta \wedge f(\eta) \neq 0_\mathbb{N}) \big) \Big) \Big\}$,
und $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\alpha \;:\equiv\; \mathbb{R}^{\mathtt{ord}} \cap \bigcup_{\xi \in \alpha+1} \mathbb{R}^\xi$.

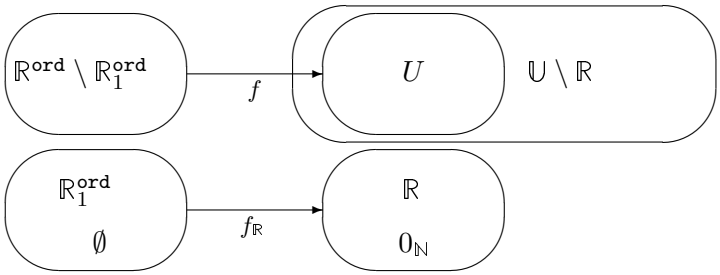
702 Das 0-Tupel $\emptyset$ hat ja gar keine Komponenten und darum auch keine Nullen als letzte Komponenten.

703 Das heißt: $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ ist die Vereinigung über eine Familie f disjunkter 0-dimensionaler Mengen (von denen $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_0$ eine ist), deren Definitionsbereich das kontinuierlich unendliche $\mathbb{R}$ ist. Man wähle als f die Familie mit Indexklasse $\mathbb{R}$, für die $f_{0_\mathbb{N}} := \{\emptyset\} = \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_0$ und $f_x := \{\langle\!\langle x \rangle\!\rangle\}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{N}\}$ gilt.

704 Das heißt: $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_2$ ist die Vereinigung über eine Familie f disjunkter 1-dimensionaler Mengen (Geraden), von denen $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ eine ist, und deren Definitionsbereich das kontinuierlich unendliche $\mathbb{R}$ ist. Man wähle als f die Familie f mit Indexklasse $\mathbb{R}$, für die $f_{0_\mathbb{N}} := \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_1$ und $f_x := \{p \mid \bigvee_{u \in \mathbb{R}} p = \langle\!\langle u, x \rangle\!\rangle\}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{N}\}$ gilt.

Mengen zusammen, von denen $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ eine ist,[705] *so dass man die übrigen als ≪parallele α-dimensionale Unterräume≫ von $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ im Raum $\mathbb{R}_{\alpha+1}^{\mathtt{ord}}$ ansehen kann. Schließlich gilt für Ordinalzahlen α und β mit $\alpha < \beta$ stets $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}} \subset \mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}} \subset \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 454–455. □ $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ ist eine Unmenge:[706] ein *unmengen-dimensionaler* oder genauer *Ω-dimensionaler Überraum*, der die Räume $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ aller Dimensionen α aus Ω umfasst.[707] So haben wir für jede Ordinalzahl α einen α-dimensionalen Raum $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$, derart dass $\mathbb{R}_0^{\mathtt{ord}} \subseteq \mathbb{R}_1^{\mathtt{ord}} \subseteq \mathbb{R}_2^{\mathtt{ord}} \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$. Wir wollen nun den Raum $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ durch einen Raum $\mathcal{V}$ ersetzen, der nur Urelemente enthält und $\mathbb{R}$ als Teilmenge hat. Nach Theorem 5.15.12 S. 203 ist $\mathbb{U} \setminus \mathbb{R}$ mit der Unmenge $\mathbb{U}$ aller Urelemente gleichmächtig, die nach Axiom 5.15.20 S. 205 mit $\mathbb{D}$ gleichmächtig ist. So gilt $\mathbb{D} \sim (\mathbb{U} \setminus \mathbb{R})$, d. h. es existiert eine Injektion von $\mathbb{D}$ in $\mathbb{U} \setminus \mathbb{R}$. Sei f deren Einschränkung auf $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}} \setminus \mathbb{R}_1^{\mathtt{ord}}$. Dann ist f also eine Bijektion von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}} \setminus \mathbb{R}_1^{\mathtt{ord}}$ in eine Teilklasse $U := \mathtt{Wb}(f)$ von $\mathbb{U} \setminus \mathbb{R}$. Betrachten wir f und die Bijektion $f_{\mathbb{R}}$ von $\mathbb{R}_1^{\mathtt{ord}}$ in $\mathbb{R}$, die $\emptyset$ auf $0_{\mathbb{N}}$ und jedes $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ mit $x \neq 0_{\mathbb{N}}$ auf x wirft:



705 Das soll heißen: $\mathbb{R}_{\alpha+1}^{\mathtt{ord}}$ ist die Vereinigung über eine Familie f disjunkter α-dimensionaler Mengen, deren Definitionsbereich das kontinuierlich unendliche $\mathbb{R}$ ist, wobei $f_{0_{\mathbb{N}}} = \mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ ist.

706 Jede Funktion f, die jede Ordinalzahl α auf irgendein $\alpha + 1$-Tupel t aus $\mathbb{R}^{\alpha+1}$ wirft, dessen Komponenten $\neq 0_{\mathbb{N}}$ sind, ist eine Injektion von $\mathtt{On}$ in $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$, und so gilt $\mathtt{On} \precsim \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$, weshalb $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ eine Unmenge ist. Mit später erörterten Sätzen lässt sich zusätzlich zeigen, dass $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ zu den mit $\mathtt{On}$ gleichmächtigen (also „kleinsten“) Unmengen gehört. Dazu ziehe man das „Universum“ $\mathbb{V}$ heran, das in Abschnitt 5.29 beschrieben werden wird: Zu zeigen ist, dass $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ mit einer Teilklasse T von $\mathbb{V}$ gleichmächtig ist, denn wegen der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{V}$ mit $\mathtt{On}$ (Theorem 5.218 S. 309) geht dann die wahre Aussage $T \precsim \mathbb{V}$ (Satz 5.89 S. 200) in $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}} \precsim \mathtt{On}$ über, und zusammen mit $\mathtt{On} \precsim \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ folgt $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}} \sim \mathtt{On}$ gemäß Theorem 5.15.5 S. 201. Dass aber $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ mit einer Teilklasse von $\mathbb{V}$ gleichmächtig ist, zeigen wir so: Es liegen in $\mathbb{V}$ alle Funktionen von einer Ordinalzahl α in eine andere Ordinalzahl (vgl. 5.206 S. 308 und 5.270 S. 329), insbesondere diejenigen von α in $\mathfrak{c}$. Ferner gibt es eine Bijektion b von $\mathbb{R}$ in die kontinuierlich unendliche Ordinalzahl $\mathfrak{c}$. Die Funktion F aber, die jedes Tupel t aus $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ auf das Tupel $F(t)$ wirft, das jedes x aus dem Definitionsbereich von t auf $b(t_x)$ wirft (so dass $F(t)$ eine Funktion von einer Ordinalzahl α in $\mathfrak{c}$ ist), ist offenbar eine Injektion von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ in $\mathbb{V}$. Daher ist der Wertebereich von F in der Tat eine mit $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ gleichmächtige Teilklasse von $\mathbb{V}$.

707 Für den mit der Vektorraum-Theorie vertrauten Leser sei angemerkt, dass diese Dimensionsbetrachtungen nicht im Sinne dieser Theorie verstanden werden dürfen (siehe auch Fußnote 689). Die ≪Dimension eines Vektorraums V≫ ist definiert als die ≪Kardinalzahl≫ einer sog. ≪Basis≫ des Vektorraums, wobei Kardinalzahlen spezielle Ordinalzahlen sind (siehe Abschnitt 5.30). Ist die Trägerklasse V eine Menge, so hat der Vektorraum stets eine Basis, und verschiedene seiner Basen haben dieselbe Kardinalzahl, so dass die Dimension des Raumes dann stets eine eindeutig bestimmte Kardinalzahl ist. Auf die Situation, dass V eine Unmenge ist, lässt sich aber der gewöhnliche Beweis für die Existenz einer Basis nicht ohne weiteres übertragen (vgl. etwa Scheja und Storch, *Algebra* S. 182 Beweis zu Korollar 23.5: hier wird das Zornsche Lemma verwendet, dessen Anwendbarkeit auf Unmengen nicht geklärt ist; siehe Theorem 5.14.20 S. 199 mit nachfolgender Bemerkung), so dass nicht klar ist, ob auch in diesem Fall eine Basis existiert. *Wenn* aber eine existiert, müssen die Basisvektoren eine Unmenge bilden: Denn wann immer Basisvektoren eine Menge B bilden, ist der Vektorraum X, dessen Basis B ist, ebenfalls eine solche, wie sofort aus der Formel $|X| = \max\{d, |\mathbb{R}|\}$ ersichtlich ist (siehe Fußnote 689)
Im Gegensatz zur Vektorraum-Theorie können wir nun aber bei den Räumen $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ sinnvollerweise *beliebige Ordinalzahlen* als Dimension ansehen, da hier gemäß Theorem 5.23.2 die Räume mit der Größe der Ordinalzahl wenigstens ergänzungstheoretisch anwachsen. So ist es auch sinnvoll, $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ hier die Dimensionszahl Ω zuzuordnen, auch wenn es keine mit Ω gleichmächtige Klasse von Vektoren geben sollte, die eine Basis für einen Vektorraum mit Träger $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ bilden.
Jedenfalls ist aber die Klasse $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ tatsächlich Träger eines Vektorraums, der für jede unendliche Kardinalzahl κ aus Ω einen κ-dimensionalen Untervektorraum besitzt, wie ich im Anhang auf S. 456 zeige.

f und $f_{\mathbb{R}}$ haben weder gemeinsame Argumente noch gemeinsame Werte, also ist ihre Vereinigung $F := f \cup f_{\mathbb{R}}$ gemäß 5.10.65 S. 144 eine Bijektion von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ in eine Teilklasse von $\mathbb{U}$, nämlich $U \cup \mathbb{R}$.[708] Weiter hat F die Eigenschaft, dass $\mathtt{Wb}(F/\,\mathbb{R}_1^{\mathtt{ord}}) = \mathbb{R}$ ist und außerdem $F(\emptyset) = 0_{\mathbb{N}}$, also $\mathtt{Wb}(F/\,\mathbb{R}_0^{\mathtt{ord}}) = \mathtt{Wb}(\{\emptyset\}) = \{0_{\mathbb{N}}\}$ gilt. Nun definieren wir:

5.23.3 Definition Für jede Ordinalzahl α sei

$\mathcal{V}_\alpha$ [Lesart: α-dimensionaler Standardraum] $:\equiv$ $\mathtt{Wb}(F/\,\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}})$.
$\mathcal{V}$ [Lesart: Ω-dimensionaler Standardraum] $:\equiv$ $\mathtt{Wb}(F)$.[709]

Für jede Ordinalzahl α ist nun $\mathcal{V}_\alpha$ ebenso wie $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ ein α-dimensionaler Raum,[710] und $\mathcal{V}$ ist eine Unmenge,[711] die als unmengen-dimensionaler Raum aufgefasst werden kann. Zudem gilt für Ordinalzahlen α, β mit $\alpha < \beta$ nun stets $\mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{V}$,[712] und $\mathcal{V}_{\alpha+1}$ setzt sich aus kontinuierlich unendlich vielen disjunkten α-dimensionalen Räumen zusammen, von denen $\mathcal{V}_\alpha$ einer ist.[713] So gilt alles, was in Theorem 5.23.2 über $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ und $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ gesagt wurde, auch für $\mathcal{V}_\alpha$ und $\mathcal{V}$; zusätzlich ist $\mathcal{V}_0 = \{0_{\mathbb{N}}\}$ und $\mathcal{V}_1 = \mathbb{R}$. Als Standardraum der komplexen Zahlen können wir nun $\mathbb{C} :\equiv \mathcal{V}_2$ definieren, $\mathcal{V}_3$ bildet einen euklidischen Raum $\mathcal{R}$, als Quaternionenraum definieren wir $\mathbb{H} :\equiv \mathcal{V}_4$, als Oktionenraum $\mathbb{O} :\equiv \mathcal{V}_8$. So haben wir die Teilklassenbeziehung

$$\underset{\{0_{\mathbb{N}}\}}{\mathcal{V}_0} \subseteq \underset{\mathbb{R}}{\mathcal{V}_1} \subseteq \underset{\mathbb{C}}{\mathcal{V}_2} \subseteq \underset{\mathcal{R}}{\mathcal{V}_3} \subseteq \underset{\mathbb{H}}{\mathcal{V}_4} \subseteq \cdots \subseteq \underset{\mathbb{O}}{\mathcal{V}_8} \subseteq \ldots \mathcal{V}_\omega \subseteq \ldots \mathcal{V}_{\mathfrak{c}} \subseteq \ldots \mathcal{V}$$

zwischen Räumen immer höherer Dimension etabliert, bis hin zu einem allumfassenden Raum $\mathcal{V}$ mit unvorstellbar vielen Dimensionen. Die Punkte von $\mathcal{V}_3$ könnten noch Punkte eines Anschauungsraumes $\mathcal{R}$ sein, die Punkte der in $\mathcal{V}_4$ liegenden «Parallelräume» von $\mathcal{V}_3$ aber gehen bereits über diesen hinaus. Anders ist es mit den nun zu besprechenden «uneigentlichen Punkten», die mit einem Anschauungsraum verknüpft sind, und diesen in einer anderen Weise transfinit erweitern.

---

708 Man beachte, dass $\mathbb{R}$ nach Definition 5.21.24 S. 275 eine Teilmenge von $\mathbb{U}$ ist.

709 Hierbei sei F formal definiert durch $F :\equiv \varepsilon\, X(\mathbb{R}^{\mathtt{ord}} \xrightarrow[\text{BIJ}]{X} \mathbb{U} \wedge \mathtt{Wb}(X/\,\mathbb{R}_1^{\mathtt{ord}}) = \mathbb{R} \wedge \mathtt{Wb}(X/\,\mathbb{R}_0^{\mathtt{ord}}) = \{0_{\mathbb{N}}\})$.

710 Denn $F/\,\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ ist Bijektion von $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ in $\mathcal{V}_\alpha$, so dass $\mathcal{V}_\alpha$ mit dem α-dimensionalen Raum $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ gleichmächtig ist, der wieder mit $\mathbb{R}^\alpha$ gleichmächtig ist.

711 Denn F ist eine Bijektion von der Unmenge $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ in $\mathcal{V}$, so dass $\mathcal{V}$ mit der Unmenge $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ gleichmächtig ist. Genauer muss dann $\mathcal{V}$ ebenso wie die Unmenge $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ zu den mit $\mathtt{On}$ gleichmächtigen „kleinsten“ Unmengen gehören (siehe Fußnote 706).

712 Denn wegen $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}} \subset \mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}} \subset \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ folgt $F/\,\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}} \subset F/\,\mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}} \subset F$, also $\mathtt{Wb}(F/\,\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}) \subset \mathtt{Wb}(F/\,\mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}}) \subset \mathtt{Wb}(F)$.

713 Denn nach 5.23.2 gibt es kontinuierlich unendlich viele disjunkte α-dimensionalen Räume, von denen $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ einer ist, die sich zu $\mathbb{R}_{\alpha+1}^{\mathtt{ord}}$ zusammensetzen; gehen wir von jedem solchen Raum R zu $\mathtt{Wb}(F/\,R)$ über, so bilden die $\mathtt{Wb}(F/\,R)$ kontinuierlich unendlich viele disjunkte α-dimensionale Räume, von denen $\mathcal{V}_\alpha$ einer ist, die sich zu $\mathcal{V}_{\alpha+1}$ ergänzen.

5.24 Unendlich ferne Punkte und transfinite Räume

Ich möchte in diesem und im folgenden Abschnitt einige Gedankenexperimente in einem Anschauungsraum $\mathcal{R}$ durchführen, deren Resultat sein wird, dass in der Vorstellung von $\mathcal{R}$ nicht nur die Punkte vorhanden sind, aus denen der Raum besteht (und die ich seine *eigentlichen Punkte* nenne), sondern dass diese Vorstellung die Existenz noch weiterer Punkte impliziert, die ich seine *uneigentlichen Punkte* nenne. Diese liegen entweder „außerhalb" von $\mathcal{R}$ *in unendlicher Ferne*, oder „innerhalb" von $\mathcal{R}$, und dann entweder „zwischen" den eigentlichen Punkten von $\mathcal{R}$ oder auch „innerhalb" dieser Punkte. Die Klasse *aller* (eigentlichen *und* uneigentlichen) Punkte, die einen Anschauungsraum begleiten, könnte nun noch weit mächtiger sein als eine kontinuierlich unendliche Menge.

Zu betonen ist, dass die uneigentlichen Punkte, auch wenn ihre Existenz aus den anschaulichen Gegebenheiten eines euklidischen Anschauungsraums zwingend zu folgen scheint, *nicht ohne weiteres als Realitäten in dem uns umgebenden wirklichen Raum gedeutet werden können*, und zwar deshalb nicht, weil noch nicht einmal klar ist, dass dieser wirkliche Raum überhaupt die Struktur eines euklidischen Raumes hat.[714] Denn die Brücke zwischen Anschauung und Wirklichkeit ist ja im Allgemeinen nur die, dass alles anschaulich Vorstellbare verwirklicht sein *kann* (aber nicht verwirklicht sein *muss*). Im Gegensatz zu den ebenfalls möglichen, aber unanschaulichen „Räumen" hat der Anschauungsraum aber den erkenntnistheoretischen Vorteil, dass seine Möglichkeit unmittelbar einsichtig ist, also nicht erst bewiesen werden muss. So geht die folgende Überlegung von einer evident möglichen Struktur aus[715] und versucht durch Plausibilitätsbetrachtungen einige nicht sofort evidenten, in dieser Struktur auf verborgene Weise vorhandenen Implikationen ans Licht zu bringen.

Man stelle sich einen Pfeil vor, der sich auf einer Geraden g in einem Anschauungsraum $\mathcal{R}$ von einem Punkt a aus nach rechts fortbewegt, indem er die Punkte der Halbgeraden $[a, \infty)$ von g durchläuft. Die Bewegung soll zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 (etwa zwischen 0 und 2 Uhr) stattfinden, und wir sagen, dass der Pfeil n *Einheiten von a entfernt ist* (wobei n eine Zahl eines gemäß Definition 5.21.16 S. 274 auf $[a, \infty)$ eingeführten Zahlenstrahlmodells $\mathcal{N}_a$ ist), wenn die Pfeilspitze mit dem Punkt n koinzidiert. Nun können wir uns vorstellen, dass die Bewegung des Pfeils so beschleunigt wird, dass seine Entfernung von a

in der Mitte m_1 zwischen t_1 und t_2 (also um 1:00 Uhr) genau eine Einheit,
in der Mitte m_2 zwischen m_1 und t_2 (also um 1:30 Uhr) genau 2 Einheiten,
in der Mitte m_3 zwischen m_2 und t_2 (also um 1:45 Uhr) genau 3 Einheiten usw. beträgt.

Diese Beschleunigung hat aber zur Folge, dass der Pfeil zum Zeitpunkt $t_2 = 2{:}00$ Uhr *jedes* Intervall $[a, n]$ (für natürliche Zahlen n) verlassen haben muss, so dass er sich zu diesem Zeitpunkt „unendlich weit" von a entfernt haben wird. Denn immer wenn er n Einheiten von a entfernt war, hat er ja diese Entfernung in der Mitte der noch verbleibenden Zeit zu t_2 auf $n + 1$ erhöht:

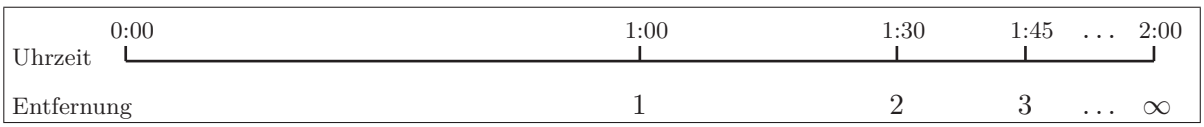


Abbildung 5.31: Das Erreichen unendlicher Entfernung in endlicher Zeit

[714] Die Struktur des wirklichen Raumes könnte vom Anschauungsraum abweichen, solange er nur eine ebenfalls mögliche Struktur besitzt (die dann ganz oder teilweise unanschaulich wäre). So wäre es denkbar, dass der wirkliche Raum (wie in der heutigen Physik vielfach angenommen wird) eine den euklidischen Axiomen widersprechende Struktur hat und aus diesem Grund z. B. endlich sein könnte.

[715] Unsere Ausgangsbasis besteht allerdings nicht nur aus den in Abschnitt 5.21 vorgestellten geometrischen Axiomen, sondern schließt *die ganze anschauliche Gegebenheit eines Anschauungsraums* und damit auch schwer axiomatisierbare Begriffe wie Zeit und Bewegung ein. Daher würde auch dann, wenn der wirkliche Raum die euklidischen Axiome erfüllen würde, noch nicht zwingend folgen, dass die uneigentlichen Punkte wirklich existieren.

Wegen Theorem 5.21.18 müsste es nun jedoch immer ein n geben, so dass der Pfeil *weniger* als n Meter von a entfernt ist, *solange der Pfeil sich im selben euklidischen Raum befindet*. Folglich kann er sich nun nicht mehr in dem selben euklidischen Raum $\mathcal{R}$ befinden, dem a angehört.[716] Andererseits befindet er sich aber dennoch in einem euklidischen Raum, denn jeder in der Anschauung gegebene Körper befindet sich jederzeit in einem solchen. Will man also den Vorgang nicht als unmöglich oder sein Resultat als vollkommen unvorhersehbar einstufen, so scheint die einzig natürliche Schlussfolgerung die zu sein, dass der Pfeil sich nun *in einem anderen, „rechs" von $\mathcal{R}$ befindlichen euklidischen Raum $\mathcal{R}_r$* befindet. So gelangen wir also zu der Vorstellung, dass „rechts in unendlicher Entfernung" von a ein weiterer Anschauungsraum $\mathcal{R}_r$ existiert, den ein Pfeil durch die beschriebene beschleunigte Bewegung erreichen kann.

Dabei müsste der Pfeil exakt zum Zeitpunkt t_2 durch einen Sprung in den anderen Raum gelangen, wobei der Ort, an dem er in jenem Raum dann auftaucht, in keiner Weise durch seine Flugbahn in $\mathcal{R}$ festgelegt sein kann. Denn da es keine „Grenze" zwischen den beiden Räumen gibt, die er passieren könnte, ist auch kein Grund vorhanden, dass wenn verschiedene Pfeile die genannte Bewegung durchführen, alle an *derselben* Stelle in den Raum $\mathcal{R}_r$ eindringen müssen.[717] Es ist noch nicht einmal sicher, dass sie im selben Raum $\mathcal{R}_r$ herauskommen. Denn wenn die Überlegung, welche die Existenz eines Raumes $\mathcal{R}_r$ rechts von $\mathcal{R}$ stützt, richtig war, muss es gleich unendlich viele Räume geben, die man von a aus durch eine Bewegung nach rechts erreichen kann (weil ein im Raum $\mathcal{R}_r$ beschleunigt nach rechts fliegender Pfeil diesen ebenfalls verlassen und so in einen dahinter kommenden dritten Raum gelangen kann usw.), aber in der Kette aller dieser Räume braucht es keinen *ersten* zu geben, der dem Raum $\mathcal{R}$ unmittelbar benachbart wäre (ähnlich wie es auch keinen *Punkt* gibt, welcher unmittelbarer Nachbar des Punktes a ist), und das folgende Gedankenexperiment scheint sogar positiv zu zeigen, dass es rechts von $\mathcal{R}$ tatsächlich *keinen unmittelbar benachbarten* Nachbarraum gibt.

Man stelle sich vor, dass ein Beobachter eine beschleunigte Bewegung der genannten Art ausführt, aber nicht entlang der Geraden, sondern weg von ihr: also eine Bewegung, die ihn vom Punkt a aus senkrecht von der Geraden weg in unendliche Ferne führt. Dann rücken vom fliegenden Pfeil aus gesehen die Punkte der Geraden immer enger zusammen, indem sie auf den Punkt a zueilen. Machen wir die Gerade durch Markierung von Ganzzahlpunkten $\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ zu einer Zahlengeraden, deren Nullpunkt 0 der Punkt a ist, so wird aus einer gewissen Entfernung betrachtet das Intervall $[-2, 2]$ im Gesichtsfeld auf die Position kommen, die zuvor das Intervall $[-1, 1]$ einnahm. Dasselbe gilt bei weiterer Vergrößerung auch für das Intervall $[-3, 3]$ und früher oder später für jedes vorgegebene Intervall $[-n, n]$. Entfernt man sich daher unendlich weit von der Geraden, so rückt *die ganze Gerade* in den Bereich ein, den vorher das um a zentrierte Intervall $[-1, 1]$ abdeckte, und weil die Länge dieses Intervalls beliebig klein sein kann, muss die Gerade so weit zusammengeschrumpft erscheinen, dass sie in *jedes* noch so kleine Intervall um den Punkt a herum hineinpasst, also letztlich nur noch den Ort einnimmt, den zuvor der Punkt a allein innehatte. Da aber die Gerade „den ganzen Raum durchmisst", haben wir damit plausibel gemacht, *dass aus unendlicher Entfernung betrachtet der ganze Raum $\mathcal{R}$ punktförmig erscheint*. Aus dieser Perspektive würden nun jedoch rechts und links von $\mathcal{R}$ weitere Punkte zu sehen sein, die offenbar den von $\mathcal{R}$ verschiedenen weiteren Anschauungsräumen entsprechen. Also kann man den evidenten Satz, dass ein Punkt keine

[716] Bei Earman, *Determinism* S. 34–40 werden derartige beschleunigte Bewegungen, die unser Universum durch Entweichen ins Unendliche verlassen oder auch umgekehrt aus dem Unendlichen ins Universum eindringen, im Rahmen der Newtonschen Mechanik für möglich gehalten. Diese Möglichkeit stellt nach Earman den Determinismus der klassischen Mechanik in Frage.

[717] Dass der Pfeil an einen Ort gelangt, der durch seine Flugbahn nicht festgelegt ist, scheint metaphysisch problematisch zu sein, wenn man an das Kausalprinzip denkt (siehe auch Fußnote 716). Diese Problematik stellt jedoch die anschauliche Möglichkeit des Vorgangs nicht in Frage und braucht uns deshalb hier nicht zu beschäftigen. Ich komme darauf in Abschnitt 11.2 zurück, wo ich zeige, dass unter theologischen Prämissen derartige Vorgänge ohne Verletzung des Kausalprinzips denkbar sind.

unmittelbar benachbarten Punkte hat, direkt auf Räume übertragen: *Es gibt Räume rechts von $\mathcal{R}$, aber keiner von ihnen ist $\mathcal{R}$ unmittelbar benachbart.*

So können wir nur sagen, dass der Punkt, an dem unser Pfeil im Zeitpunkt t_2 auftaucht, *irgendein* von a aus unendlich weit rechts gelegener Punkt in *irgendeinem* in dieser Richtung befindlichen Raum $\mathcal{R}_r$ sein muss. Die Gerade g „zeigt" nach rechts in die Richtung, in welcher $\mathcal{R}_r$ irgendwo in einer Kette unendlich vieler genau hintereinander stehender unendlich ferner Räume liegen muss. Ebenso „zeigt" g nach links auf eine Kette unendliche ferner Räume, und die beiden Raumketten links und rechts von g bilden zusammen mit dem Raum $\mathcal{R}$ eine Gesamtkette, die man als eine übergeordnete Gerade in einem übergeordneten *transfiniten Raum* $\widehat{\mathcal{R}}$ auffassen kann, dessen „Punkte" Anschauungsräume sind. Diesen Raum bekommt man zu sehen, wenn man eine Perspektive einnimmt, in der alles unendlich verkleinert erscheint.

$\widehat{\mathcal{R}}$ und alle diese mit $\widehat{\mathcal{R}}$ gleichartigen transfiniten Räume mögen *transfinite Räume* 1*-ter Art* heißen. Jeder solche Raum $\widehat{\mathcal{R}}$ kann aus gleichen Gründen (indem man in ihm eine beschleunigte, aus ihm hinausführende Bewegung betrachtet) als „Punkt" eines noch größeren *transfiniten Raumes* 2*-ter Art* gelten usw., so dass es schließlich für jede natürliche Zahl n *transfinite Räume n-ter Art* gibt. Damit wäre unsere Argumentation mit beschleunigten Bewegungen der genannten Art erschöpft. Wenn man es jedoch für möglich hält, dass es zu jedem Raumgefüge, deren Punktgesamtheit noch eine Menge ist, eine Bewegung gibt, die eine solche Punktgesamtheit in begrenzter Zeit hinter sich lassen kann, so erhielte man eine noch umfassendere Raumhierarchie von transfiniten Räumen α-ter Art für jede Ordinalzahl α, und das ganze Raumgefüge würde mindestens ebenso viele gewöhnliche Punkte enthalten wie es Ordinalzahlen gibt, und damit eine Unmenge von Punkten umfassen. Ich halte das für möglich, wenn auch die Evidenz hierfür nicht so klar gegeben ist wie für das mögliche Verlassen eines einzelnen euklidischen Raumes, das wir durch eine klar erfassbare wohldefinierte Bewegung plausibel machen konnten. Sowohl die von einem Anschauungsraum $\mathcal{R}$ aus in unendlicher Ferne liegenden Räume als auch deren Punkte können wir nun zu den *uneigentlichen* Punkten von $\mathcal{R}$ rechnen, die zu den eigentlichen Punkten von $\mathcal{R}$ hinzukommen.

Die Idee, in „unendlich großer Ferne" gelegene Objekte zu betrachten und in geometrische Überlegungen einzubeziehen, geht ursprünglich auf Girard Desargues (1593–1661) zurück, geriet dann in Vergessenheit und wurde von Jean Victor Poncelet (1788–1867) wieder aufgegriffen, der 1822 in seinem *Traité des propriétés projectives des figures* der auf dieser Idee fußenden „projektiven Geometrie" zum Durchbruch verhalf. Desargues und Poncelet nahmen an, dass zwei parallele Geraden sich in einem unendlich fernen Punkt schneiden, was als Axiom der projektiven Geometrie gilt.[718] Eine naive Vorstellung dieses Sachverhalts würde implizieren, dass die Geraden auf den unendlich fernen Punkt treffen und dieser ein Punkt derselben Art ist wie ein Punkt im euklidischen Raum. Obige Überlegungen machen demgegenüber klar, dass dies nicht den aus der Anschauung entspringenden Gegebenheiten entspricht.[719] Vielmehr ist jeder „unendlich ferne Punkt" nur eine Richtung, in der unendlich viele hintereinander stehende euklidische Räume aufeinander folgen.

[718] Desargues hatte 1639 für parallele Geraden die Sprechweise eingeführt, dass diese sich an einem unendlich fernen Ort treffen (Desargues, *Rencontres du Cône avec un Plan* Ausgabe Taton S. 100f). Ähnlich heißt es bei *Poncelet*: „Les lignes parallèles concourent en un point unique à l'infini." (Poncelet, *Propriétés projectives* Nr. 103 S. 52). Außerdem erklärte Poncelet, dass man sich alle unendlich fernen Punkte einer Ebenen als auf einer einzigen unendlich fernen Geraden befindlich vorstellen kann: „les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement comme distribués sur une ligne droite unique, située elle-même à l'infini sur ce plan." (ebd. Nr. 107 S. 53; vgl. Nr. 96 S. 50). Diese Gerade bezeichnete Poncelet (ebd. Nr. 97 S. 50) als einen „rein metaphysischen" Begriff („notion pure métaphysique"), womit er einen irgendwie untergeordneten Grad an Realität meinen dürfte. Zur modernen Darstellung der unendlich fernen Objekte in der projektiven Geometrie vgl. Hilbert und Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie* S. 101–114.

[719] Unanschaulich ist auch der Grundsatz der projektiven Geometrie, dass sich zwei parallele Geraden nur in *einem* und nicht in zwei unendlich fernen Punkten treffen (vgl. Maor, *Infinity* S. 135 mit Fußnote 2).

5.25 Infinitesimalien und hyperreelle Zahlen

Stellen wir uns einen Punkt P auf einer Geraden g in einem Anschauungsraum $\mathcal{R}$ vor, so können wir in einem Gedankenexperiment versuchen, diesen Punkt genauer in den Blick zu bekommen, indem wir das Bild „vergrößern". Hiermit ist natürlich keine optische, sondern eine gedankliche Operation gemeint. Bei der n-fachen Vergrößerung wandern im imaginierten Gesichtsfeld alle Punkte der Geraden, die sich rechts und links von der P befinden, auf eine neue Position rechts bzw. links von P, die n mal so weit von P entfernt erscheint wie zuvor. Stellen wir uns nun eine fortlaufend anwachsende Vergrößerung vor, die in der Mitte m_2 zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 eine 2-fache, in der Mitte m_3 zwischen m_2 und t_2 eine 3-fache Vergrößerung ist usw., so resultiert zum Zeitpunkt t_2 eine „unendliche Vergrößerung", bei der jeder Punkt, der sich links oder rechts von P sich befindet, eine unendliche Entfernung von P erreicht hat. Es ist schwer zu sagen, was nun zu sehen wäre. Ich sehe drei Alternativen, die vielleicht alle reale Möglichkeiten darstellen und demnach drei „Modelle" realisierbarer Anschauungsräume wären.

1. Alternative: Existenz einer infinitesimalen Substruktur mit ausgedehnten Punkten

Da sich nach dem beschriebenen Vergrößerungsvorgang alle von P verschiedenen Punkte unendlich weit von P entfernt haben, könnte man zu dem Schluss kommen, dass man *nur noch P sehen würde*, d. h. P würde den ganzen Anschauungsraum ausfüllen, den man nun vor sich hätte. Punkte wären dann nicht „ungeteilt", wie EUKLID meinte, sondern jeder Punkt wäre ein unendlich kleiner Raum, der ohne unendliche Vergrößerung als „punktförmig" erscheint, ähnlich wie die in Abschnitt 5.24 betrachteten unendlich fernen Räume als unendlich ferne „Punkte" in Erscheinung traten. Die gewöhnlichen Punkte sollten man dann als *Punkte oder infinitesimale Räume* 1*-ter Art* bezeichnen, weil sich die Punkte in diesen infinitesimalen Räumen aus denselben Gründen (bei nochmaliger unendlicher Vergrößerung) ebenfalls als Räume offenbaren würden, die man *Punkte oder infinitesimale Räumen* 2*-ter Art* nennen könnte usw. So gäbe es für jede natürliche Zahl n Räume (= Punkte) n-ter Art. Diese *Hierarchie der infinitesimalen Räume* wäre das genaue Gegenstück zu der in Abschnitt 5.24 diskutierten *Hierarchie der transfiniten Räume*. Außer den infinitesimalen Räumen n-ter Art für natürliche Zahlen n könnte es auch solche α-ter Art für jede Ordinalzahl α geben; um diese Räume sichtbar zu machen, müssten allerdings wesentlich „stärkere" Vergrößerungen denkbar sein als die unendlichen Vergrößerungen der bisher diskutierten (und einigermaßen klar durchschaubaren) Art. Die *eigentlichen* Punkte des Anschauungsraums $\mathcal{R}$ sind hier diejenigen 1-ter Art, alle anderen sind *uneigentliche* Punkte, die sich „in" den eigentlichen befinden.

2. Alternative: Existenz einer infinitesimalen Substruktur mit ausdehnungslosen Punkten

Hält man an der Vorstellung fest, dass Punkte unausgedehnt sind, so kann man bei dem beschriebenen Gedankenexperiment auf den Gedanken kommen, dass jetzt links und rechts von P *neue Punkte sichtbar werden müssen*, nachdem die alten sich unendlich weit von P entfernt haben. Die neuen Punkte müssen dann einen von 0 verschiedenen, aber dennoch unendlich kleinen Abstand von P haben, weshalb sie ohne unendliche Vergrößerung von P nicht zu unterscheiden waren. Bei nochmaliger unendlicher Vergrößerung sollten abermals neue Punkte auftauchen usw. Was ohne unendliche Vergrößerung als Punkt erscheint, ist also eigentlich eine Schar von Punkten. Dieses Modell unterscheidet sich von dem vorhergehenden dadurch, dass es hier tatsächlich unausgedehnte Punkte gibt, auch wenn ein einzelner Punkt niemals *isoliert* in den Blick geraten kann. Ein weiterer Unterschied ist, dass es hier nicht artverschiedene *Punkte*, sondern artverschiedene unendlich kleine *Distanzen* zwischen den Punkten gibt, die zu ihrer Sichtbarmachung unterschiedliche unendliche Vergrößerungen erforderlich machen. Schließlich sind infinitesimal kleine Gebiete, die ohne unendliche Vergrößerung als Punkte erscheinen, aus unendlich vielen unausgedehnten Punkten zusammengesetzt, von denen wir jeweils genau einen als eigentlichen Punkt betrachten, der das

Gebiet repräsentiert. Die übrigen sind *uneigentliche* Punkte, die sich „zwischen“ den eigentlichen befinden. Die eigentlichen Punkte sind hier allerdings nicht *von Natur aus* vor den uneigentlichen ausgezeichnet: Wir müssen sie im Interesse der Mathematik *willkürlich* auswählen.

3. Alternative: Nichtexistenz einer infinitesimalen Substruktur

Man kann die Konsequenz der beiden letzten Modelle, dass es innerhalb von $\mathcal{R}$ uneigentliche Punkte gibt, ablehnen. Dann muss man entweder den beschriebenen Vergrößerungsvorgang als unmöglich einstufen, oder behaupten, dass das Resultat mit dem Vorgang nicht kausal zusammenhängt, so dass z. B. wieder das unvergrößerte Bild sichtbar werden würde.

Sofern man die erste und zweite Alternative nicht verwirft, gibt es eine realistische Interpretation für die ≪unendlich kleinen Größen≫ oder ≪Infinitesimalien≫, welche im 17. Jahrhundert von Newton und Leibniz in die Mathematik eingeführt wurden. Die „Infinitesimalrechnung“ wurde unter anderem in der Physik mit großem Erfolg eingesetzt. So konnte man die *Momentangeschwindigkeit* eines Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt t erst mit Methoden der Infinitesimalrechnung definieren, nämlich als den ≪Differentialquotienten≫ dx/dt, wobei dx und dt für ein unendlich kleines Zeitintervall bzw. die darin zurückgelegte unendlich kleine Strecke steht. Wie Newton sich einmal etwas mystisch ausdrückte, handelt es sich um „die letzten Verhältnisse dahinschwindender Größen“,[720] genauer um dasjenige Größenverhältnis, „mit“ welchem die Größen verschwinden, nicht aber das *vor* oder *nach* dem Verschwinden stattfindende.[721] Es ist klar, dass derartige Aussagen Kontroversen und Protest hervorrufen mussten. Am bekanntesten ist George Berkeleys „an einen ungläubigen Mathematiker gerichtete Abhandlung“ *The Analyst* von 1734, in welcher er den Mathematikern seiner Zeit vorwarf, die Glaubensgeheimnisse als unverständliche Metaphysik zu schmähen, während sie ihre eigene Wissenschaft auf höchst unklare Begriffe gründen. Die Infinitesimalien seien „weder endliche Größen noch unendlich kleine und doch auch nicht nichts“, und so meinte Berkeley, man könne von „Geistern abgeschiedener Größen“ reden.[722] Es war das Verdienst von Karl Weierstrass (1815–1897), eine Infinitesimalrechnung ohne Infinitesimalien aufzubauen, wie sie heute noch betrieben wird. Er ersetzte die rätselhaften Größen durch Grenzwertprozesse: Sukzessionen von stets endlichen, aber immer kleiner werdenden Größen, also Prozesse, die „ins Unendliche streben“, ohne es je zu erreichen. So wurden die Infinitesimalien aus der Mathematik verbannt, und auch Georg Cantor, der sich so vehement für die transfiniten, unendlich großen Zahlen einsetzte, hielt das unendlich Kleine für widersprüchlich und glaubte, seine Unmöglichkeit beweisen zu können.[723]

Dennoch erlebten die Infinitesimalien im 20. Jahrhundert eine „Wiedergeburt“. Nachdem der amerikanische Philosoph und Logiker Charles Sanders Peirce (1839–1914) die Zusammensetzung des Kontinuums aus Infinitesimalien mit „physischer“ Realität behauptet hatte,[724] hat 1960 Abraham Robinson (1918–1974) die Infinitesimalien in logisch einwandfreier Weise als Objekte definiert,

---

720 Newton, *Principia Mathematica* Buch 1 Kap. 1 Lemma 11 Scholium, Werke Band 2 S. 40, Ausgabe Schüller S. 58: „ultimae quantitatum evanescentium rationes“.

721 Newton, *Principia Mathematica* Buch 1 Abschnitt 1 Lemma 11 Scholium, Werke Band 2 S. 40, Ausgabe Schüller S. 58: „rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt“.

722 Berkeley, *Analyst* Nr. 35, Werke Band 4 S. 89 (vgl. Ausgabe Breidert S. 121): „May we not call them the ghosts of departed quantities?“

723 Siehe Fußnote 1164 auf S. 620.

724 Vgl. hierzu Dauben, *C. S. Peirce's Philosophy* mit zahlreichen Literaturangaben im Werk von Peirce; siehe z. B. Peirce, *Infinitesimals*. Peirce glaubte nicht, dass sich aus distinkten Punkten ein Kontinuum zusammensetzen lässt und ersetzte darum jeden Punkt des Kontinuums durch eine infinitesimale Punktfolge, jeden Punkt dieser Folge wieder durch eine infinitesimale Punktfolge höherer Art usw., so dass sich eine nie endende Hierarchie von immer „kleineren“ Infinitesimalien ergibt. Demnach hat Peirce sich zu der oben beschriebenen zweiten Alternative bekannt. Das ganze Kontinuum ist nach Peirce sogar eine inkonsistente, absolut unendliche Vielheit.

welche die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu einer größeren Menge $\mathbb{R}^*$ erweitern:[725] Die gewöhnlichen reellen Zahlen nannte er *Standard-Zahlen*, die hinzugefügten Elemente *Non-Standard Zahlen*, und beide zusammen, also alle Elemente von $\mathbb{R}^*$, *hyperreelle Zahlen*. Robinson neigte allerdings dem Formalismus zu und sah die Non-Standard-Zahlen nur als „nützliche Fiktionen“ an.[726] Die Erweiterung der Menge $\mathbb{R}$ zur Menge $\mathbb{R}^*$ der hyperreellen Zahlen ist vergleichbar mit jenen vertrauten Erweiterungen, die von $\mathbb{N}$ zunächst zu $\mathbb{Z}$, dann weiter zu $\mathbb{Q}$ und schließlich zur Menge $\mathbb{R}$ führen. Dabei bleiben die üblichen Rechengesetze gültig,[727] aber $\mathbb{R}^*$ hat zusätzlich die folgende Eigenschaft: Zu jeder reellen Zahl x gibt es unendlich viele Non-Standard-Zahlen, die zwischen x und *jeder* größeren reellen Zahl liegen; und ebenso unendlich viele zwischen x und *jeder* kleineren reellen Zahl. Diese Zahlen heißen zu x *unendlich nahe benachbart* und bilden zusammen mit x die sog. *Monade* der reellen Zahl x. Die zur Monade von 0 gehörenden Zahlen heißen *unendlich klein*. Das sind die eigentlichen Infinitesimalien. Außerdem gibt es hyperreelle Zahlen, die größer als jede reelle Zahl sind (*unendlich große positive Zahlen*) und solche, die kleiner als jede reelle Zahl sind (*unendlich große negative Zahlen*). Wie zu den übrigen Zahlentypen gibt es auch zu den hyperreellen Zahlen verschiedene strukturierte Mengen, die als „Modelle“ für diese Zahlen dienen. Die Mengen, die dabei als $\mathbb{R}^*$ fungieren können, sind mindestens kontinuierlich unendlich, aber nach oben hin gibt es für ihre Mächtigkeit keine Grenze. Wie aufgrund der Überlegungen in diesem und im vorhergehenden Abschnitt einleuchtet, könnten die hyperreellen Zahlen aber auch mit realen Punkten identifiziert werden, die durch einen Anschauungsraum als dessen eigentliche und uneigentliche Punkte gegeben sind.

[725] Vgl. Landers und Rogge, *Nichtstandard Analysis* und Robinson, *Non-Standard Analysis*. Robinson teilt ebd. S. XIII mit, dass er seine Ideen erstmals in einem Seminarvortrag an der Princeton University im November 1960 vorgetragen hat.

[726] Vgl. Robinson, *Non-Standard Analysis* S. 279–282.

[727] In moderner Terminologie heißt dies: $\langle \mathbb{R}^*, +, \cdot, < \rangle$ ist ein ≪angeordneter Zahlenkörper≫. Eine Eigenschaft von $\mathbb{R}$, die bei der Erweiterung verloren geht, ist aber die „Vollständigkeit“ im Sinne des Vollständigkeitsaxioms 5.21.10.

5.26 Das Kontinuum als Unmenge und die surrealen Zahlen

Wir haben in den Abschnitten 5.24 und 5.25 gesehen, dass es uneigentliche Punkte nicht nur außerhalb, sondern auch in oder zwischen den Punkten eines euklidischen Raumes geben kann. Die Klasse dieser Punkte könnte sogar inkonsistent unendlich sein. Die kontinuierlich unendliche Menge, die aus den eigentlichen Punkten des euklidischen Raumes besteht, wäre dann nur ein verschwindend kleiner Bruchteil und sozusagen bloß die oberflächliche Hülle der „unter dieser Hülle verborgenen" Unmenge von Punkten, die mit einem wirklichen Kontinuum verbunden ist.[728] Dann könnte man auch der wohl umfassendsten Zahlenkonzeption, die es bislang gegeben hat, nämlich den so genannten *surrealen Zahlen*,[729] eine realistische Deutung geben. Die Klasse dieser in den 1970er Jahren vom John Horton Conway eingeführten Zahlen[730] wird mit $\mathbb{S}$ oder $\mathtt{No}$ bezeichnet. $\mathtt{No}$ enthält sämtliche Ordinalzahlen,[731] ist eine mit $\mathtt{On}$ gleichmächtige Unmenge,[732] und ist mit einer erweiterten Addition, Subtraktion und Kleinerrelation ein sog. angeordneter Zahlenkörper sowie ein Modell der hyperreellen Zahlen. So kann man (wie in jedem Modell der hyperreellen Zahlen) 1 durch eine unendliche Zahl dividieren und erhält eine infinitesimale Zahl. Aber mit den Conwayschen Zahlen kann man 1 nicht nur durch abzählbar unendliche, sondern durch *beliebige* unendliche Ordinalzahlen teilen, wodurch man unvorstellbar viel kleinere infinitesimale Zahlen erhält als $\frac{1}{\omega}$. Conway erweitert $\mathtt{No}$ noch um gewisse uneigentliche Zahlen, die er „Improprietäten" nennt und auf welche er seine Rechenregeln ebenfalls anwendet; hierzu gehört auch die Ordinalzahl $\Omega = \mathtt{On}$ und eine ≪Zahl≫, welche er mit dem traditionellen Symbol ∞ für das potentiell Unendliche bezeichnet, und mit welcher er die „Lücke zwischen den reellen und positiven infiniten Zahlen" ausfüllen will.[733] Dabei ergeben sich eine Reihe

---

728 Man muss dann scharf unterscheiden zwischen den eigentlichen Punkten, aus denen das Kontinuum *besteht* oder die ein Kontinuum *bilden* (und deren Anzahl stets kontinuierlich unendlich ist), und den uneigentlichen Punkten, welche die eigentlichen *begleiten* und mit dem Kontinuum *verbunden sind*.

729 Das Wort „surreal" ist aus dem Französischen abgeleitet und bedeutet „über der Wirklichkeit".

730 Nachdem Conway seine Ideen seit etwa 1970 zunächst mündlich vorgetragen hat, veröffentliche 1974 Donald E. Knuth erste Ergebnisse in Form seiner „mathematischen Novelle" *Surreal Numbers*, in der zwei auf eine Insel verschlagene Studenten eine Inschrift mit Conways rekursiver Definition der surrealen Zahlen entdecken und daraus Folgerungen ableiten. 1976 veröffentlichte Conway selbst eine Darstellung seiner Zahlen in *Numbers and Games*. Eine noch präzisere Darstellung ist das 1986 veröffentlichte Buch von Gonshor mit dem Titel *An introduction to the theory of surreal numbers*. Für die surrealen Zahlen gibt es verschiedene konkrete Modelle. Am einfachsten scheint mir das Modell zu sein, mit dem Gonshor arbeitet: Hier ist eine surreale Zahl definiert als eine Funktion von einer Ordinalzahl in eine zweielementige Klasse $\{+,-\}$, vorstellbar als eine (zulässigerweise transfinite) Folge zweiter Symbole $+$ und $-$. Statt $+$ und $-$ kann man auch 1 und 0 nehmen. Dann sind surreale Zahlen Funktionen von einer Ordinalzahl α in die Menge $\{0,1\}$, d. h. in die Ordinalzahl 2.

731 Genauer kann man Elemente von $\mathtt{No}$ als natürliche Repräsentanten der Ordinalzahlen betrachten. Fassen wir eine surreale Zahl als eine Funktionen von einer Ordinalzahl α in $\{0,1\}$ auf (vgl. Fußnote 730), so können wir als natürlichen Repräsentanten der Ordinalzahl α die Funktion nehmen, die alle Elemente von α auf 0 wirft.

732 Die Funktion, die jede Ordinalzahl α auf die sie repräsentierende surreale Zahl wirft, ist offenbar eine Injektion von $\mathtt{On}$ in $\mathtt{No}$, also gilt $\mathtt{On} \precsim \mathtt{No}$. Dass umgekehrt auch $\mathtt{No} \precsim \mathtt{On}$ gilt, kann durch Heranziehen des in Abschnitt 5.29 beschriebenen „Universums" $\mathbb{V}$ gezeigt werden (vgl. 5.262 S. 328): Jede surreale Zahl ist als Funktion von einer Ordinalzahl α in $\{0,1\}$ wegen Satz 5.206 S. 308 eine Funktion von einem Element α von $\mathbb{V}$ in $\mathbb{V}$ und wegen Satz 5.270 S. 329 selbst ein Element von $\mathbb{V}$, daher gilt $\mathtt{No} \subseteq \mathbb{V}$, wegen Satz 5.89 S. 200 also $\mathtt{No} \precsim \mathbb{V}$, und da nach Satz 5.218 S. 309 $\mathbb{V} \sim \mathtt{On}$ ist, folgt mit Theorem 5.15.4 S. 201, dass $\mathtt{No} \precsim \mathtt{On}$. Mit Theorem 5.15.5 folgt schließlich $\mathtt{No} \sim \mathtt{On}$.

733 Conway, *Numbers and Games* S. 31f. Formal sind die Improprietäten nach Art der so genannten ≪Dedekindschen Schnitte≫ gebildete Paare $\langle L, R\rangle$ von Klassen, wobei erstens L und R disjunkte Teilklassen von $\mathtt{No}$ sind, zweitens jedes Element von L kleiner als jedes Element von R ist und drittens die Vereinigung beider Klassen die Unmenge $\mathtt{No}$ ergibt. Das letztere bedeutet natürlich, dass mindestens eine der beiden Klassen eine Unmenge sein muss, weshalb Conway meint, dass $\langle L, R\rangle$ „in den meisten Mengentheorien überhaupt kein erlaubtes Objekt" sei: weder eine Menge noch eine Unmenge. Auf unsere Mengenlehre trifft dies nicht zu, denn wir haben ja Paare mit Unmengen als Komponenten eingeführt, die selbst Unmengen sind (Definition 5.10.32 S. 129).

interessanter Beziehungen zwischen den drei fundamentalen Unendlichkeitsbegriffen ω, Ω und ∞, etwa $\infty = \sqrt[\Omega]{\omega}$. Um sich $\mathtt{No}$ einigermaßen vorstellen zu können, kann man die Tatsache nutzen, dass diese Klasse mit ihrer Kleinerrelation eine vollgeordnete Klasse ist. Übernimmt man daher den im letzten Abschnitt beschriebenen PEIRCEschen Realismus hinsichtlich der Infinitesimalien auf einer Geraden, und hält eine transfinite Fortsetzung dieser Geraden in beiden Richtungen für möglich, so könnte man sämtliche surrealen Zahlen als Punkte auf dieser sowohl im Großen wie auch im Kleinen ins Unermessliche reichenden Super-Zahlengeraden unterbringen.

CONWAY erweitert $\mathtt{No}$ noch durch imaginäre und gemischt-komplexe surreale Zahlen zu einem komplexen Körper, den er $\mathtt{No}[i]$ nennt,[734] den man sich als eine infinitesimal dicht angefüllte und transfinit ausgedehnte Zahlenebene vorstellen könnte, was also eine Verallgemeinerung der komplexen Zahlen darstellt. Man könnte natürlich in dieser Richtung weitermachen und entsprechende höherdimensionale Zahlen– und Vektorräume $\mathtt{No}^2, \mathtt{No}^3, \ldots \mathtt{No}^\omega, \ldots$ betrachten, und nach den bisherigen Ausführungen erscheint es als denkbar, dass mit einem Anschauungsraum so viele eigentliche und uneigentlichen Punkte verbunden sind, dass diese insgesamt mit den Elementen von $\mathtt{No}^3$ identifiziert werden könnten.

Bemerkung. Was hier und in Abschnitten 5.24 und 5.25 am Beispiel des Raumkontinuums über uneigentliche Punkte gesagt wurde, dürfte auch für andere Kontinua gelten, insbesondere für die Zeit: Gibt es räumliche Infinitesimalien, so wahrscheinlich auch zeitliche. Hinsichtlich der Zeit scheint es ein besonderes Argument dafür zu geben, dass alle greifbaren „Zeitpunkte“ in Wirklichkeit infinitesimale Zeitgeraden sind. Wie die Untersuchung der Zeit in Abschnitt 4.4.2 gezeigt hat, ist Zeit durch Veränderung zu charakterisieren. Demnach kann man zwar bereits dann von einer gewissen „Zeitlichkeit“ reden, wenn bloß zwei diskrete, aufeinander folgende Zustände existieren, aber ein „vollkommenes“ zeitliches Universum, das dem Ideal *ständiger* Veränderung vollkommen Rechnung trägt, wäre nur ein solches, in dem überhaupt keine Stelle angebbar ist, an der sich nichts verändert. Eine solche „vollkommene“ Zeitlichkeit setzt also voraus, dass jeder angebbare Zeitpunkt wieder eine infinitesimale Zeitgerade ist.

Als Abschluss unserer Überlegungen zum Kontinuum soll nun noch ein Blick auf die altbekannten Zenonischen Paradoxien geworfen werden, die seit jeher im Brennpunkt der philosophischen Diskussionen zum Thema „Kontinuum und Unendlichkeit“ gestanden haben.

[734] Vgl. CONWAY, *Numbers and Games* § 4 S. 35.

5.27 Zenons Paradoxien

Die vier Paradoxien Zenons von Elea (um 490–430 v. Chr.) sind die folgenden:[735]

Das *erste Paradoxon* mit dem Titel *die Nicht-Bewegung* besteht darin, dass ein sich von A nach Z bewegender Gegenstand zunächst die Mitte M zwischen A und Z erreichen muss, dann die Mitte M' zwischen M und Z usw. So hat er unendlich viele Aktionen vor sich und erreicht Z niemals.

Das *zweite Paradoxon* heißt *Achilles*: Will ein Läufer (wie der homerische Achilles) ein vor ihm her laufendes langsameres Objekt (etwa eine Schildkröte) einholen, muss er zuerst dorthin gelangen, von wo aus die fliehende Schildkröte losgezogen war; derweil hat aber die Schildkröte wieder einen Vorsprung, so dass Achilles abermals zuerst dorthin kommen muss, wo sie jetzt ist usw. Da also unendlich viele Aktionen zum Einholen der Schildkröte notwendig sind, holt er sie niemals ein.

Das *dritte Paradoxon*, dasjenige *vom fliegenden Pfeil*, ist das tiefgründigste. Ein fliegender Pfeil ist während eines jeden Zeitpunktes unbewegt, also bewegt er sich nie.

Das *vierte Paradoxon* mit der Bezeichnung *von den auf dem Rennplatz bewegten Massen* ist ungenau und vielleicht sogar fehlerhaft überliefert, so dass sich kein klarer Sinn ergibt.

Die finitistische und die infinitistische Lösung der ersten beiden Paradoxien

Die *ersten beiden Paradoxien* beruhen auf dem Grundsatz: *Es ist unmöglich, das Unendliche zu durchlaufen.*[736] Sie machen geltend, dass im Widerspruch zu diesem Grundsatz jeder bewegte Gegenstand, der sich von A nach B bewegt, unendlich viele Prozesse durchlaufen müsste. Es gibt zwei Strategien zur Auflösungen dieser Paradoxien: Entweder man verneint, dass hier wirklich unendlich viele Aktionen aufeinander folgen, oder man bejaht die Möglichkeit, „das Unendliche zu durchlaufen“. Die erste Alternative ist der *finitistische*, die zweite der *infinitistische* Lösungsversuch.

Der *finitistische Lösungsversuch*[737] basiert auf der These, dass es trotz des gegenteiligen Anscheins nur endlich viele Raum– und Zeitpunkte gibt. Man stellt sich dann vor, dass die Bewegung „gequantelt“ ist, d. h. sich in Sprüngen vollzieht, die so klein sind, dass sich der Anschein einer stetigen Bewegung ergibt.[738] Die Richtigkeit dieser These vorausgesetzt, könnte Achilles die Schildkröte überholen, indem er von einem Raumpunkt zu einem anderen springt, ohne die dazwischen liegenden Punkte zu passieren. Doch wäre damit nicht das Problem gelöst, wie eine stetige Bewegung möglich ist: Man hätte nur gezeigt, dass eine solche Bewegung in Wirklichkeit gar nicht vorkommt. Dennoch bliebe die logische Möglichkeit einer stetige Bewegung bestehen, von der wir aufgrund der anschaulichen Vorstellbarkeit einer solchen Bewegung wissen – ähnlich wie die Farbe Rot vorstellbar und darum realisierbar bliebe, wenn sie in unserem Universum aufgrund eines Gesetzes, dass die entsprechende Wellenlänge verbieten würde, tatsächlich nicht als physikalisches Objekt realisiert wäre. So müssen wir uns um eine infinitistische Lösung des Paradoxon bemühen.

Die *infinitistische Lösung*[739] beruht darauf, dass eine Summe unendlich vieler Zahlen gegen eine endliche Zahl „konvergieren“ kann. Durch eine einfache Anwendung der Theorie unendlicher Reihen

---

735 Sie sind festgehalten bei Aristoteles, *Physica* Buch 6 Kap. 9, 239b–240a, Ausgabe Zekl Band 2 S. 90–95.

736 Vgl. Aristoteles, *Physica* Buch 6 Kap. 2, 233a21f, Ausgabe Zekl Band 2 S. 55.

737 Vgl. Hilbert und Bernays, *Grundlagen der Mathematik I* S. 16.

738 Diese These vertrat im Mittelalter bereits die Schule des *Kalam* (siehe Abschnitt 8.9.2). Jüngste Versuche, eine „Quantelung der Zeit“ nachzuweisen, sind jedoch fehlgeschlagen (vgl. Lieu und Hillmann, *Evidence*).

739 Eine solche wurde z. B. von Whitehead, *Process* part 1 chapter 2 section 2 S. 105–107, Ausgabe Griffin/Sherburne S. 68f, Ausgabe Holl S. 142f vorgeschlagen. Die Lösungen von Aristoteles und Bergson sind trotz des gegenteiligen Anscheins ebenfalls infinitistisch, da beide die Bewegung für stetig halten. Aristoteles hält die Zeitstrecke für (wenn auch nur potentiell) unendlich teilbar und wendet gegen Zenon ein, dass in einer in diesem Sinne „unendlichen“ Zeit das Unendliche durchaus durchlaufen werden könne (*Physica* Buch 6 Kap. 2, bes. 233a21–30). Auch nach Bergson kann man im Nachhinein sagen, dass bei einer Bewegung eine unendliche Anzahl von Punkten durchlaufen wurde, obgleich er die Bewegung als ungeteilte Einheit sieht (*Mémoire*) S. 187–189).

kann man z. B. zeigen, dass die unendliche Summe $0,9+0,09+0,009+\ldots$, exakt gleich 1 ist, ebenso wie sich die unendliche Folge $0,1,0,01,0,001,\ldots$ beliebig nahe an 0 annähert und daher exakt den Grenzwert 0 annimmt. Daher wird ACHILLES, wenn sein Abstand zur Schildkröte anfangs 1 Meter beträgt und er so schnell läuft, dass sich dieser Abstand nach $0,9$ Sekunden auf $0,1$ Meter reduziert, nach $0,99$ Sekunden auf $0,01$ Meter, nach $0,999$ Sekunden auf $0,001$ Meter usw., nach genau einer Sekunde die Schildkröte eingeholt haben. So erweist sich der Grundsatz, dass das Unendliche nicht durchlaufen werden kann, als falsch: Das anschaulich evidente Faktum, dass eine stetige Bewegung grundsätzlich möglich ist, widerlegt ihn. Darüber hinaus hat Alexander KOYRÉ recht, dass sich die paradoxe Durchmessung des Unendlichen nicht nur in der stetigen Bewegung, sondern in „alle[n] fundamentalen Konzeptionen der Geometrie“ zeigt,[740] so z. B. auch bereits in der bloßen *Existenz* einer Strecke. Denn jede Strecke „durchmisst“ einen unendlichen Abgrund von Punkten, indem sie ihn durch ihre beiden Endpunkte umfasst und begrenzt. Dann aber bringt die Bewegung auf dieser Strecke „keine neue Schwierigkeit, kein spezielles Paradoxon“ mehr mit sich. Sie zeichnet bloß die Überwindung des Unendlichen nach, die durch die Existenz der Strecke schon geschehen ist.[741] Während demnach die beiden ersten Paradoxien im Wesentlichen als gelöst gelten können, stellt uns das Paradoxon des „fliegenden Pfeils“ vor tiefere Probleme.

Der fliegende Pfeil und die infinitesimale Substruktur des Kontinuums

Wenn ZENON recht hat, dass der Pfeil in jedem Zeitpunkt t „ruht“, so scheint es (jedenfalls solange wir nur den Zeitpunkt t in Betracht ziehen) nichts zu geben, was ihn von einem Pfeil unterscheidet, der tatsächlich ruht. Man könnte erwägen, ob nicht der Unterschied darin liegt, dass der fliegende Pfeil im Gegensatz zum ruhenden den *Drang* (oder scholastisch ausgedrückt: die *unmittelbare Potenz*) hat, sich weiterzubewegen. Denselben Drang könnte jedoch auch der ruhende Pfeil haben, wenn er an der Bewegung gehindert wird. Was beide Pfeile unterscheidet, kann deshalb keine dynamische Eigenschaft sein. Einen Unterschied zwischen dem ruhenden und dem bewegten Pfeil können wir erst dann sehen, wenn wir den Gesichtskreis auf eine ganzes Zeitintervall ausdehnen. In diesem bleibt der ruhende Pfeil immer am gleichen Ort, während der fliegende sich zu verschiedenen Zeitpunkten an verschiedenen Orten aufhält (oder dort „ruht“, wie ZENON provokativ sagen würde). Wäre dies der einzige Unterschied, so wäre aber die Bewegung des Pfeils der „gequantelten“ Bewegung ähnlich, welche bei der finitistischen Auflösung der Paradoxien angenommen wird, nur dass jetzt unendlich viele „Quantensprünge“ vorliegen.

Dies ist irgendwie unbefriedigend. Ein bisher wenig beachteter Lösungsversuch dieses Problems besteht nun darin, dass man die Behauptung, der fliegende Pfeil würde im Punkt ruhen, schlicht leugnet. Einen solchen Ausweg aus dem Pfeil-Paradoxon hat William MCLAUGHLIN vorgeschlagen, der hierzu die Non-Standard Analysis heranzieht, also eine infinitesimale Substruktur des Kontinuums annimmt.[742] Wenn nämlich das, was wir als einen Punkt P auf der Geraden ansehen, in Wirklichkeit eine ROBINSONsche Monade ist,[743] so könnte man behaupten, dass der in P befindliche Pfeil nicht ruht, sondern sich durch die Monade bewegt, und gerade dies würde ihn vom ruhenden Pfeil rein kinematisch unterscheiden. Natürlich bringt eine solche Lösung neue Fragen und Probleme. Die infinitesimale Strecke, die der Pfeil durchmisst, „während er sich im Punkt P aufhält“, besteht aus Punkten 2-ter Art, und so könnte ZENON fragen, was er tut, „während“ er sich in einem solchen Punkt aufhält. Eine überzeugende Antwort, welche Fragen dieser Art ein für allemal zurückweist, ist meines Erachtens möglich, wenn die erste der drei in Abschnitt 5.25 besprochenen Alternativen richtig ist, also der Anschauungsraum eine Infinitesimal-Hierarchie von immer kleineren Räumen

740 KOYRÉ, *Zenonische Paradoxien* S. 617.

741 Vgl. KOYRÉ, *Zenonische Paradoxien* S. 622-624.

742 Vgl. MCLAUGHLIN, *Zenos Paradoxien.*

743 Zu diesem Begriff siehe S. 293–294.

aufweist. Dann könnte sich der Pfeil auf *jeder* Ebene der Infinitesimal-Hierarchie bewegen:[744] Er würde überall als „sich bewegend“ angetroffen und nirgends „ruhen“.

Eine kritische Frage wäre allerdings die, *mit welcher Geschwindigkeit* sich der Pfeil (oder besser die Pfeilspitze) durch die infinitesimalen Räume (= Punkte) bewegt. Die Geschwindigkeit der Bewegung während dieser Zeitmonade scheint nun aber gar nicht durch die „makroskopische“ Geschwindigkeit des Pfeils, die wir tatsächlich messen können, bestimmbar zu sein und würde darum nicht von ihr abhängen. Vielleicht sollte man daher sagen, dass der Pfeil im infinitesimalen Bereich gar keine bestimmte Geschwindigkeit hat, er also jeden solchen Bereich gewissermaßen „momentan“ passiert, ohne eine konkret angebbare Geschwindigkeit zu haben. Doch ist zuzugeben, dass auch dies nicht sehr überzeugend klingt.[745] So dürfte das Pfeil-Paradoxon nach wie vor Gegenstand philosophischer Kontroversen bleiben.

Während die gewöhnliche Mathematik sich nur mit Mengen bis zur Stufe $\|\mathfrak{f}\|$ beschäftigt (siehe S. 283–284), werden die darüber liegenden Stufen hauptsächlich nur noch in die Mengenlehre selbst behandelt. Die vorstehenden Ausführungen zeigen jedoch, dass auch höhere Unendlichkeiten möglicherweise für die angemessene Beschreibung realer Strukturen von Raum und Zeit in Frage kommen könnten. Die wesentlichen Hilfsmittel zum Verständnis des *ganzen* Systems der transfiniten Mengenstufen sind nun die Reihe der schon eingeführten Ordinalzahlen (Abschnitt 5.14) und darauf aufbauend die Mengenuniversen und die Kardinalzahlen. Diesen Themen wenden wir uns daher in den folgenden Abschnitten zu.

---

744 Man beachte, dass dies auch dann möglich ist, wenn die Pfeilspitze einen infinitesimalen Anschauungsraum *vollständig* einnimmt. Die vollständige Raumfüllung eines unbegrenzten Raums verhindert nämlich keineswegs seine Bewegung: Wenn man sich etwa vorstellt, das ein unbegrenzter Raum vollständig mit Luft ausgefüllt ist, könnte darin trotzdem ein „Ostwind“ wehen, der jedes Luftmolekül mit einer beliebig großen endlichen Geschwindigkeit in dieselbe Richtung treiben würde.

745 McLaughlin trägt zu dieser Frage die folgenden Gedanken vor, die eine gewisse Ratlosigkeit und Verlegenheit erkennen lassen: „Geschieht die Bewegung … etwa als gleichmäßiges Vorrücken – oder als momentaner Sprung von einem Ende zum anderen? Könnte sie eine Folge von Zwischenschritten enthalten oder gar einen Vorgang außerhalb von Raum und Zeit? Die Möglichkeiten sind unbegrenzt, und keine lässt sich bestätigen oder ausschließen, denn einen infinitesimalen Abstand vermag niemand zu messen.“ (McLaughlin, *Zenos Paradoxien* S. 69).

5.28 Die Ordinalzahlreihe

Wir sind nun in der Lage, die in Abschnitt 5.14 als Hilfsmittel der Wohlordnungstheorie eingeführten Ordinalzahlen konkreter zu charakterisieren und ihre ins Unendliche gehende Reihe genauer zu verfolgen. Wie schon festgestellt, ist sowohl jedes Element von ω (jede natürliche Zahl) als auch ω selbst eine Ordinalzahl, und ω ist die kleinste unendliche Ordinalzahl (Theorem 5.16.47 S. 223 und Korollar 5.17.28 S. 243). Die beiden folgenden Theoreme unterstreichen die besondere Rolle, welche die natürlichen Zahlen in der Schar der Ordinalzahlen spielen:

5.28.1 Theorem *Die natürlichen Zahlen n sind die kleinsten Ordinalzahlen, d. h. alle anderen Ordinalzahlen α sind größer als diese.*

Beweis. Für jede natürliche Zahl n gilt $n \in \omega$, das heißt nach Definition der Ordnungsrelation $<$ für Ordinalzahlen $n < \omega$. Ist nun aber α eine Ordinalzahl, die *keine* natürliche Zahl ist, gilt *nicht* $\alpha \in \omega$, also *nicht* $\alpha < \omega$, also $\omega \leq \alpha$. Insgesamt ist daher $n < \omega \leq \alpha$ und somit $n < \alpha$. □

5.28.2 Theorem *Die natürlichen Zahlen n sind die endlichen Ordinalzahlen, d. h. sie sind endlich und alle anderen Ordinalzahlen α sind unendlich.*

Beweis. Nach Satz 5.158 S. 248 ist jede natürliche Zahl endlich. Ist α eine Ordinalzahl, die keine natürliche Zahl ist, so gilt *nicht* $\alpha \in \omega$, d. h. *nicht* $\alpha < \omega$, also $\omega \leq \alpha$, und das heißt wegen Satz 5.79 S. 192, dass α ist Obermenge von ω ist. Da ω unendlich ist (Korollar 5.17.27 S. 243), folgt dann mittels Satz 5.144 S. 244, dass auch α unendlich ist. □

Zuerst kommen also in der Reihe der Ordinalzahlen die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$, weil diese nach Theorem 5.28.1 die kleinsten Ordinalzahlen sind. Danach kommen wegen Theorem 5.28.2 nur noch unendliche Ordinalzahlen, und zwar wegen Korollar 5.17.28 S. 243 zuerst ω:

$$0, 1, 2, 3 \ldots \omega.$$

Nach ω kommt wegen Satz 5.82 S. 192 die Zahl ω', dann ω'', dann ω''' usw. Man schreibt für ω' auch $\omega + 1$, für ω'' auch $\omega + 2$ usw., wobei man $+$ als eine Operation auffassen kann, welche die Addition der natürlichen Zahlen auf alle Ordinalzahlen ausdehnt.[746] Insgesamt ergibt sich also bisher eine Zusammenstellung von zwei aufeinander folgenden unendlichen Zahlenreihen:

$$0, 1, 2, 3 \ldots \omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2,\ \omega + 3,\ \ldots.$$

Nun ist die Klasse X dieser Ordinalzahlen die Vereinigung zweier abzählbar unendlicher Mengen, also nach Theorem 5.20.9 selbst eine abzählbar unendliche Menge. Es gibt darum nach Theorem 5.14.7 S. 192 eine kleinste Ordinalzahl $X^{//}$, die größer ist als alle in X liegenden Zahlen. Für diese schreibt man $\omega \cdot 2$ oder $\omega 2$, wobei man $\cdot$ als eine Operation auffassen kann, welche der Multiplikation der natürlichen Zahlen auf alle Ordinalzahlen ausdehnt.[747] So ergibt sich die Gesamtreihe

$$0, 1, 2, 3 \ldots \omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2,\ \omega + 3,\ \ldots \omega 2.$$

Um ein Ordnungsdiagramm mit allen bisher genannten Ordinalzahlen zu erhalten, betrachten wir auf einer Geraden g ein Zahlenstrahlmodell der Arithmetik (dessen Zahlen wir, um sie von den Ordinalzahlen $0, 1, 2, \ldots$ zu unterscheiden, kleiner schreiben wollen: $_{0,1,2,\ldots}$). Zu jedem Intervall $_{[n,n+1)}$ können wir nun ein Streckenmodell der Arithmetik betrachten, dessen Nullpunkt $_n$ ist, und dessen sämtliche Zahlen in $_{[n,n+1)}$ liegen. Wir können dann die erste unendliche Reihe durch Punkte des in

[746] Zur exakten Definition der Addition für Ordinalzahlen siehe 5.28.3 S. 304.

[747] Zur exakten Definition der Multiplikation für Ordinalzahlen siehe 5.28.3 S. 304.

[0,1) untergebrachten Streckenmodells darstellen, die zweite durch Punkte des in [1,2) untergebrachten Streckenmodells, und die Ordinalzahl $\omega 2$ durch den Punkt 2:

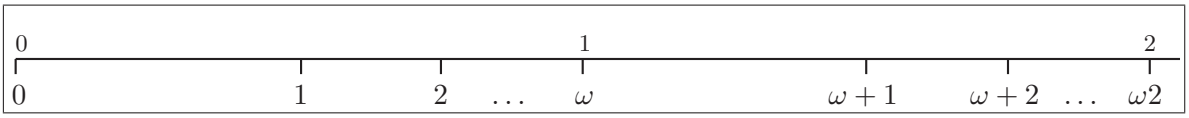


Abbildung 5.32: Ordnungsdiagramm der Ordinalzahlen von 0 bis $\omega 2$

Sodann ist $\omega 2, (\omega 2+1)', (\omega 2)'', \ldots$, wofür wir auch $\omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \ldots$ schreiben, eine dritte unendliche Reihe von Ordinalzahlen, die wir in unserem Ordnungsdiagramm im Intervall [2,3) von 2 bis 3 unterbringen, und nun wiederholt sich der eben gemachte Gedankengang: Die Klasse X aller dieser Ordinalzahlen ist die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen (nämlich der Menge aller Ordinalzahlen vor $\omega 2$ und der Menge der dritten unendlichen Reihe) und daher selbst eine Menge. Also gibt es nach Theorem 5.14.7 eine kleinste Ordinalzahl $X^{/\!/}$, die größer ist als alle genannten, und diese bezeichnet man mit $\omega \cdot 3$ oder $\omega 3$, wodurch sich wieder eine unendliche Kette von Ordinalzahlen eröffnet, usw. Insgesamt bekommen wir also unendlich viele Reihen von jeweils unendlich vielen Ordinalzahlen, die sich alle durch Punkte der Halbgeraden [0,∞) darstellen lassen. Indem wir für $\omega, \omega+1$ usw. $\omega 1+0, \omega 1+1$ usw. schreiben und für $\omega 2, \omega 3$ usw. $\omega 2+0, \omega 3+0$ usw., erhalten wir die folgende Darstellung von allen bisher betrachteten unendlichen Ordinalzahlen:

$$\begin{array}{l} \omega 1+0,\ \omega 1+1,\ \omega 1+2,\ \ldots \\ \omega 2+0,\ \omega 2+1,\ \omega 2+2,\ \ldots \\ \omega 3+0,\ \omega 3+1,\ \omega 3+2,\ \ldots \\ \ldots \end{array}$$

Nun ist die Klasse U all dieser Ordinalzahlen, die sich als eine Summe der Form $\omega m+n$ mit einer von 0 verschiedenen natürlichen Zahl m und einer beliebigen natürlichen Zahl n darstellen lasen, immer noch abzählbar unendlich.[748] Also ist U mit dem Träger eines beliebigen Streckenmodells der Arithmetik gleichmächtig, z. B. mit dem Träger eines Streckenmodells im Intervall [1,2). Dessen Zahlen können wir daher als Repräsentanten für alle bisher betrachteten unendlichen Ordinalzahlen nehmen, und auf diese Weise bekommen wir ein neues Ordnungsdiagramm, in dem wir die betrachteten Ordinalzahlen ab ω durch Punkte des Intervalls [1,2) repräsentiert denken, während wir im Intervall [0,1) nach wie vor die Repräsentanten für die Zahlen von 0 bis ω unterbringen. Da die Klasse X aller bisher betrachteten Ordinalzahlen eine Menge ist,[749] gibt es nach Theorem 5.14.7 eine weitere Ordinalzahl $X^{/\!/}$, welche nach diesen Ordinalzahlen als nächste kommt. Diese nennt man $\omega \cdot \omega$ oder $\omega\omega$ oder $\omega \uparrow 2$ oder ω^2, wobei man $\uparrow$ als eine Operation auffassen kann, welche die Potenzierung der natürlichen Zahlen auf alle Ordinalzahlen ausdehnt.[750] In dem neuen Ordnungsdiagramm kann ω^2 auf den Punkt 2 gesetzt werden, und dieses Diagramm sieht dann so aus:

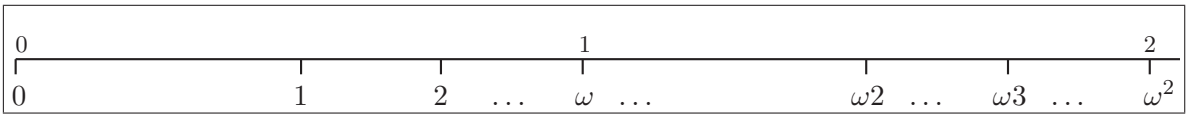


Abbildung 5.33: Ordnungsdiagramm der Ordinalzahlen von 0 bis ω^2

[748] Die Funktion, die jede Ordinalzahl $\omega m+n$ aus U jeweils auf das Paar $\langle m, n\rangle$ wirft, ist eine Bijektion von U in die Menge $\omega \setminus \{0\} \times \omega$, die als Kreuzprodukt abzählbar unendlicher Mengen selbst abzählbar unendlich ist (Theorem 5.20.13 S. 261), also ist nach Theorem 5.20.5 S. 259 auch U abzählbar unendlich.

[749] X ist Vereinigung der (abzählbar unendlichen) Menge U mit der Menge der endlichen Ordinalzahlen und daher ebenfalls eine Menge.

[750] Zur exakten Definition der Potenzierung für Ordinalzahlen siehe 5.28.3 S. 304.

Natürlich steht ω^2, wofür wir auch $\omega^2 1 + 0$ schreiben, wieder am Anfang einer neuen unendlichen Schar unendlicher Reihen

$$\begin{array}{l} \omega^2 1 + 0,\ \omega^2 1 + 1,\ \omega^2 1 + 2,\ \ldots \\ \omega^2 2 + 0,\ \omega^2 2 + 1,\ \omega^2 2 + 2,\ \ldots \\ \omega^2 3 + 0,\ \omega^2 3 + 1,\ \omega^2 3 + 2,\ \ldots \\ \ldots \end{array}$$

in der wieder nur abzählbar unendlich viele Ordinalzahlen vorkommen. Diese können also in unserem neuen Ordnungsdiagramm im Intervall [2,3) untergebracht werden. Indem wir in den Bezeichnungen für die vor ω^2 betrachteten unendlichen Ordinalzahlen jetzt das ω durch ω^1 ersetzen, erhalten wir folgende Darstellung der Reihe aller bisher genannten Ordinalzahlen:

$$\begin{array}{ll} 0, 1, 2, \ldots & \omega^1 1 + 0,\ \omega^1 1 + 1,\ \omega^1 1 + 2, \ldots \\ & \omega^1 2 + 0,\ \omega^1 2 + 1,\ \omega^1 2 + 2, \ldots \\ & \ldots \\ & \omega^2 1 + 0,\ \omega^2 1 + 1,\ \omega^2 1 + 2, \ldots \\ & \omega^2 2 + 1,\ \omega^2 2 + 1,\ \omega^2 2 + 2, \ldots \end{array}$$

Die Klasse aller dieser Ordinalzahlen ist als Vereinigung zweier (abzählbar unendlicher) Mengen (nämlich als Vereinigung der Menge der Ordinalzahlen $< \omega^2 1 + 0$ mit der Menge der bisher genannten Ordinalzahlen $\geq \omega^2 1 + 0$) eine Menge, so dass es wieder eine kleinste Ordinalzahl gibt, die größer als alle bisher betrachteten ist. Diese heißt ω^3 und eröffnet wieder eine unendliche Folge von unendlichen Reihen von Ordinalzahlen, die wir in unserem neuen Ordnungsdiagramm auf der Zahlengeraden zwischen 3 und 4 unterbringen, worauf dann ω^4 folgt usw., bis sich unser neues Ordnungsdiagramm wieder über die ganzen Halbgerade $[0,\infty)$ erstreckt. Alle so gebildeten Ordinalzahlen von ω an können wir einheitlich als eine Summe der Form $\omega^k m + n$ darstellen, wobei k und m von 0 verschiedene natürliche Zahlen und n eine natürliche Zahl ist. Nun ist die Klasse U dieser Ordinalzahlen immer noch eine abzählbar unendliche Menge,[751] so dass wir nochmals ein modifiziertes Ordnungsdiagramm erstellen können, in dem die bisher betrachteten Ordinalzahlen ab ω im Intervall [1,2) untergebracht sind, während wir das Intervall von 0 bis 1 weiterhin mit den Repräsentanten für die Zahlen von 0 bis ω besetzen. Sämtliche bislang betrachteten Ordinalzahlen bilden als Vereinigung zweier Mengen[752] immer noch eine Menge, so dass allen Ordinalzahlen dieser Menge eine weitere Ordinalzahl folgt. Diese nennen wir ω^ω und setzen sie auf den Punkt 2:

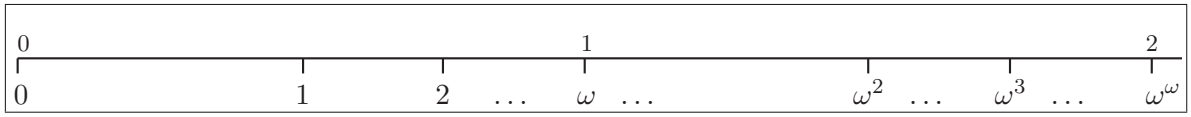


Abbildung 5.34: Ordnungsdiagramm der Ordinalzahlen von 0 bis ω^ω

Die Ordinalzahl ω^ω bildet den Anfang einer neuen Reihe von Ordinalzahlen, die denen zwischen 1 und 2 untergebrachten entsprechen, und nach dieser Reihe setzen wir auf den Punkt 3 der Zahlengeraden die nächst höhere Ordinalzahl ω^{ω^ω} (ein „Potenzturm“ mit drei Potenzen ω) usw. Allgemein setzen wir auf Position n eine Ordinalzahl, die durch einen „Potenzturm“ mit n übereinander geschriebenen ω-Potenzen bezeichnet wird. Alle diese Ordinalzahlen bilden wieder eine abzählbar

751 Denn die Funktion, die jede Ordinalzahl $\omega^k m + n$ jeweils auf das 3-Tupel $\langle k, m, n \rangle$ wirft, ist eine Injektion von X in die Menge ω^3, so dass $X \precsim \omega^3$. In dieser Aussage können wir nach Theorem 5.15.4 S. 201 das ω^3 durch ω ersetzen, weil ω^3 nach Theorem 5.20.17 S. 262 mit ω gleichmächtig ist. So ist $X \precsim \omega$, d. h. X ist *höchstens* abzählbar unendlich, und als unendliche Menge muss X dann abzählbar unendlich sein.

752 Nämlich als Vereinigung der abzählbar unendlichen Menge U mit der Menge aller endlichen Zahlen.

unendliche Menge, die sich in einem neuen Ordnungsdiagramm durch Punkte des Intervalls [0,2) darstellen lässt. Der Punkt 2 kann dann die nächst höhere Ordinalzahl repräsentieren, die seit CANTOR ϵ_0 [Epsilon-Null] genannt wird.[753]

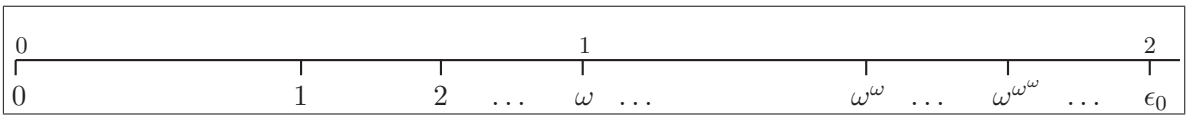


Abbildung 5.35: Ordnungsdiagramm der Ordinalzahlen von 0 bis ϵ_0

Das Besondere an ϵ_0 ist, dass dies die kleinste Ordinalzahl ist, welche nicht mehr mittels der gewöhnlichen arithmetischen Operationen der Addition, Multiplikation und Potenzierung aus kleineren Ordinalzahlen resultiert. Man könnte jedoch noch weitere Operationen einführen:[754] Schreibt man für die Addition $\overset{1}{\uparrow}$, für die Multiplikation $\overset{2}{\uparrow}$ und für die Potenzierung $\overset{3}{\uparrow}$, so könnte man $\overset{4}{\uparrow}$ für die nächst höhere Operation schreiben, für welche $\omega \overset{4}{\uparrow} 1 = \omega$, $\omega \overset{4}{\uparrow} 2 = \omega^\omega$, $\omega \overset{4}{\uparrow} 3 = \omega^{(\omega^\omega)}$ usw. gilt. So kann man ϵ_0 als $\omega \overset{4}{\uparrow} \omega$ darstellen, wofür man wieder $\omega \overset{5}{\uparrow} 2$ schreiben kann. Analog zu den vorstehenden Gedankengängen ergibt sich, dass die Klasse X der Zahlen bis ϵ_0 immer noch abzählbar unendlich ist.[755] Jedoch geht dies nicht ewig so weiter: Wegen Theorem 5.14.16 S. 197 muss irgendwann (weit hinter ϵ_0) eine Ordinalzahl kommen, die überabzählbar ist.[756] Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl nennt man $\aleph_1$ [Aleph-Eins]. Ferner gibt es nach demselben Theorem mindestens eine mit $\mathbb{R}$ und auch mindestens eine mit $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ gleichmächtige Ordinalzahl, die also auf der Stufe $\llbracket \mathfrak{c} \rrbracket$ der kontinuierlich unendlichen Mengen bzw. $\llbracket \mathfrak{f} \rrbracket$ der funktional unendlichen Mengen liegt, und die kleinste von ihnen ist $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{f}$.[757] Es ist klar, dass $\aleph_1$ (als kleinste überabzählbare Ordinalzahl überhaupt) kleinergleich $\mathfrak{c}$ sein muss (sie ist gleich, wenn Cantors Kontinuumshypothese[758] zutrifft, sonst kleiner), und dass $\mathfrak{c}$ kleiner als $\mathfrak{f}$ ist.[759] So ergibt sich folgende Reihenfolge der Ordinalzahlen:

$$0 \ldots\ldots \omega \ldots\ldots \omega 2 \ldots\ldots \omega^2 \ldots\ldots \omega^\omega \ldots\ldots \epsilon_0 \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{c}}_{\aleph_1 \text{ in diesem Bereich}} \ldots\ldots \mathfrak{f} \ldots\ldots$$

Für die Ordinalzahlen bis $\mathfrak{c}$ können wir noch ein Ordnungsdiagramm erstellen, das auf einer (beliebig kleinen) Strecke der Zahlengeraden Platz hat, denn die Zahlen bis $\mathfrak{c}$ sind ebenso wie die Menge der Punkte einer beliebigen Strecke kontinuierlich unendlich. Die Menge der Ordinalzahlen bis $\mathfrak{f}$ allerdings ist so groß, dass eine Zahlengerade nicht mehr ausreicht, um sie darzustellen. Nach $\mathfrak{f}$ kommen noch unübersehbar viele weitere Ordinalzahlen: Wann immer man eine vorstellbare Vielheit von Ordinalzahlen hat, bilden diese Ordinalzahlen eine Menge X, so dass wegen Theorem 5.14.7 noch eine größere Ordinalzahl $X^{/\!/}$ existiert. Die Reihe *aller* Ordinalzahlen aber ist eine Unmenge und damit nicht nur unendlich, sondern unvorstellbar lang.

---

753 Vgl. CANTOR, *Transfinite Mengenlehre* § 20, Ausgabe Zermelo S. 347.

754 Siehe hierzu oben S. 218 mit Fußnote 546.

755 Zunächst ist die Klasse U der Zahlen von ω (einschließlich) bis ϵ_0 (ausschließlich) offenbar eindeutig in der Form $\omega \overset{4}{\uparrow} j \overset{3}{\uparrow} k \overset{2}{\uparrow} m \overset{1}{\uparrow} n$ darstellbar, wobei j, k, m von 0 verschiedene natürliche Zahlen und n eine beliebige natürliche Zahl ist. Die Funktion, welche jede Ordinalzahl $\omega \overset{4}{\uparrow} j \overset{3}{\uparrow} k \overset{2}{\uparrow} m \overset{1}{\uparrow} n$ auf das 4-Tupel $\langle\!\langle j, k, m, n \rangle\!\rangle$ wirft, ist dann eine Injektion von U in die abzählbar unendliche Menge ω^4. Daher ist U höchstens abzählbar unendlich, und da U unendlich ist, ist U abzählbar unendlich. Da X die Vereinigung von U mit der ebenfalls abzählbar unendlichen Menge der natürlichen Zahlen ist, ist schließlich auch X abzählbar unendlich.

756 Nach dem genannten Theorem gibt es zu *jeder* Menge M eine Ordinalzahl, die mit M gleichmächtig ist, also muss es auch eine Ordinalzahl geben, die zu der überabzählbaren Menge $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist.

757 Siehe Definitionen 5.20.24 S. 264 und 5.22.3 S. 282.

758 Siehe S. 284–285.

759 Dies folgt wegen $\mathfrak{c} \prec \mathfrak{f}$ aus Satz 5.101 S. 201.

Ich beschließe diesen Abschnitt mit einer Definition der erwähnten Operationen für Ordinalzahlen. Man definiert für jede Ordinalzahl μ eine „Additionsfunktion“, eine „Multiplikationsfunktion“ und eine „Potenzierungsfunktion“ von $\mathtt{On}$ in $\mathtt{On}$ durch Sukzessor-Limes-Rekursion[760] und schreibt für deren Funktionswert an der Stelle α $\ll\mu+\alpha\gg$ bzw. $\ll\mu\cdot\alpha\gg$ (oder $\ll\mu\alpha\gg$) bzw. $\ll\mu\uparrow\alpha\gg$ (oder $\ll\mu^\alpha\gg$):

5.28.3 Definition der Ordinalzahl-Operationen

Addition: $\mu+0:\equiv\mu,\quad \mu+\alpha':=(\mu+\alpha)',\quad \mu+\lambda:\equiv\sup(\mathtt{Wb}(f_{\mu+}/\lambda)).$ (5.185)

Multiplikation: $\mu 0:\equiv 0,\quad \mu(\alpha'):\equiv\mu+(\mu\alpha),\quad \mu\lambda:\equiv\sup(\mathtt{Wb}(f_{\mu\cdot}/\lambda)).$ (5.186)

Potenzierung:[761] $\mu^0:\equiv 1,\quad \mu^{\alpha'}:\equiv\mu(\mu^\alpha),\quad \mu^\lambda:\equiv\sup(\mathtt{Wb}(f_{\mu\uparrow}/\lambda)).$ (5.187)

wobei α für alle Ordinalzahlen, λ für alle Limeszahlen steht.

Die Anfangs– und Sukzessor-Rekursionsgleichungen entsprechen genau den Festlegungen für die gewöhnlichen arithmetischen Operationen (siehe S. 216–218). Neu ist die Limes-Rekursionsgleichung: wird μ mit einer Limeszahl λ verknüpft, bekommen wir das Ergebnis dadurch, dass wir alle Ergebnisse der Verknüpfung von μ mit kleineren Zahlen χ in einer Menge zusammenfassen und deren kleinste obere Schranke (Supremum) bilden. Die meisten Eigenschaften dieser Operationen können durch Sukzessor-Limes-Induktion ableitet werden. Diese so genannte „Ordinalzahlarithmetik“ braucht uns hier nicht zu beschäftigen.[762] Es sei nur auf zwei Sachverhalte hingewiesen. *Erstens* ist der unmittelbare Nachfolger α' einer Ordinalzahl, für den ich bereits die Schreibweise $\alpha+1$ benutzt habe, nun in der Tat das Ergebnis der Addition von α mit der durch $1:\equiv 0'$ definierten Ordinalzahl:

Für jede Ordinalzahl α ist der Nachfolger α' von α mit $\alpha+1$ identisch. (5.188)

Korollar: für α und β aus $\mathtt{On}$ gilt: $\alpha<\beta+1 \;\Leftrightarrow\; \alpha\le\beta$ sowie $\alpha<\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha+1\le\beta$. (5.189)

Beweis. Wegen $1:\equiv 0'$ ist $\alpha+1$ mit $\alpha+0'$ identisch, was nach der zweiten Gleichung in (5.185) $(\alpha+0)'$ ist, was wieder nach der ersten Gleichung in (5.185) α' ist. Also gilt (5.188), und da somit $\alpha+1$ den *unmittelbaren* Nachfolger von α bezeichnet,[763] folgt auch (5.189).[764] □

Zweitens hat die Ordinalzahlarithmetik im Bereich unendlicher Ordinalzahlen durchaus *andersartige* Züge als die vertrautere Arithmetik mit endlichen Zahlen. Z. B. hat schon Cantor einen „wesentlichen Unterschied zwischen den unendlichen und endlichen Zahlen“ darin gesehen, dass für die Addition und die Multiplikation *das Kommutativgesetz nicht mehr gültig* ist.[765] So ist beispielsweise $\omega+1$ eine Zahl, die größer als ω ist, nämlich die nach ω nächst größere Ordinalzahl ω', während $1+\omega$ wieder ω selbst ist,[766] und so ist $\omega+1\neq 1+\omega$.

---

760 Eine Ausnahme ist die Potenzierungsfunktion für $\mu=0$. Hier definiert man direkt $0^0:\equiv 1$ und $0^\alpha:\equiv 0$ für alle von 0 verschiedenen Ordinalzahlen α. Vgl. Fußnote 761.

761 Hier setzen wir $\mu\neq 0$ voraus. Würden wir nämlich $\mu=0$ zulassen, käme nach der dritten Gleichung für Limeszahlen λ heraus, dass $0^\lambda\ge 1$, da ja nach der ersten $0^0=1$ ist. Gewöhnlich möchte man aber, dass 0^x für alle von 0 verschiedenen x gleich 0 ist. Dies definieren wir darum direkt (vgl. Fußnote 760).

762 Vgl. etwa Oberschelp, *Allgemeine Mengenlehre* § 35 S. 222–232.

763 Vgl. Satz 5.82 S. 192.

764 Sei nämlich $\alpha<\beta+1$. Wäre nicht $\alpha\le\beta$, so wäre $\beta<\alpha$ und dann insgesamt $\beta<\alpha<\beta+1$ im Widerspruch dazu, dass $\beta+1$ der *unmittelbare* Nachfolger von β ist. Sei umgekehrt $\alpha\le\beta$. Wegen $\beta<\beta+1$ folgt $\alpha\le\beta<\beta+1$, also $\alpha<\beta+1$. Sei jetzt $\alpha<\beta$. Wäre nicht $\alpha+1\le\beta$, so wäre $\beta<\alpha+1$ und dann insgesamt $\alpha<\beta<\alpha+1$ im Widerspruch dazu, dass $\alpha+1$ der *unmittelbare* Nachfolger von α ist. Sei umgekehrt $\alpha+1\le\beta$. Wegen $\alpha<\alpha+1$ folgt dann $\alpha<\alpha+1\le\beta$, also $\alpha<\beta$.

765 Cantor, *Punktmannigfaltigkeiten* Nr. 5 § 6, Ausgabe Zermelo S. 178.

766 Nach der Limes-Rekursionsgleichung ist $1+\omega$ die kleinste obere Schranke der Menge M aller Summen $1+n$ für Zahlen $n<\omega$ (d. h. für natürliche Zahlen n). Alle diese Summen sind aber kleiner als ω, also ist ω eine obere Schranke von M, und folglich $1+\omega\le\omega$. Andererseits kann $1+\omega$ nicht kleiner als ω sein (sonst wäre $1+\omega$ eine natürliche Zahl, und dann wäre die Summe $1+(1+\omega)$ ein Element von M, das größer als $1+\omega$ ist, so dass $1+\omega$ keine obere Schranke von M mehr sein könnte). Somit ist $1+\omega=\omega$.

5.29 Das kumulative Mengenuniversum

Das *kumulative Mengenuniversum* $\mathbb{V}$ ist eine Klasse, die durch Vereinigung gewisser Mengen $\mathbb{V}_\alpha$ gebildet wird, welche mit Ordinalzahlen α „durchnummeriert“ werden. Für jede Ordinalzahl α heißt $\mathbb{V}_\alpha$ das *α-te kumulative (Teil-)Universum.* Man spricht von einer ≪kumulativen≫ Hierarchie, weil sich in $\mathbb{V}_\alpha$ die Elemente aller $\mathbb{V}_\xi$ für jedes $\xi < \alpha$ ansammeln, und in $\mathbb{V}$ die Elemente aller $\mathbb{V}_\alpha$. Die Bezeichnung ≪Universum≫ für $\mathbb{V}$ rührt daher, dass $\mathbb{V}$ alle in der Mathematik benötigten Objekte enthält (genauer wird der Begriff des Universums in Abschnitt 5.31 erklärt). $\mathbb{V}$ enthält andererseits aber auch *nur* das, was die Mathematik als reine Strukturlehre benötigt. So gibt es in $\mathbb{V}$ keine Urelemente und nur wohlfundierte Mengen. In rein mathematisch orientierten Modellen der Mengenlehre wird daher meist die Mengenwelt mit $\mathbb{V}$ identifiziert, also $\mathbb{V}$ sowohl mit der Klasse $\mathbb{M}$ aller Mengen und auch mit der Klasse $\mathbb{D}$ aller Dinge gleichsetzt. Dagegen ist in der realistischen Mengenlehre $\mathbb{V}$ eine *echte* Teilklasse von $\mathbb{M}$, und $\mathbb{M}$ eine *echte* Teilklasse von $\mathbb{D}$. Um die kumulativen Universen zu definieren, führt man durch Sukzessor-Limes-Rekursion eine Hilfsfunktion f von $\mathtt{On}$ in $\mathbb{M}$ ein, deren Funktionswert $f(\alpha)$ die Menge $\mathbb{V}_\alpha$ sein soll, und definiert $\mathbb{V}$ als Vereinigung aller $\mathbb{V}_\alpha$:

5.29.1 Definition der kumulativen Universen

$$f(0) := \emptyset, \quad \text{das heißt} \quad \mathbb{V}_0 :\equiv \emptyset. \tag{5.190}$$

$$f(\alpha') := \mathcal{P}(f(\alpha)), \quad \text{das heißt} \quad \mathbb{V}_{\alpha+1} :\equiv \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha) \quad \text{für Ordinalzahlen } \alpha. \tag{5.191}$$

$$f(\lambda) := \bigcup \mathtt{Wb}(f/\alpha) = \bigcup_{\xi\in\lambda} f(\xi), \quad \text{das heißt} \quad \mathbb{V}_\lambda :\equiv \bigcup_{\xi\in\lambda} \mathbb{V}_\xi \quad \text{für Limeszahlen } \lambda. \tag{5.192}$$

$$\mathbb{V} \text{ ist Vereinigung der } \mathbb{V}_\alpha, \quad \text{das heißt} \quad \mathbb{V} :\equiv \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathbb{V}_\alpha. \tag{5.193}$$

$f(\alpha)$ bzw. $\mathbb{V}_\alpha$ ist stets eine Menge, wie man sofort durch Sukzessor-Limes-Induktion zeigen kann: $f(0)$ ist die leere Menge, und wenn $f(\alpha)$ eine Menge ist, ist nach dem Potenzmengenaxiom auch $f(\alpha')$ bzw. $\mathcal{P}(f(\alpha)$ eine solche; sind schließlich alle $f(\xi)$ für $\xi \in \lambda$ Mengen, so ist (weil die Ordinalzahl λ eine Menge ist) gemäß 5.10.75 S. 150 auch $f(\lambda)$ bzw. $\bigcup_{\xi\in\lambda} \mathbb{V}_\xi$ eine Menge. □
Die fundamentalsten Eigenschaften von $\mathbb{V}$ sind in folgendem Theorem zusammengefasst:

5.29.2 Theorem

Für jede Ordinalzahl α ist $\mathbb{V}_\alpha$ eine Mengenmenge, und $\mathbb{V}$ ist eine Mengenklasse. (5.194)

$\mathbb{V}_\alpha$ und $\mathbb{V}$ sind $\in$-transitiv: aus $x \in y \in \mathbb{V}_\alpha$ folgt $x \in \mathbb{V}_\alpha$ und aus $x \in y \in \mathbb{V}$ folgt $x \in \mathbb{V}$. (5.195)

Jedes x aus $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$ ist eine Mengenmenge und eine Teilmenge von $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$. (5.196)

Wenn $\alpha < \beta$, ist sowohl $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$ als auch $\mathbb{V}_\alpha \subset \mathbb{V}_\beta$, und wenn $\alpha \leq \beta$, ist $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\beta$. (5.197)

Jedes $\mathbb{V}_\alpha$ ist sowohl ein Element als auch eine echte Teilmenge von $\mathbb{V}$. (5.198)

Aus $x \subseteq y \in \mathbb{V}_\alpha$ folgt $x \in \mathbb{V}_\alpha$, und aus $x \subseteq y \in \mathbb{V}$ folgt $x \in \mathbb{V}$. (5.199)

Jede Ordinalzahl α ist ein Element von $\mathbb{V}$ mit $\alpha \subseteq \mathbb{V}_\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{V}_\alpha$ und $\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$. (5.200)

Beweis. Siehe Anhang S. 456–458. □ Aus (5.200) ist schon ersichtlich, dass $\mathtt{On} \subseteq \mathbb{V}$ und somit $\mathbb{V}$ eine Unmenge ist; (5.218) wird zeigen, dass $\mathbb{V}$ mit $\mathtt{On}$ gleichmächtig ist.

$\mathbb{V}_0$ ist nach Definition die leere Menge $\emptyset$. $\mathbb{V}_0$ besitzt also 0 Elemente. (5.201)

$\mathbb{V}_1$ ist die Potenzmenge von $\mathbb{V}_0$: das ist $\{\emptyset\}$. $\mathbb{V}_1$ besitzt also 1 Element. (5.202)

$\mathbb{V}_2$ ist die Potenzmenge von $\mathbb{V}_1$: das ist $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $\mathbb{V}_2$ besitzt also 2 Elemente. (5.203)

So sind die Mengen $\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ nichts anderes als die ersten drei Ordinalzahlen $0, 1, 2$. Doch ist als Nächstes $\mathbb{V}_3$ die Potenzmenge der zweielementigen Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ und besitzt 4 Elemente $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ist also *nicht* die Ordinalzahl 3. $\mathbb{V}_4$ ist die Potenzmenge einer vierelementigen Menge, und eine solche besitzt, wie man leicht überlegt, 16 Elemente. Von da an nimmt die

Größe der Mengen $\mathbb{V}_\alpha$ explosionsartig zu, wenn auch für $\alpha < \omega$ die Menge $\mathbb{V}_\alpha$ immer noch endlich bleibt.[767] $\mathbb{V}_\omega$ aber ist unendlich[768] und ist somit das kumulative Mengenuniversum mit kleinstem Index, das unendlich ist. Für $\alpha > \omega$ ist $\mathbb{V}_\alpha$ nach Satz 5.197 eine Obermenge von $\mathbb{V}_\omega$ und somit nach Satz 5.144 S. 244 erst recht unendlich. Somit gilt:

$\mathbb{V}_\alpha$ *ist endlich, falls* $\alpha < \omega$, *und sonst unendlich.* (5.204)

In der folgenden anschaulichen Beschreibung von $\mathbb{V}$ verweise ich bereits auf Sätze, die ich erst im Anschluss daran formuliert und begründet werden. Mit der Klasse $\mathbb{V}$ verbindet man gern die Vorstellung eines Konstruktionsprozesses, in dem man nacheinander sämtliche Ordinalzahlen α durchläuft und dabei die Mengen $\mathbb{V}_\alpha$ bildet.[769] Dabei fasst man jede Ordinalzahl α als Bezeichnung für den „Tag“ auf, an dem $\mathbb{V}_\alpha$ zu $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ „aufgerüstet“ wird. Dabei wird jedes Element x von $\mathbb{V}$ „irgendwann“ neu hinzukommen, und der „Tag“ α, an dem das geschieht, wird „Geburtstag“ von x oder „Rang“ von x genannt und mit $\mathtt{rg}(x)$ bezeichnet: $\mathtt{rg}(x)$ ist die kleinste Ordinalzahl α mit der Eigenschaft, dass x in $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ liegt. Bezeichnet man die Klasse der am Tag α geborenen Elemente (die also den „Rang“ α haben) mit $\mathcal{R}_\alpha$, so wird am Tag α aus $\mathbb{V}_\alpha$ durch Hinzutun der Elemente von $\mathcal{R}_\alpha$ die Menge $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ konstruiert. Die Bezeichnung „Rang“ rührt daher, dass man sich die Elemente von $\mathbb{V}$ als „übereinander“ gestapelte Objekte vorstellt: An jedem Tag werden die neu hinzukommenden Objekte stets in derselben Höhenlage „über“ den bisherigen Objekten aufgestapelt. So entsprechen die Ordinalzahlen nicht nur den *Konstruktionstagen*, sondern zugleich einer bestimmten *Höhe* des „Mengenturms“ $\mathbb{V}$. Dieser Turm hat die Form einer auf dem Kopf stehenden Pyramide. Denn der Bau beginnt „unten“ damit, dass am Tag 0 aus dem „leeren Inhalt“ von $\mathbb{V}_0$ (also „aus dem Nichts“) durch Hinzufügen der leeren Menge (d. h. der Zahl 0) die Menge $\mathbb{V}_1$ gemacht wird. Am Tag 1 wird „über“ dieses „erste“ Element von $\mathbb{V}$ die Menge $\{\emptyset\}$ (d. h. die Zahl 1) gesetzt und so die Menge $\mathbb{V}_2$ geschaffen, und von jetzt an fügt man an jedem weiteren Tag stets *mehr als ein* Objekt hinzu (so werden am Tag 2 die Mengen $\{\{\emptyset\}\}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, d. h. $\{1\}$ und 2 hinzugefügt), und zwar kommen an jedem Tag sogar *mehr* Objekte hinzu als am vorhergehenden Tag (siehe 5.216), so dass die „Schichten“ in größerer Höhe immer breiter werden. Das Symbol $\mathbb{V}$ ist eine Darstellung der sich so ergebenden „auf dem Kopfe stehenden Mengenpyramide“. Unter den Objekten, die am Tag α und daher in der Höhe α hinzugefügt werden, befindet sich immer auch die Ordinalzahl α selbst (siehe 5.206) so dass man sich die Ordinalzahlen als in die Mengenpyramide eingebaute „Höhenmarken“ vorstellen kann.

Da $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ nach Definition genau die *Teilmengen* von $\mathbb{V}_\alpha$ enthält, müssen am Tag α genau diejenigen Teilmengen von $\mathbb{V}_\alpha$ neu hinzukommen, *die noch nicht in* $\mathbb{V}_\alpha$ *liegen*, d. h. noch nicht an irgendeinem *vor* α liegenden Tag geboren wurden. Genauer gilt:

1. Eine Sukzessorzahl α (auch „Sukzessortag“ genannt) hat stets einen unmittelbaren Vorgänger (oder „Vortag“) ξ, und für jedes am Tag α neu hinzukommende M gilt (siehe 5.214):
   (a) alle x aus M wurden spätestens am Vortag ξ geboren (d. h. $\mathtt{rg}(x) \leq \xi$), und
   (b) und unter diesen mindestens ein x genau am Vortag ξ (d. h. $\mathtt{rg}(x) = \xi$).

[767] Beweis. Durch vollständige Induktion ist ersichtlich, dass $\mathbb{V}_n$ für jede natürliche Zahl n endlich ist: $\mathbb{V}_0$ ist die endliche Menge $\emptyset$, und wann immer $\mathbb{V}_n$ für ein n aus ω endlich ist, ist nach Satz 5.165 S. 251 auch die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{V}_n)$ endlich; diese ist aber $\mathbb{V}_{n+1}$. □

[768] Beweis. Nach Satz 5.197 enthält $\mathbb{V}_\omega$ als Elemente alle $\mathbb{V}_\alpha$ für $\alpha < \omega$. Nun wirft die Funktion $f := \langle \alpha \in \omega \mapsto \mathbb{V}_\alpha \rangle$ die Zahlen von ω auf die Mengen $\mathbb{V}_\alpha$, wobei für α und β mit $\alpha \neq \beta$ stets $\mathbb{V}_\alpha \neq \mathbb{V}_\beta$ ist (denn da $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$ ist, ist nach Satz 5.197 die eine der beiden Mengen $\mathbb{V}_\alpha$ und $\mathbb{V}_\beta$ immer eine *echte* Teilmenge der anderen). Damit ist f eine Injektion von ω in $\mathbb{V}_\omega$, nach Satz 5.90 S. 200 ist also $\omega \precsim \mathbb{V}_\omega$, also auch $\mathbb{V}_\omega \succsim \omega$, so dass sich nach Satz 5.144 S. 244 die Unendlichkeit der Menge ω auf $\mathbb{V}_\omega$ überträgt. □

[769] Für diesen Prozess braucht man natürlich eine „transfinite Beschleunigung“ oder eine „transfinite Ausdehnung der Zeit“, sonst wird man nie fertig.

2. Eine Limeszahl α (auch „Limestag“ genannt) hat keinen unmittelbaren „Vortag“, sondern statt dessen eine endlose Reihe vorausgegangener Tage, und jedes am Tag α neu hinzukommende M erfüllt die folgenden beiden Bedingungen (siehe 5.215):
   (a) alle x aus M wurden in der vorausliegenden unendlichen Reihe von Tagen geboren,
   (b) darunter zu jedem vergangenen Tag ξ mindestens ein x erst *nach* dem Tag ξ.

Je weiter man in der Mengenpyramide aufsteigt, desto größere Mengen kommen vor, wobei auf der Höhe ω erstmals unendliche Mengen vorkommen (siehe 5.217). Allerdings begegnet man beim Aufstieg in beliebiger Höhe immer wieder auch kleineren Mengen. Zum Beispiel gibt es unter den Mengen, deren Rang eine Sukzessorzahl $\alpha+1$ ist, immer einelementige Mengen.[770] Was die Mengen in gleicher Höhe verbindet, ist also nicht ihre Größe, sondern gewissermaßen der „Kompliziertheitsgrad“ ihres inneren Aufbaus: um Mengen von Rang α allein mit geschweiften Klammern und Exemplaren des Zeichens $\emptyset$ darzustellen, benötigt man *mindestens* α *linke* und α *rechte Klammern*, wie sich durch triviale Sukzessor-Limes-Induktion zeigt (wobei man für unendliches α voraussetzen muss, dass aufzählende Klassenterme mit unendlich vielen Klammern aller Unendlichkeitsstufen möglich sind, also ein entsprechender transfinit erweiterter Raum zur Verfügung steht).[771]

Unsere Beschreibung der Mengenpyramide ist natürlich metaphorisch zu verstehen; daraus eine „konstruktivistische“ Ontologie abzuleiten (im dem Sinne, dass Mengen nicht fertig vorliegen, sondern von uns konstruiert werden) hieße, die Metapher zu wörtlich zu nehmen. In Wirklichkeit haben wir die Pyramide ja nicht schrittweise konstruiert, sondern die Existenz der fertigen Pyramide aus den Axiomen abgeleitet. Hier ist sie:

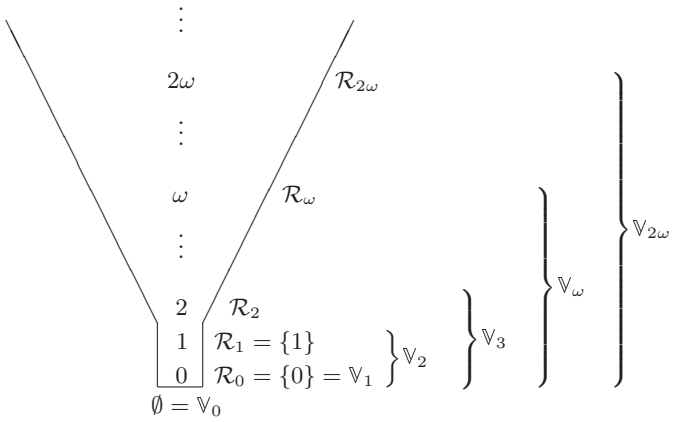


Abbildung 5.36: Die Mengenpyramide $\mathbb{V}$

Der unterhalb von einer Ordinalzahl α liegende Teil der Pyramide ist jeweils das kumulative Teiluniversum $\mathbb{V}_\alpha$. Die Mengen mit gleichem Rang liegen in gleicher Höhe auf einer waagerechten Linie und bilden die Menge $\mathcal{R}_\alpha$. Ferner liegen die Elemente einer in der Pyramide liegenden Menge M immer unterhalb von M (siehe 5.210). In $\mathbb{V}$ liegen mit den Ordinalzahlen insbesondere die natürlichen Zahlen, und man findet in $\mathbb{V}$ auch genügend Objekte, um die üblichen Zahlenbereichserweiterungen

[770] nämlich alle Mengen $\{x\}$, worin x eine Menge mit $\mathtt{rg}(x) = \alpha$ ist.

[771] Linke bzw. rechte Klammern sind dabei so zu setzen, dass sie mit der links-rechts-Relation eine wohlgeordnete Menge M bilden; dann verstehen wir unter der ≪Zahl der Klammern≫ die Ordinalzahl $\mathtt{ord}M$. Induktionsanfang. Zur Darstellung von $\emptyset$ sind null Klammern nötig. Sukzessor-Induktionsschritt. Im aufzählenden Klassenterm $\{\ldots\}$ einer Menge mit Rang $\alpha+1$ werden gemäß (5.214) immer nur Bezeichnungen von Mengen vorheriger Tage aufgezählt, dabei aber mindestens eine mit Rang α. Daher erhöht sich die Mindestzahl der rechten und linken Klammern im Übergang von Mengen mit Rang α zu denen mit Rang $\alpha+1$ um genau eine. Limes-Induktionsschritt. Bei einer Limeszahl α folgt aus (5.215), dass die Mindestzahl der Klammern hinzukommender Mengen die kleinste ist, die größer ist als die entsprechende Zahl der Mengen vorheriger Tage.

durchzuführen. In $\mathbb{V}$ liegt auch die Menge $\mathcal{P}(\omega)$ (siehe 5.211), deren Elemente man als Repräsentanten für die Punkte des Raumes nehmen kann, so dass man „in $\mathbb{V}$“ Geometrie treiben kann, ohne mit Mengen arbeiten zu müssen, die tatsächliche Punkte oder andere geometrische Objekte als Elemente haben. Schließlich kann man in $\mathbb{V}$ nahezu beliebige Mengenprozesse ausführen, ohne je aus $\mathbb{V}$ herauszukommen.[772] Man sollte jedoch im Auge behalten, dass es auch außerhalb von $\mathbb{V}$ Mengen gibt: und zwar noch weit mehr als innerhalb dieser gewissermaßen im „Mittelpunkt“ der Mengenwelt stehenden $\mathbb{V}$-Pyramide.[773] Die folgende Definition und das nachfolgende Theorem enthält die exakte Beschreibung und Begründung der vorstehenden Schilderung von $\mathbb{V}$.

5.29.3 Definition Für Elemente x von $\mathbb{V}$, Teilklassen T von $\mathbb{V}$ und Ordinalzahlen α sei

$\mathtt{rg}(x)$ [Lesart: Rang von x] $:\equiv$ das kleinste α aus $\mathtt{On}$ so dass $x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$.[774]

$\mathtt{Rb}(T)$ [Lesart: Rangbereich von T] $:\equiv \{\alpha \mid \alpha = \mathtt{rg}(x)$ für mindestens ein x aus $T\}$.

$\mathcal{R}_\alpha$ [Lesart: α-ter Rang] $:\equiv \{x \mid x \in \mathbb{V}$ und $\mathtt{rg}(x) = \alpha\}$.

Für $\mathtt{rg}(x) = \alpha$ (d. h. $x \in \mathcal{R}_\alpha$) sagt man: *x nimmt Rang α ein* und *α wird von x eingenommen.*

$\mathtt{Rb}(T)$ ist daher die Klasse der von Elementen von T eingenommenen Ränge.

5.29.4 Theorem Für Elemente x, y von $\mathbb{V}$, Teilklassen T von $\mathbb{V}$, Ordinalzahlen α, β und Limeszahlen λ gilt:

$x \in \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$ *und* $x \notin \mathbb{V}_\xi$ *für Ordinalzahlen* ξ *mit* $\xi \leq \mathtt{rg}(x)$ *und* $x \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$. (5.205)

$\alpha \in \mathbb{V}$ *und* $\mathtt{rg}(\alpha) = \alpha$, *d. h.* $\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$. (5.206)

$\mathbb{V}_\alpha = \{x \mid x \in \mathbb{V}$ *und* $\mathtt{rg}(x) < \alpha\}$, *und* $\alpha \in \mathbb{V}_\beta \leftrightarrow \alpha < \beta$. (5.207)

$\mathbb{V}_\alpha \cup \mathcal{R}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha+1}$, $\mathcal{R}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha+1} \setminus \mathbb{V}_\alpha$ *und* $\mathcal{R}_\alpha$ *ist eine Teilmenge von* $\mathbb{V}_{\alpha+1}$. (5.208)

$\mathcal{R}_0 = \{\emptyset\} = \{0\} = 1 = \mathbb{V}_1$, $\mathcal{R}_1 = \{\{\emptyset\}\} = \{1\}$ *und* $\mathcal{R}_2 = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\{1\}, 2\}$. (5.209)

Für Elemente u bzw. Teilklassen t von x gilt $\mathtt{rg}(u) < \mathtt{rg}(x)$ *bzw.* $\mathtt{rg}(t) \leq \mathtt{rg}(x)$. (5.210)

$\{x, y\} \in \mathbb{V}$, $\bigcup x \in \mathbb{V}$ *mit* $\mathtt{rg}(\bigcup x) \leq \mathtt{rg}(x)$, $\mathcal{P}(x) \in \mathbb{V}$ *mit* $\mathtt{rg}(\mathcal{P}(x)) = \mathtt{rg}(x) + 1$.[775] (5.211)

$T \in \mathbb{V} \leftrightarrow \mathtt{Rb}(T)$ *ist nach oben beschränkt.* (5.212)

$\mathtt{rg}(x)$ *ist die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als alle Elemente von* $\mathtt{Rb}(x)$. (5.213)

---

[772] Siehe hierzu die Sätze 5.195 S. 305, 5.199 S. 305 und 5.211 S. 308.

[773] Man könnte die Pyramide wie folgt erweitern: Ist B eine beliebige „Basisklasse“ von Urelementen, so kann man parallel zu den Teiluniversen $\mathbb{V}_\alpha$ die Universen $\mathbb{B}_\alpha$ durch $\mathbb{B}_0 := \emptyset$, $\mathbb{B}_{\alpha+1} := \mathcal{P}(\mathbb{B}_\alpha) \cup B$ und $\mathbb{B}_\lambda := \bigcup_{\chi \in \lambda} \mathbb{B}_\chi$ definieren. Das Analogon zu $\mathbb{V}$ ist dann die Vereinigung $\mathbb{B}$ aller $\mathbb{B}_\alpha$. In $\mathbb{B}$ kann man Rangstufen einführen, welche die Rangstufen von $\mathbb{V}$ erweitern: neben der leeren Menge haben auch die in B liegenden Urelemente den Rang 0. Insgesamt kann man $\mathbb{B}$ als einen auf dem Kopf stehenden stumpfen Kegel ansehen, der die Pyramide $\mathbb{V}$ in sich umfasst. Je größer nun die Basisklasse B ist, desto breiter wird die Basis des Kegels. Im Extremfall können wir als B die Unmenge $\mathbb{U}$ *aller Urelemente* (vgl. 5.15.20 S. 205) nehmen: dann bezeichnen wir die entsprechenden Mengen $\mathbb{B}_\alpha$ mit $\mathbb{D}_\alpha$, und an Stelle von $\mathbb{V}$ bzw. $\mathbb{B}$ tritt $\mathbb{D}_{wf}$: die Klasse, die außer den Urelementen alle wohlfundierten Mengen schlechthin enthält (siehe Definition 5.19.6 S. 254). $\mathbb{D}$ aber ist noch umfassender als $\mathbb{D}_{wf}$, weil $\mathbb{D}$ auch die nicht-wohlfundierten, „unendlich tiefen“ Mengen (siehe 5.168 S. 256) enthält.

[774] Dass es überhaupt ein α mit $x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$ gibt, ist klar: Wegen $x \in \mathbb{V}$ gibt es ein α mit $x \in \mathbb{V}_\alpha$, und wegen $\alpha < \alpha + 1$ ist dann nach Theorem 5.197 $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_{\alpha+1}$, also ist x auch Element von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$.

[775] $\mathcal{P}(x)$ bzw. $\bigcup x$ ist wohldefiniert, da x nach (5.196) eine Menge bzw. eine Mengenklasse ist.

$v \in \mathcal{R}_{\alpha+1} \leftrightarrow v$ liegt in $\mathcal{P}(\mathbb{V})$, für jedes u aus v ist $\mathtt{rg}(u) \leq \alpha$, und
für mindestens ein u aus v ist $\mathtt{rg}(u) = \alpha$. (5.214)

$v \in \mathcal{R}_{\lambda} \leftrightarrow v$ liegt in $\mathcal{P}(\mathbb{V})$, für jedes u aus v ist $\mathtt{rg}(u) < \lambda$ und
für jedes ξ mit $\xi < \lambda$ gibt es ein u aus v, so dass $\mathtt{rg}(u) > \xi$. (5.215)

Ist $\alpha \geq 1$, so folgt $\mathcal{R}_\alpha \prec \mathcal{R}_{\alpha+1}$. (5.216)

Ist $\alpha < \omega$, so enthält $\mathcal{R}_\alpha$ nur endliche Mengen; ist α Limeszahl, nur unendliche. (5.217)

$\mathbb{V}$ ist eine mit $\mathtt{On}$ gleichmächtige Unmenge, d. h. gehört zur Klassenstufe $\llbracket\Omega\rrbracket$. (5.218)

Beweis. Siehe Anhang S. 458–462. □

$\mathbb{V}$ und alle Klassen $\mathbb{V}_\alpha$ für $\alpha > 1$ sind $\in$-transitiv und enthalten die Zahlen 0 und 1,[776] so dass $\mathbb{V}$ und alle $\mathbb{V}_\alpha$ (für $\alpha > 1$) *Modelle* der Mengenlehre im Sinne von Erklärung 5.8.7 S. 110 sind. Bevor wir diese besonders wichtigen Modelle betrachten, sei kurz zusammengefasst, welche Axiome nach den bisherigen Ergebnissen in jedem Modell gelten:

5.29.5 Metatheorem *In jedem Modell $\mathbb{G}$ gilt das Rahmen–, Extensionalitäts–, Komprehensions–, Nullmengen– und Auswahlaxiom.*

Beweis. Siehe die Bemerkungen nach den genannten Axiomen.[777] □ Über die absolute Bedeutung der wichtigsten mengentheoretischen Begriffe in beliebigen Modellen gibt bereits Satz 5.9.2 S. 116 Auskunft; wir ergänzen diesen noch durch das folgende Metatheorem (hier und in den folgenden Metatheoremen sollen Ausdrücke ohne den Zusatz «in $\mathbb{G}$» bzw. «in $\mathbb{V}$» bzw. «in $\mathbb{V}_\alpha$», stets die Bedeutung haben, die sie im Standardmodell $\mathbb{D}$ besitzen):

5.29.6 Metatheorem Sei $\mathbb{G}$ ein Modell, und «A», «B», «$\mathfrak{M}$» mögen in den Modellen $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ jeweils dasselbe Objekt bezeichnen, und zwar «A» und «B» eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, und «$\mathfrak{M}$» eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, die eine Mengenklasse ist. Dann gilt:

Die «Teilklassen» eines $\mathbb{G}$-Objekts sind in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselben. (5.219)

Die «$\in$-minimalen Elemente» eines $\mathbb{G}$-Objekts sind in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dieselben. (5.220)

In $\mathbb{G}$ bezeichnet «$\mathbb{M}$» bzw. «$\mathbb{U}$» die Klasse $\mathbb{M} \cap \mathbb{G}$ bzw. $\mathbb{U} \cap \mathbb{G}$. (5.221)

Die «Mengenklassen» in $\mathbb{G}$ sind die Mengenklassen, die Teilklassen von $\mathbb{G}$ sind. (5.222)

Die «Mengenmengen» in $\mathbb{G}$ sind die Mengenmengen, die Elemente von $\mathbb{G}$ sind. (5.223)

Die «Ordinalzahlen» in $\mathbb{G}$ sind die Ordinalzahlen, die Elemente von $\mathbb{G}$ sind. (5.224)

In $\mathbb{G}$ bezeichnet «$\mathcal{P}(A)$» die Klasse $\mathcal{P}(A) \cap \mathbb{G}$. (5.225)

«$A \cup B$», «$A \cap B$», «$A \setminus B$» und «$\bigcup \mathfrak{M}$» bezeichnet jeweils in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe. (5.226)

«A ist vor-induktiv» bedeutet in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe. (5.227)

Beweis. Siehe Anhang S. 462–464. □ Die kumulativen Universen $\mathbb{V}$ und $\mathbb{V}_\alpha$ weisen nun als Modelle zwei Besonderheiten auf. Zum einen gilt in ihnen das Fundierungsaxiom (5.19.4 S. 254), das wir für die allgemeine Mengenlehre abgelehnt haben, und zum anderen gilt in ihnen anstelle des *Axioms für Urelemente* das sog. *Reinheitsaxiom*, *dass es keine Urelemente gibt*. Daher fällt hier der Begriff des «Individuums» mit dem Begriff der «Menge» zusammen:

[776] Dies folgt aus den Sätzen 5.195, 5.206 und 5.207.

[777] Siehe 5.9.4 S. 117, 5.9.5 S. 118, 5.9.7 S. 118, 5.9.13 S. 119 und 5.11.8 S. 156.

5.29.7 Metatheorem Sei $\mathbb{V}_*$ das Modell $\mathbb{V}$ oder $\mathbb{V}_\alpha$ (für ein $\alpha > 1$).
In $\mathbb{V}_*$ gilt das Reinheitsaxiom.
In $\mathbb{V}_*$ sind Individuen und Mengen ein und dasselbe: nämlich Elemente von $\mathbb{V}_*$.
In $\mathbb{V}_*$ gilt das Fundierungsaxiom.

Beweis. Die Urelemente des Modells $\mathbb{V}_*$ sind gemäß Satz 5.12 S. 116 auch im absoluten Sinn Urelemente und daher Nichtklassen. Demgegenüber sind nach Satz 5.196 alle Elemente von $\mathbb{V}_*$ Klassen. Also gibt es im Modell $\mathbb{V}_*$ keine Urelemente, d. h. es gilt das Reinheitsaxiom.
Nach Definition 5.9.1 S. 115 ist ein Individuum entweder eine Menge oder ein Urelement.[778] Weil also ein Individuum x im Modell $\mathbb{V}_*$ kein Urelement dieses Modells ist, ist x in $\mathbb{V}_*$ eine Menge. Ist umgekehrt x im Modell $\mathbb{V}_*$ eine Menge, so ist x dort nach Definition 5.9.1 auch ein Individuum. So stimmen die Mengen und die Individuen im Modell $\mathbb{V}_*$ genau überein, und die Individuen des Modells wiederum sind nach Satz 5.8 S. 116 genau die Elemente von $\mathbb{V}_*$.
Schließlich gilt in $\mathbb{V}_*$ das Fundierungsaxiom.[779] □
In $\mathbb{V}_*$ gelten noch zwei weitere unserer Axiome, wie die nächsten beiden Korollare zeigen werden. Zunächst definieren wir:

5.29.8 Theorem und Definition Eine Klasse $\mathbb{G}$ heißt *$\subset$-treu*, wenn alle Teilklassen von in $\mathbb{G}$ liegenden Mengen M ebenfalls in $\mathbb{G}$ liegen, also aus $X \subseteq M \in \mathbb{G}$ stets $X \in \mathbb{G}$ folgt.[780]
Zu den $\subset$-treuen Klassen gehören $\mathbb{V}$ und $\mathbb{V}_\alpha$ für jede Ordinalzahl α.

Beweis. Siehe Satz 5.199 S. 305. □

5.29.9 Metatheorem *In jedem $\subset$-treuen Modell $\mathbb{G}$ gilt das Teilmengenaxiom.*

Beweis. Sei M eine Menge in $\mathbb{G}$, das heißt (nach Satz 5.11 S. 116) ein Element von $\mathbb{G}$, das eine Menge ist. Sei ferner T (in $\mathbb{G}$) eine Teilklasse von M, so gilt wegen Satz 5.219, dass T auch im Standardmodell Teilklasse von M ist. Wegen des hier gültigen Teilmengenaxioms ist also T eine Menge. Nun ist T wegen der $\subset$-Treue von $\mathbb{G}$ auch ein Element von $\mathbb{G}$, insgesamt also ein Element von $\mathbb{G}$, das eine Menge ist, und somit nach Satz 5.11 auch eine Menge im Modell $\mathbb{G}$. □

5.29.10 Korollar *Das Teilmengenaxiom gilt in $\mathbb{V}$ und in jedem $\mathbb{V}_\alpha$ für $\alpha > 1$.*

Beweis. Dies folgt mittels Theorem 5.29.8 aus Metatheorem 5.29.9. □

5.29.11 Theorem und Definition Eine Klasse $\mathbb{G}$ heißt *$\bigcup$-treu*, wenn zu jeder in $\mathbb{G}$ liegenden Mengenmenge $\mathfrak{M}$ auch $\bigcup \mathfrak{M}$ in $\mathbb{G}$ liegt, also aus $\mathfrak{M} \in \mathbb{G}$ stets $\bigcup \mathfrak{M} \in \mathbb{G}$ folgt.[781]
Zu den $\bigcup$-treuen Klassen gehören $\mathbb{V}$ und $\mathbb{V}_\alpha$ für jedes $\alpha > 1$.

---

[778] Definitionen gelten simultan für *jedes* Modell (siehe S. 115), daher ist hier gemeint: *ein Individuum* (in einem Modell, z. B. $\mathbb{V}_*$) *ist entweder eine Menge* (dieses Modells) *oder ein Urelement* (dieses Modells).

[779] Das Fundierungsaxiom (5.19.4 S. 254) ist die Behauptung, dass jede nichtleere Mengenmenge $\mathfrak{M}$ ein Element M hat, so dass $M \cap \mathfrak{M} = \emptyset$. Wegen den Sätzen 5.6 und 5.4 S. 116 sowie 5.223 und 5.226 S. 309 können wir diese Behauptung im Standardmodell so ausdrücken: Jede nichtleere Mengenmenge $\mathfrak{M}$, die *Element von $\mathbb{V}_*$ ist*, besitzt ein Element M, so dass $M \cap \mathfrak{M} = \emptyset$. Dies lässt sich wie folgt beweisen: Wegen $\mathfrak{M} \in \mathbb{V}_*$ und der $\in$-Transitivität von $\mathbb{V}_*$ sind alle Elemente von $\mathfrak{M}$ auch solche von $\mathbb{V}_*$, liegen also in $\mathbb{V}$ und haben einen Rang. Da $\mathfrak{M}$ nichtleer ist, ist auch die Klasse aller Ordinalzahlen, welche als Ränge von Elementen von $\mathfrak{M}$ auftreten, nichtleer. Sie besitzt also ein Minimum α. Dieses α ist dann eine Ordinalzahl, welche als Rang (mindestens) eines Elements M von $\mathfrak{M}$ fungiert, derart dass es in $\mathfrak{M}$ kein Element mehr gibt, dessen Rang noch kleiner als α wäre. Dann kann es aber auch kein X aus $\mathfrak{M}$ geben, derart dass $X \in M$ (denn aus $X \in M$ würde gemäß Satz 5.210 folgen, dass $\mathtt{rg}(X) < \mathtt{rg}(M)$). Also gibt es kein gemeinsames Element von $\mathfrak{M}$ und M, und so ist $M \cap \mathfrak{M} = \emptyset$. □

[780] Formal: $\mathbb{G}$ (ist) $\subset$-treu $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{G}$ Klasse $\wedge \bigwedge_{X\,M} (X \subseteq M \in \mathbb{G} \rightarrow X \in \mathbb{G})$.

[781] Formal: $\mathbb{G}$ (ist) $\bigcup$-treu $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{G}$ Klasse $\wedge \bigwedge_{\mathfrak{M} \in \mathbb{M}} (\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{M} \wedge \mathfrak{M} \in \mathbb{G} \rightarrow \bigcup \mathfrak{M} \in \mathbb{G})$.

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 5.211 und 5.207.[782] □

5.29.12 Metatheorem *In jedem $\bigcup$-treuen Modell $\mathbb{G}$ gilt das Vereinigungsmengenaxiom.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ Mengenmenge in $\mathbb{G}$, also nach Satz 5.223 ein Element von $\mathbb{G}$, das eine Mengenmenge ist. Wegen des im Standardmodell gültigen Vereinigungsmengenaxioms ist dann $\bigcup\mathfrak{M}$ eine Menge, wobei $\bigcup\mathfrak{M}$ im Modell $\mathbb{G}$ wegen Satz 5.226 dasselbe Objekt ist wie im Standardmodell. Dieses ist nun aber wegen der $\bigcup$-Treue von $\mathbb{G}$ Element von $\mathbb{G}$. Insgesamt ist $\bigcup\mathfrak{M}$ also ein Element von $\mathbb{G}$, das eine Menge ist, somit nach Satz 5.11 S. 116 auch eine Menge in $\mathbb{G}$. □

5.29.13 Korollar *Das Vereinigungsmengenaxiom gilt in $\mathbb{V}$ und jedem $\mathbb{V}_\alpha$ für $\alpha > 1$.*

Beweis. Dies folgt mittels Theorem 5.29.11 aus Metatheorem 5.29.12. □

5.29.14 Theorem und Definition Eine Klasse $\mathbb{G}$ heißt *$\mathcal{P}$-treu*, wenn zu jeder in $\mathbb{G}$ liegenden Menge M auch $\mathcal{P}(M)$ in $\mathbb{G}$ liegt, also aus $M \in \mathbb{G}$ stets $\mathcal{P}(M) \in \mathbb{G}$ folgt.[783]
Zu den $\mathcal{P}$-treuen Klassen gehören $\mathbb{V}$ und $\mathbb{V}_\lambda$ für jede Limeszahl λ.

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 5.211 und 5.207.[784]

5.29.15 Metatheorem Sei $\mathbb{G}$ $\subset$-treues Modell, und bezeichne $\ll M \gg$ in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe: und zwar (im Standardmodell) eine in $\mathbb{G}$ liegende Menge.[785] *Dann bezeichnet auch $\ll \mathcal{P}(M) \gg$ in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe.*

Beweis. Aus $M \in \mathbb{G}$ und der $\subset$-Treue von $\mathbb{G}$ folgt, dass die Elemente von $\mathcal{P}(M)$, (die Teilmengen von M) auch Elemente von $\mathbb{G}$ sind, also $\mathcal{P}(M)$ Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist. Da die Schnittklasse einer Teilklasse T von $\mathbb{G}$ mit $\mathbb{G}$ stets mit T identisch ist, gilt $\mathcal{P}(M) \cap \mathbb{G} = \mathcal{P}(M)$. Weil aber $\ll \mathcal{P}(M) \gg$ im Modell $\mathbb{G}$ nach 5.225 die Klasse $\mathcal{P}(M) \cap \mathbb{G}$ bezeichnet, bezeichnet also $\ll \mathcal{P}(M) \gg$ in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselbe Klasse. □

5.29.16 Metatheorem *In jedem $\subset$- und $\mathcal{P}$-treuen Modell $\mathbb{G}$ gilt das Potenzmengenaxiom.*

Beweis. Sei M eine Menge des Modells $\mathbb{G}$, also nach Satz 5.11 S. 116 ein Element von $\mathbb{G}$, das eine Menge ist. Wegen des im Standardmodell gültigen Potenzmengenaxioms ist $\mathcal{P}(M)$ eine Menge, und wegen der $\mathcal{P}$-Treue von $\mathbb{G}$ ist $\mathcal{P}(M)$ Element von $\mathbb{G}$, insgesamt ist also $\mathcal{P}(M)$ wegen Satz 5.11 S. 116 eine Menge des Modells $\mathbb{G}$. Da schließlich $\ll \mathcal{P}(M) \gg$ wegen Metatheorem 5.29.15 im Modell $\mathbb{G}$ dasselbe Objekt bezeichnet wie im Standardmodell, gilt auch im Modell $\mathbb{G}$: $\ll \mathcal{P}(M)$ ist eine Menge$\gg$. □

5.29.17 Korollar *Das Potenzmengenaxiom gilt in $\mathbb{V}$ und in jedem $\mathbb{V}_\lambda$ mit Limeszahl λ.*

Beweis. Dies folgt wegen Theorem 5.29.8 und 5.29.14 aus Metatheorem 5.29.16. □

5.29.18 Theorem und Definition Eine Klasse $\mathbb{G}$ heißt *paartreu*, wenn für in $\mathbb{G}$ liegende Elemente x, y stets auch $\{x, y\}$ in $\mathbb{G}$ liegt, also aus $x \in \mathbb{G}$ und $y \in \mathbb{G}$ stets $\{x, y\} \in \mathbb{G}$ folgt.[786]

---

[782] Die $\bigcup$-Treue von $\mathbb{V}$ ist direkt in Satz 5.211 ausgesagt. Für $\mathbb{V}_\alpha$ zeigt sie sich wie folgt. Ist $\mathfrak{M}$ Element von $\mathbb{V}_\alpha$, so gilt nach Satz 5.207, dass $\mathfrak{M} \in \mathbb{V}$ und $\mathtt{rg}(\mathfrak{M}) < \alpha$. Nach Satz 5.211 ist aber $\bigcup\mathfrak{M}$ Element von $\mathbb{V}$ mit $\mathtt{rg}(\bigcup\mathfrak{M}) \leq \mathtt{rg}(\mathfrak{M})$, also ergibt sich $\mathtt{rg}(\bigcup\mathfrak{M}) < \alpha$, und nach Satz 5.207 daher $\bigcup\mathfrak{M} \in \mathbb{V}_\alpha$.

[783] Formal: $\mathbb{G}$ (ist) $\mathcal{P}$-treu $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{G}$ Klasse $\wedge \bigwedge_{M \in \mathbb{M}} (M \in \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{P}(M) \in \mathbb{G})$.

[784] Für $\mathbb{V}$ ist die $\mathcal{P}$-Treue durch 5.211 direkt ausgesagt. Für $\mathbb{V}_\lambda$ zeigt sie sich wie folgt. Ist $M \in \mathbb{V}_\lambda$, so gilt nach 5.207, dass $M \in \mathbb{V}$ und $\mathtt{rg}(M) < \lambda$, und da λ eine Limeszahl ist, gilt auch $\mathtt{rg}(M) + 1 < \lambda$. Nach 5.211 ist aber $\mathcal{P}(M)$ Element von $\mathbb{V}$ mit $\mathtt{rg}(\mathcal{P}(M)) = \mathtt{rg}(M) + 1$, also ist $\mathtt{rg}(\mathcal{P}(M)) < \lambda$, und nach 5.207 gilt $\mathcal{P}(M) \in \mathbb{V}_\lambda$.

[785] Zum Beispiel kann M eine Variable sein, die man in beiden Modellen als Bezeichnung für dieselbe in $\mathbb{G}$ gelegene Menge interpretiert.

[786] Formal: $\mathbb{G}$ (ist) paartreu $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{G}$ Klasse $\wedge \bigwedge_{xy} (x \in \mathbb{G} \wedge y \in \mathbb{G} \rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbb{G})$.

Zu den paartreuen Klassen gehören $\mathbb{V}$ *und* $\mathbb{V}_\lambda$ *für jede Limeszahl* λ.

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 5.211, 5.207 und 5.213.[787]

5.29.19 Metatheorem *In jedem paartreuen Modell* $\mathbb{G}$ *gilt das Paarmengenaxiom.*

Beweis. Seien a, b Individuen (in $\mathbb{G}$), das heißt nach Satz 5.8 S. 116 Elemente von $\mathbb{G}$. Wegen des im Standardmodell gültigen Paarmengenaxioms ist dann $\{x, y\}$ eine Menge, wobei $\{x, y\}$ wegen Satz 5.7 S. 116 im Modell $\mathbb{G}$ dasselbe Objekt ist wie im Standardmodell. Nun ist wegen der Paartreue $\{x, y\}$ ein Element von $\mathbb{G}$. So ist $\{x, y\}$ insgesamt ein Element von $\mathbb{G}$, das eine Menge ist, und somit nach Satz 5.11 S. 116 auch im Modell $\mathbb{G}$ eine Menge. □

5.29.20 Korollar *Das Paarmengenaxiom gilt in* $\mathbb{V}$ *und in jedem* $\mathbb{V}_\lambda$ *mit Limeszahl* λ.

Beweis. Dies folgt mittels Theorem 5.29.18 aus Metatheorem 5.29.19. □

Bemerkung. Das Paarmengen– und Potenzmengenaxiom ist dagegen in kumulativen Universen $\mathbb{V}_{\xi+1}$ (deren Index also eine *Sukzessorzahl* $\xi + 1$ ist) *nicht* gültig.[788]

5.29.21 Metatheorem Sei $\mathbb{G}$ ein paartreues Modell und bezeichne $\ll a \gg$, $\ll b \gg$, $\ll A \gg$, $\ll B \gg$, $\ll p \gg$, $\ll R \gg$ und $\ll f \gg$ in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ jeweils dasselbe Objekt: und zwar $\ll x \gg$ und $\ll y \gg$ ein Element von $\mathbb{G}$, $\ll A \gg$ und $\ll B \gg$ eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, $\ll p \gg$ ein Element von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, $\ll R \gg$ eine Relation, die Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist, und $\ll f \gg$ eine Funktion, die Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist. Dann gilt:

$\ll \langle a, b \rangle \gg$ bezeichnet in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dasselbe Element von $\mathbb{G}$. (5.228)

$\ll$Individuenpaare$\gg$ in $\mathbb{G}$ sind Individuenpaare, deren Komponenten in $\mathbb{G}$ liegen. (5.229)

Die $\ll$1-te$\gg$ bzw. $\ll$2-te Komponente$\gg$ von p ist in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselbe. (5.230)

$\ll A \times B \gg$ bezeichnet in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dasselbe. (5.231)

Die $\ll$Relationen$\gg$ des Modells $\mathbb{G}$ sind die Teilklassen von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$. (5.232)

Die Relation $\ll R \gg$ führt in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselben Zuordnungen aus. (5.233)

Die $\ll$Funktionen$\gg$ in $\mathbb{G}$ sind die Funktionen, die Teilklassen von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ sind. (5.234)

Die $\ll$Injektionen$\gg$ in $\mathbb{G}$ sind die Injektionen, die Teilklassen von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ sind. (5.235)

$\ll \mathtt{Db}(f) \gg$, $\ll \mathtt{Wb}(f) \gg$ und $\ll f(x) \gg$ bezeichnet jeweils in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe. (5.236)

Die Ausdrücke $\ll A \sim B \gg$ und $\ll A$ ist unendlich$\gg$ bedeuten in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe. (5.237)

Die $\ll$unendlichen Mengen$\gg$ in $\mathbb{G}$ sind die in $\mathbb{G}$ liegenden unendlichen Mengen. (5.238)

Beweis. Siehe Anhang S. 464–466. □ Interessant sind nun Modelle, die zugleich Paar– und $\bigcup$-treu sind. Für diese können wir zeigen:

---

787 Für $\mathbb{V}$ ist die Paartreue durch 5.211 ausgesagt. Für $\mathbb{V}_\lambda$ zeigt sie sich wie folgt. Sind x, y Elemente von $\mathbb{V}_\lambda$, so gilt nach 5.207, dass $x \in \mathbb{V}$, $y \in \mathbb{V}$, $\mathtt{rg}(x) < \lambda$ und $\mathtt{rg}(y) < \lambda$. Da x und y in $\mathbb{V}$ liegen, folgt per Paartreue von $\mathbb{V}$, dass $\{x, y\} \in \mathbb{V}$, und da λ eine Limeszahl ist, folgt $\mathtt{rg}(x) + 1 < \lambda$ und $\mathtt{rg}(y) + 1 < \lambda$. Da nach 5.213 der Rang $\mathtt{rg}(\{x, y\})$ eine der beiden Zahlen $\mathtt{rg}(x) + 1$ oder $\mathtt{rg}(y) + 1$ ist, gilt in jedem Fall $\mathtt{rg}(\{x, y\}) < \lambda$, und zusammen mit $\{x, y\} \in \mathbb{V}$ heißt dies wegen 5.207, dass $\{x, y\} \in \mathbb{V}_\lambda$.

788 Als Gegenbeispiel zum Potenzmengenaxiom in $\mathbb{V}_{\xi+1}$ betrachte man eine Menge M vom Rang ξ. Diese ist Element von $\mathbb{V}_{\xi+1}$, also nach Theorem 5.29.7 eine Menge im Modell $\mathbb{V}_{\xi+1}$, aber $\ll \mathcal{P}(M) \gg$ (was nach Metatheorem 5.29.15 in $\mathbb{V}_{\xi+1}$ und in $\mathbb{D}$ dasselbe Objekt bezeichnet, da $\mathbb{V}_{\xi+1}$ nach Theorem 5.29.8 zu den $\subset$-treuen Modellen gehört) hat nach 5.211 den Rang $\xi + 1$ und ist daher kein Element von $\mathbb{V}_{\xi+1}$ mehr, erst recht also keine Menge im Modell $\mathbb{V}_{\xi+1}$. Analog scheitert auch das Paarmengenaxiom in $\mathbb{V}_{\xi+1}$, weil für x und y vom Rang ξ der Rang von $\ll \{x, y\} \gg$ (was nach Satz 5.7 S. 116 in $\mathbb{V}_{\xi+1}$ und in $\mathbb{D}$ dasselbe Objekt bezeichnet) wegen 5.213 gleich $\xi + 1$ ist, und somit $\{x, y\}$ keine Menge des Modells $\mathbb{V}_{\xi+1}$ ist.

5.29.22 Metatheorem Sei $\mathbb{G}$ paar– und $\bigcup$-treues Modell. Dann gilt:

«ω» bezeichnet in $\mathbb{G}$ dasselbe wie in $\mathbb{D}$, und zwar eine Teilklasse von $\mathbb{G}$. (5.239)

Ist $\omega \in \mathbb{G}$, so gilt in $\mathbb{G}$ das Unendlichkeitsaxiom. (5.240)

Im Modell $\mathbb{G}$ gilt das Antizirkularitätsaxiom. (5.241)

Beweis. Siehe Anhang S. 466–467. □

5.29.23 Korollar *Das Antizirkularitätsaxiom gilt in $\mathbb{V}$ und in jedem $\mathbb{V}_\lambda$ mit Limeszahl λ.*

Beweis. Dies folgt mittels der Theoreme 5.29.11 und 5.29.18 aus Satz 5.241. □

Bemerkung. In allen $\mathbb{V}_\alpha$ für $\alpha > 1$ gilt das Fundierungsaxiom (Theorem 5.29.7), woraus man bereits *inhaltlich* das erschließen kann, was mit dem Antizirkularitätsaxiom gesagt werden soll: dass niemals $x \in x$, niemals $x \in a \in x$, niemals $x \in a \in b \in x$ usw. gilt (siehe S. 254). Dies muss natürlich auch sogar *in jedem beliebigen Modell gelten*, denn wann immer $x \in y$ in einem Modell $\mathbb{G}$ gilt, gilt dies wegen Satz 5.4 S. 116 auch im Hintergrundmodell $\mathbb{D}$, und so hätte z. B. die Gültigkeit von $x \in x$ im Modell $\mathbb{V}_\alpha$ auch die Gültigkeit von $x \in x$ im Modell $\mathbb{D}$ zur Folge (was falsch ist). Das muss jedoch nicht heißen, dass das Antizirkularitätsaxiom *auch formal* (d. h. so, wie wir es *formuliert* haben) in jedem Modell gültig ist. Da in unserer Formulierung der Ausdruck «geschlossene Mengenketten» verwendet wurde und in der formalen Definition dieses Ausdrucks von «$\langle x, y\rangle$» und «ω» die Rede war, ist die formale Gültigkeit des Antizirkularitätsaxioms nur in Modellen gesichert, in denen diese Ausdrücke dieselbe Bedeutung wie im Standardmodell haben. Dies konnten wir aber nur für $\bigcup$– und zugleich paartreue Modelle zeigen, zu denen die $\mathbb{V}_\lambda$ mit einer Limeszahl als Index gehören.

Zusammenfassend ergibt sich aus dem Metatheorem 5.29.5 und den Korollaren 5.29.10, 5.29.13, 5.29.17, 5.29.20 und 5.29.23 über die Gültigkeit unserer Axiome in kumulativen Universen:

5.29.24 Metatheorem *In $\mathbb{V}$ und jedem $\mathbb{V}_\lambda$ mit einer Limeszahl λ* (insbesondere in $\mathbb{V}_\omega$) *gelten alle klassischen Axiome*[789] *bis auf das Unendlichkeits– und das Ersetzungsaxiom.*

Bemerkung. $\mathbb{V}_\omega$ ist auch das „kleinste“ Universum, in dem alle diese Axiome gelten, denn aufgrund der Bemerkung nach Korollar 5.29.20 muss man in allen $\mathbb{V}_\alpha$ mit $\alpha < \omega$ das Potenzmengen– und das Paarmengenaxiom streichen.

5.29.25 Metatheorem *Das Unendlichkeitsaxiom gilt nicht in $\mathbb{V}_\omega$, wohl aber in $\mathbb{V}$ und jedem $\mathbb{V}_\lambda$ mit Limeszahlen λ, die größer als ω sind.*

Beweis. Die Universen $\mathbb{V}$ und $\mathbb{V}_\lambda$ für Limeszahlen λ gehören zu den $\bigcup$– und paartreuen Modellen (siehe 5.29.11 und 5.29.18). In $\mathbb{V}$ sowie in den $\mathbb{V}_\lambda$ *für Limeszahlen λ, die größer als ω sind*, ist außerdem die Zahl ω enthalten.[790] Also gilt hier das Unendlichkeitsaxiom wegen Satz 5.240. Was aber $\mathbb{V}_\omega$ betrifft, so ist diese Klasse zwar selbst unendlich, aber sie enthält nur endliche Mengen,[791] so dass man wegen Satz 5.238 im Modell $\mathbb{V}_\omega$ konstatieren muss: «es gibt keine unendliche Menge». □

Kombinieren wir die Metatheoreme 5.29.25 und 5.29.24, so ergibt sich, dass die zweitkleinste Limeszahl $\omega 2$ der kleinste Index eines kumulativen Universums ist, in dem alle bisherigen Axiome außer dem Ersetzungsaxiom und dem nicht-klassischen Axiom für Urelemente gelten:

---

789 Zu diesen zähle ich alle bisher aufgestellten bis auf dasjenige für Urelemente (siehe S. 257).

790 Siehe die Sätze 5.206 und 5.207.

791 Nach Satz 5.207 liegen in $\mathbb{V}_\omega$ die Elemente von $\mathbb{V}$ mit Rang $< \omega$, und diese sind nach Satz 5.217 alle endlich.

5.29.26 Metatheorem *$\mathbb{V}_{\omega 2}$ ist das kleinste kumulative Universum, in dem alle klassischen Axiome der Mengenlehre außer dem Ersetzungsaxiom gelten.*

5.29.27 Theorem und Definition Eine Klasse $\mathbb{G}$ heißt *funktionstreu*, wenn für Funktionen f mit $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{G}$ und $\mathtt{Wb}(f) \subseteq \mathbb{G}$ stets $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{G}$ folgt.[792]
Zu den funktionstreuen Klassen gehören $\mathbb{D}$, $\mathbb{V}$ und $\mathbb{V}_\omega$.

Beweis. Für $\mathbb{D}$ folgt dies sofort aus dem Ersetzungsaxiom,[793] für $\mathbb{V}$ aus diesem und Satz 5.212,[794] und für $\mathbb{V}_\omega$ ist zusätzlich Korollar 5.17.34 S. 244 heranzuziehen.[795] □

5.29.28 Metatheorem *In jedem paartreuen Modell $\mathbb{G}$ gilt das Ersetzungsaxiom dann und nur dann, wenn $\mathbb{G}$ funktionstreu ist.*

Beweis. Sei $\mathbb{G}$ funktionstreu und f im Modell $\mathbb{G}$ eine Funktion, die eine Menge als Definitionsbereich hat. Dann ist f im Standardmodell wegen Satz 5.234, 5.236 und 5.11 S. 116 eine Funktion mit $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{G}$, die Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist, so dass ihre Werte in $\mathbb{G}$ liegen. Per Funktionstreue gilt dann $\mathtt{Wb}(f) \in G$, und nach dem Ersetzungsaxiom der allgemeinen Mengenlehre ist $\mathtt{Wb}(f)$ eine Menge. Nach Satz 5.11 ist daher $\mathtt{Wb}(f)$ auch in $\mathbb{G}$ eine Menge. Also gilt das Ersetzungsaxiom in $\mathbb{G}$.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass das Ersetzungsaxiom in $\mathbb{G}$ gilt, so zeigt sich wie folgt, dass $\mathbb{G}$ funktionstreu ist: Sei nämlich f eine Funktion mit Werten in $\mathbb{G}$ und $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{G}$. Aus $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{G}$ folgt per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$, dass auch jedes Element von $\mathtt{Db}(f)$ in $\mathbb{G}$ liegt. So liegen die Argumente von f ebenso wie die Werte in $\mathbb{G}$, so dass f Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ und nach Satz 5.234 eine Funktion im Modell $\mathbb{G}$ darstellt. Weiter folgt nun aus $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{G}$, dass $\mathtt{Db}(f)$ als Element einer Klasse ein Individuum, also eine Menge ist: und als Menge, die Element von $\mathbb{G}$ ist, nach Satz 5.11 S. 116 auch eine Menge in $\mathbb{G}$. Nach dem vorausgesetzten Ersetzungsaxiom im Modell $\mathbb{G}$ folgt also, das auch $\mathtt{Wb}(f)$ im Modell $\mathbb{G}$ eine Menge ist: d. h. im Standardmodell eine Menge, die Element von $\mathbb{G}$ ist. So ist $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{G}$, und $\mathbb{G}$ ist als funktionstreu erwiesen. □

5.29.29 Korollar *Das Ersetzungsaxiom gilt in $\mathbb{V}$ und in $\mathbb{V}_\omega$.*

Beweis. Dies folgt mittels 5.29.18 und 5.29.27 aus Metatheorem 5.29.28. □
Über das kumulative Mengenuniversum $\mathbb{V}$ können wir nun zusammenfassend feststellen:

5.29.30 Theorem *Im Modell $\mathbb{V}$ gelten alle klassischen Axiome der Mengenlehre.*

Folglich gelten im Modell $\mathbb{V}$ auch *alle* unsere bisherigen Theoreme, abgesehen von dem aus dem „nichtklassischen“ Axiom 5.15.20 für Urelemente abgeleiteten Korollar 5.15.21. So lässt sich also fast die gesamte mathematische Theorie ebenso gut in $\mathbb{V}$ wie in $\mathbb{D}$ darstellen. Nun ist allerdings $\mathbb{V}$

---

792 Formal: $\mathbb{G}$ (ist) funktionstreu $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{G}$ Klasse $\wedge$ $\bigwedge_f (f \text{ Funktion} \wedge \mathtt{Db}(f) \in \mathbb{G} \wedge \mathtt{Wb}(f) \subseteq \mathbb{G} \rightarrow \mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{G})$.

793 Wenn $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{D}$, so ist die Klasse $\mathtt{Db}(f)$ Individuum, also eine Menge. Per Ersetzungsaxiom ist dann auch $\mathtt{Wb}(f)$ eine Menge, also ein Individuum, und somit $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{D}$.

794 Sei f Funktion mit $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{V}$ und Werten in $\mathbb{V}$, so ist $\mathtt{Wb}(f)$ nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge. Sei g die Funktion mit Definitionsbereich $\mathtt{Wb}(f)$, die jedes Element x von $\mathtt{Wb}(f)$ auf $\mathtt{rg}(x)$ wirft. Nach dem Ersetzungsaxiom ist auch $\mathtt{Wb}(g)$ eine Menge, und diese ist die Klasse aller von den Elementen von $\mathtt{Wb}(f)$ eingenommenen Ränge, also $\mathtt{Wb}(g) = \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$. So ist $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ eine Menge von Ordinalzahlen, so dass $\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ nach Satz 5.81 S. 192 eine Ordinalzahl, und zwar das Supremum von $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ ist. Die Existenz des Supremums zeigt, dass $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ nach oben beschränkt ist, und so folgt mittels Satz 5.212, dass $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{V}$.

795 Ist f Funktion mit $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{V}_\omega$ und Werten in $\mathbb{V}_\omega$, so folgt aus $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{V}_\omega$ nach Satz 5.207, dass $\mathtt{rg}(\mathtt{Db}(f)) < \omega$, also ist $\mathtt{Db}(f)$ wegen Satz 5.217 eine endliche Menge. Nach Korollar 5.17.34 S. 244 ist dann auch $\mathtt{Wb}(f)$ endlich. Da die Elemente von $\mathtt{Wb}(f)$ in $\mathbb{V}_\omega$ liegen, also einen Rang $< \omega$ haben, ist $\mathtt{Wb}(f)$ nach Satz 5.212 ein Element von $\mathbb{V}$ und hat nach Satz 5.213 einen Rang $\leq \omega$, also entweder $= \omega$ oder $< \omega$. Wäre nun $\mathtt{rg}(\mathtt{Wb}(f)) = \omega$, so wäre $\mathtt{Wb}(f) \in \mathcal{R}_\omega$, also müsste $\mathtt{Wb}(f)$ nach Satz 5.217 unendlich sein (weil ω Limeszahl ist). Da dies falsch ist, ist also $\mathtt{rg}(\mathtt{Wb}(f)) < \omega$. Zusammen mit $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{V}$ heißt dies gemäß Satz 5.207, dass $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{V}_\omega$.

eine Unmenge, und es fragt sich, ob auch eine der *Mengen* $\mathbb{V}_\alpha$ die Eigenschaft hat, dass in ihr bereits alle klassischen Axiome gelten.

Das kleinste kumulative Universum $\mathbb{V}_{\omega 2}$, für das wir feststellen konnten, dass in ihm alle vom Ersetzungsaxiom verschiedenen klassischen Axiome gelten, ist jedenfalls *nicht* funktionstreu,[796] so dass hier das Ersetzungsaxiom *nicht* gilt. Die Hinzunahme des Ersetzungsaxioms zu den übrigen erzwingt daher, dass ein kumulatives Universum, in dem alle diese Axiome gelten sollen, einen Index größer als $\omega 2$ haben muss, weshalb man sagt, dass das Ersetzungsaxiom das „stärkste" Axiom der klassischen Mengenlehre ist.[797] Wie wir in Abschnitt 5.31 sehen werden, gibt es auch Ordinalzahlen α mit der Eigenschaft, dass in $\mathbb{V}_\alpha$ *alle* klassischen Axiome gelten.[798] Diese Ordinalzahlen, die sog. „unerreichbaren Kardinalzahlen", sind jedoch nahezu unvorstellbar groß.

[796] Zur Widerlegung der Funktionstreue betrachte man als Gegenbeispiel die Funktion $f = \langle x \in \omega \mapsto \omega + x \rangle$. Ihr Definitionsbereich ist ω, ein Element von $\mathbb{V}_{\omega 2}$, und ihre Werte $\omega + x$ sind $< \omega 2$, liegen also in $\mathbb{V}_{\omega 2}$. Aber $\mathtt{Wb}(f)$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{V}$ mit der Eigenschaft, dass sie zu jedem α, das kleiner als $\omega 2$ ist, eine Ordinalzahl enthält, die größer als α ist: Ist nämlich $\alpha < \omega$, so gehört das Element $f(0)$, das ist ω, zu $\mathtt{Wb}(f)$ und ist größer als α. Ist aber $\omega \leq \alpha$, so gibt es ein x aus ω mit $\omega + x = \alpha$. Dann ist aber $f(x+1) = \omega + x + 1 = \alpha + 1$; dieses $f(x+1)$ ist nun also ein Element von $\mathtt{Wb}(f)$, das größer als α ist. Außerdem haben alle Elemente von $\mathtt{Wb}(f)$ als Elemente von $\mathbb{V}_{\omega 2}$ einen Rang $< \omega 2$. Wegen Satz 5.215 liegt daher $\mathtt{Wb}(f)$ in $\mathcal{R}_{\omega 2}$. Dann hat $\mathtt{Wb}(f)$ aber den Rang $\omega 2$ und liegt wegen Satz 5.207 *nicht* in $\mathbb{V}_{\omega 2}$.

[797] Diese Stärke hat das Ersetzungsaxiom nur in Verbindung mit dem Unendlichkeitsaxiom. Verzichten wir auf dieses, so gilt ja das Ersetzungsaxiom zusammen mit den übrigen klassischen Axiomen bereits in $\mathbb{V}_\omega$.

[798] Siehe Korollar 5.31.9 S. 329 in Verbindung mit der Bemerkung nach dem Universenaxiom 5.31.13 S. 331.

5.30 Kardinalzahlen

Wir haben jeder endlichen Menge M eine NEUMANNsche natürliche Zahl als ≪Anzahl ihrer Elemente≫ zugeordnet, nämlich die Zahl n, für die $M \sim n$ gilt.[799] Analog möchte man für jede *beliebige* Menge M ein Objekt festlegen, das ≪Anzahl der Elemente≫ oder ≪Mächtigkeit≫ oder ≪Kardinalzahl≫ von M heißt. Es liegt zunächst nahe, für Ordinalzahlen α zu definieren:

Eine Menge M hat α Elemente (oder *hat die Kardinalzahl α*), *wenn $M \sim \alpha$ gilt*,

aber dann stößt man auf das Problem, dass eine unendliche Menge mit *verschiedenen* Ordinalzahlen gleichmächtig sein kann. Wie sich in Abschnitt 5.28 gezeigt hat, sind z. B. die Ordinalzahlen $\omega, \omega+1, \ldots \omega 2 \ldots \omega^\omega \ldots \epsilon_0$ alle abzählbar unendlich und somit mit jeder abzählbar unendlichen Menge M gleichmächtig. Wir wollen aber nur *eine einzige* Zahl als „die" Kardinalzahl von M festlegen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dies zu erreichen. So könnte man mit CANTOR als Kardinalzahl einer Menge M den Allgemeinbegriff aller Mengen nehmen, die mit $\mathcal{M}$ gleichmächtig sind,[800] aber dann muss man neue Abstrakta in die Mengenlehre einführen. Eine andere Möglichkeit wäre, als Kardinalzahl von M die FREGEsche Zahl oder Mengenstufe $\llbracket M \rrbracket$ zu nehmen. Aber fast alle Mengenstufen sind Unmengen (siehe Theorem 5.12.17 S. 171): unvorstellbare und unhandliche Objekte. Eine dritte Möglichkeit wäre, als Kardinalzahl von M die Klasse $\mathfrak{Z}(M)$ *aller* mit M gleichmächtigen Ordinalzahlen zu nehmen. Die so definierten Kardinalzahlen wären (für unendliche Mengen) die von CANTOR eingeführten „höheren Zahlenklassen",[801] die im Gegensatz zu den Mengenstufen selbst Mengen sind.[802] Aber diese Mengen sind keine Ordinalzahlen, und so müsste man neben den Ordinalzahlen neue Objekte als Zahlen einführen. All diese Nachteile vermeidet man üblicherweise, indem man als Kardinalzahl von M *eine* der mit M gleichmächtigen Ordinalzahlen verwendet, und zwar nimmt man, wenn es *mehrere* solche gibt, stets die *kleinste*. Dann sind also die Kardinalzahlen ganz bestimmte Ordinalzahlen, nämlich genau diejenigen, die mit keiner kleineren Ordinalzahl gleichmächtig sind:

5.30.1 Definition Eine *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* ist eine Ordinalzahl κ, zu der es keine kleinere Ordinalzahl gibt, die mit κ gleichmächtig ist. Die Klasse der Kardinalzahlen heißt $\mathtt{Cn}$, und die Klasse aller *unendlichen Kardinalzahlen*, die auch *Alephs* heißen, $\mathtt{Cn}_\infty$.[803]

---

799 Vgl. Definition 5.17.7 S. 238 und Satz 5.156 S. 248.

800 Vgl. CANTOR, *Lehre vom Transfiniten* Teil 8, Ausgabe Zermelo S. 411: „Abstrahieren wir bei einer gegebenen Menge M, ... sowohl von der Beschaffenheit der Elemente wie auch von der Ordnung ihres Gegebenseins, so entsteht in uns ein bestimmter Allgemeinbegriff ..., den ich die *Mächtigkeit* von M oder die der Menge M zukommende *Kardinalzahl* nenne."

801 Vgl. CANTOR, *Transfinite Mengenlehre* § 14, Ausgabe Zermelo S. 325. Unter der *ersten Zahlenklasse* verstand CANTOR die Klasse der endlichen Ordinalzahlen, darüber kommt als *zweite Zahlenklasse* diejenige der abzählbar unendlichen Ordinalzahlen, darüber die Klasse der Zahlen der nächst höheren Mengenstufe usw. Für die endlichen Zahlen ist dieses System inkonsequent: Jede endliche Zahl n steht auf einer eigenen Mengenstufe und somit müsste konsequenterweise die Einermenge $\{n\}$ eine eigene Zahlenklasse sein.

802 Beweis: Nach Theorem 5.14.16 S. 197 gibt es eine zu $\mathcal{P}(M)$ gleichmächtige Ordinalzahl α. Sei nun ξ ein Element von $\mathfrak{Z}(M)$, d. h. eine Ordinalzahl, die mit M gleichmächtig ist. Nun gilt nach dem CANTORschen Satz $M \prec \mathcal{P}(M)$, und in dieser Aussage können wir nach Theorem 5.15.4 S. 201 M durch das gleichmächtige ξ und zugleich $\mathcal{P}(M)$ durch das gleichmächtige α ersetzen und erhalten $\xi \prec \alpha$. Daraus folgt gemäß Satz 5.101 S. 201, dass $\xi < \alpha$, das heißt nach Definition der Kleinerrelation für Ordinalzahlen $\xi \in \alpha$. Damit haben wir gezeigt: Jedes Element ξ von $\mathfrak{Z}(M)$ ist Element von α. Daher ist $\mathfrak{Z}(M)$ Teilklasse der Menge α (als Ordinalzahl ist α eine Menge), und muss nach dem Teilmengenaxiom selbst eine Menge sein. □

803 Formal: κ (ist) Kardinalzahl $:\Leftrightarrow \kappa \in \mathtt{On} \wedge \neg\bigvee_{\alpha \in \mathtt{On}} (\alpha < \kappa \wedge \alpha \sim \kappa)$. $\mathtt{Cn} :\equiv \{\kappa \mid \kappa \text{ ist Kardinalzahl}\}$.
κ (ist) Aleph $:\Leftrightarrow \kappa$ Kardinalzahl $\wedge\ \kappa$ unendlich. $\mathtt{Cn}_\infty :\equiv \{\kappa \mid \kappa \text{ ist ein Aleph}\}$.

≪Aleph≫ ist die Bezeichnung des erste Buchstabens $\aleph$ im hebräischen Alphabet. Diese Bezeichnung geht auf CANTOR zurück (vgl. CANTORs Brief an Dedekind vom 28.6.1899, ZERMELO, *Cantor* S. 443).

Zu den Kardinalzahlen gehört zunächst *jede natürliche Zahl* n: Denn n ist wegen Satz 5.160 S. 248 mit keiner kleineren natürlichen Zahl gleichmächtig.[804] Auch die kleinste unendliche Ordinalzahl ω ist eine Kardinalzahl: Jede kleinere Ordinalzahl n ist ja endlich, so dass ω wegen Theorem 5.17.38 S. 245 nicht mit n gleichmächtig sein kann. Ebenso handelt es sich bei der kleinsten kontinuierlich unendlichen Ordinalzahl $\mathfrak{c}$ und der kleinsten funktional unendlichen Ordinalzahl $\mathfrak{f}$ um Kardinalzahlen: Ist α kleiner als $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{f}$, so ist α nicht mehr kontinuierlich bzw. funktional unendlich, also nicht mit $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{f}$ gleichmächtig. So haben wir das Ergebnis:

Alle Ordinalzahlen bis einschließlich ω sind Kardinalzahlen; ebenso $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$. (5.242)

Unter den Ordinalzahlen, die größer als ω sind, gibt es aber auch solche, die keine Kardinalzahlen sind. So kann zum Beispiel keine unendliche Sukzessorzahl $\alpha + 1$ eine Kardinalzahl sein, denn unendliches $\alpha + 1$ ist offenbar stets mit α gleichmächtig:[805]

Unendliche Sukzessorzahlen $\alpha + 1$ sind keine Kardinalzahlen, da $\alpha + 1 \sim \alpha$ gilt. (5.243)

Infolgedessen kommen für unendliche Kardinalzahlen (die ≪Alephs≫) nur Limeszahlen in Frage. Doch nicht alle, sondern nur „erlesene“ Limeszahlen sind Kardinalzahlen, denn wie wir in Abschnitt 5.28 sahen, sind beispielsweise die Limeszahlen bis einschließlich ϵ_0 abzählbar unendlich, und daher gleichmächtig mit der kleineren Ordinalzahl ω. Somit gehören diese Limeszahlen *nicht* zu den Kardinalzahlen. Es gilt also:

Die Alephs oder unendlichen Kardinalzahlen sind spezielle Limeszahlen. (5.244)

Für die Definition des allgemeinen Anzahlbegriffs ist nun das folgende Theorem entscheidend:

5.30.2 Hauptsatz für Kardinalzahlen *Zu jeder Menge M gibt es* genau eine *Kardinalzahl κ, so dass $\kappa \sim M$. Diese ist die kleinste mit M gleichmächtige Ordinalzahl.*

Beweis. Wegen Theorem 5.14.16 S. 197 ist die Klasse C aller zu M gleichmächtigen Ordinalzahlen nichtleer. Sei κ ihr Minimum. Dann gilt also $\kappa \sim M$, und es lässt sich zeigen, dass κ eine Kardinalzahl ist. Angenommen nämlich, κ ist *keine* Kardinalzahl, so gibt es eine Ordinalzahl α mit $\alpha < \kappa$, die mit κ gleichmächtig ist. Dann gilt aber $\alpha \sim \kappa \sim M$, also $\alpha \sim M$, so dass α in C liegt, im Widerspruch dazu, dass α kleiner als das Minimum κ von C ist. Somit war die Annahme falsch und κ ist eine Kardinalzahl. Eine von κ verschiedene Kardinalzahl $\hat{\kappa}$ mit $\hat{\kappa} \sim M$ aber kann es nicht geben, sonst wäre $\hat{\kappa} \sim M \sim \kappa$, so dass $\hat{\kappa}$ und κ gleichmächtig wären; dann könnte aber weder $\hat{\kappa} < \kappa$ noch $\kappa < \hat{\kappa}$ sein (da eine Kardinalzahl nach Definition 5.30.1 mit keiner kleineren gleichmächtig ist), und so bliebe nur übrig, dass $\hat{\kappa} = \kappa$. □ Wir definieren nun:

5.30.3 Definition Ist M eine Menge, so ist heißt die Kardinalzahl κ, für die $\kappa \sim M$ gilt, die *Anzahl* $|M|$ der Elemente von M oder die *Mächtigkeit* oder *Kardinalzahl* $\mathtt{card}(M)$ von M.[806] Ist die Mächtigkeit von M gleich bzw. kleiner bzw. größer als eine Kardinalzahl κ, sagen wir auch: *M hat (genau) κ* bzw. *weniger als κ* bzw. *mehr als κ Elemente.*

---

[804] Zu beachten ist, dass wenn n natürliche Zahl (also Element von ω) ist, erst recht jede kleinere Ordinalzahl m eine natürliche Zahl ist: Aus $n \in \omega$ folgt $n < \omega$ und wegen $m < n$ ist auch $m < \omega$, d. h. $m \in \omega$.

[805] Beweis. Da $\alpha + 1$ unendlich ist, ist auch α unendlich, also $\alpha \geq \omega$. Sei S die Sukzessorfunktion $\langle x \in \omega \mapsto x + 1 \rangle$. Diese ist nach Korollar 5.16.14 S. 213 eine Bijektion von ω in $\omega \setminus 0$, d. h. von $[0, \omega)$ in $(0, \omega)$. Sei f die Identität auf $[\omega, \alpha)$. Diese ist eine Bijektion von $[\omega, \alpha)$ in $[\omega, \alpha)$. Dann ist die Vereinigung $S \cup f$ dieser Bijektionen mit Blick auf Satz 5.39 S. 144 eine Bijektion von $[0, \alpha)$ in $(0, \alpha)$. Sei schließlich g die Funktion, die α auf 0 wirft (und sonst nichts tut). Dann ist $(S \cup f) \cup g$ eine Bijektion von $[0, \alpha]$ in $[0, \alpha)$, d. h. von $\mathtt{Ab}(\alpha + 1)$ in $\mathtt{Ab}(\alpha)$, d. h. gemäß Satz 5.78 S. 192 von $\alpha + 1$ in α. □

[806] Formal: $\mathtt{card}(M) :\equiv |M| :\equiv \imath\, \kappa\, (\kappa \in \mathtt{Cn} \ \wedge\ \kappa \sim M)$.

Wegen des Hauptsatzes 5.30.2 ist die Mächtigkeit einer Menge M *die kleinste mit M gleichmächtige Ordinalzahl*. Ist M endlich, so stimmt die hier definierten Anzahl mit der früher angegebenen überein, wonach die Anzahl der Elemente von M die natürliche NEUMANNsche Zahl n ist, für die $n \sim M$ gilt,[807] denn n ist nach Satz 5.242 eine Kardinalzahl, und darum ist n auch gemäß der neuen Definition die Anzahl der Elemente von M. Aus der Definition folgt:

Für Mengen M gilt stets $M \sim |M|$. Für Kardinalzahlen κ gilt außerdem $\kappa = |\kappa|$.[808] (5.245)

Neben der Klasse $\mathcal{P}(C)$ *aller* Teilmengen von C betrachtet man häufig die Klasse aller Teilmengen von C *mit κ oder mit weniger als κ Elementen*. Diese bekommen eigene Bezeichnungen:

5.30.4 Definition Für Klassen C und Kardinalzahlen κ sei $\mathcal{P}_{=\kappa}(C)$ bzw. $\mathcal{P}_{<\kappa}(C)$ die Klasse der Teilmengen von C mit κ bzw. mit weniger als κ Elementen.[809]

Erwartungsgemäß sind Kardinalzahlen von Mengen größer, kleiner oder gleich, je nachdem ob die entsprechenden Mengen relationstheoretisch größer, kleiner oder gleich sind:

5.30.5 Theorem *Für Mengen M_1, M_1 bzw. Kardinalzahlen κ_1, κ_2 gilt:*

$$|M_1| = |M_2| \quad \Leftrightarrow \quad M_1 \sim M_2 \qquad \textit{bzw.} \qquad \kappa_1 = \kappa_1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 \sim \kappa_2, \tag{5.246}$$

$$|M_1| < |M_2| \quad \Leftrightarrow \quad M_1 \prec M_2 \qquad \textit{bzw.} \qquad \kappa_1 < \kappa_1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 \prec \kappa_2, \tag{5.247}$$

$$|M_1| \leq |M_2| \quad \Leftrightarrow \quad M_1 \precsim M_2 \qquad \textit{bzw.} \qquad \kappa_1 \leq \kappa_1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 \precsim \kappa_2. \tag{5.248}$$

Beweis. Siehe Anhang S. 467–468. □ Aus Satz 5.248 ergibt sich, dass die Kardinalzahl einer Teilmenge T einer Menge M kleinergleich der Kardinalzahl von M ist, und dass der Wertebereich einer Funktion stets eine kleinere Kardinalzahl als ihr Definitionsbereich hat:[810]

Aus $T \subseteq M \in \mathbb{M}$ folgt $|T| \leq |M|$, und für Funktionen f gilt $|\mathtt{Wb}(f)| \leq |\mathtt{Db}(f)|$. (5.249)

5.30.6 Theorem Werfen wir jede Kardinalzahl κ auf ihre Mengenstufe $\llbracket\kappa\rrbracket$, so gilt:

(1) *Es werden genau die Mengenstufen getroffen.*

(2) *Verschiedene Kardinalzahlen treffen verschiedene Mengenstufen,*
und zwar trifft die größere Kardinalzahl die größere Mengenstufe.

(3) *Unendliche Kardinalzahlen treffen genau die Unendlichkeitsstufen für Mengen.*

(4) *Auf jeder Mengenstufe $\mathfrak{M}$ liegt die (und nur die) Kardinalzahl, die auf $\mathfrak{M}$ geworfen wird.*

Beweis. Siehe Anhang S. 468. □ Im Anschluss an (4) können wir erklären:

5.30.7 Definition Ist $\mathfrak{M}$ eine Mengenstufe, so heißt die einzige auf ihr liegende Kardinalzahl, also die Kardinalzahl κ, für die $\mathfrak{M} = \llbracket\kappa\rrbracket$ gilt, der *Repräsentant* dieser Stufe und wir bezeichnen diese Stufe dann standardmäßig mit $\ll\llbracket\kappa\rrbracket\gg$.

---

807 Vgl. (Bemerkung nach) Definition 5.17.7 S. 238 und Satz 5.157 S. 248.

808 Beweis: Kardinalzahlen sind Ordinalzahlen, und Ordinalzahlen sind Mengen, also haben Kardinalzahlen auch selbst eine Mächtigkeit. Nun gilt $\kappa \sim \kappa$, also ist κ selbst diejenige Kardinalzahl, die mit κ gleichmächtig ist, und damit ist κ die Mächtigkeit $|\kappa|$ von κ. □ .

809 Formal: $\mathcal{P}_{=\kappa}(C) := \{M \mid M \in \mathcal{P}(C) \text{ und } |M| = \kappa\}$. $\mathcal{P}_{<\kappa}(C) := \{M \mid M \in \mathcal{P}(C) \text{ und } |M| < \kappa\}$.

810 Aus $T \subseteq M$ folgt (nach Satz 5.89 S. 200) $T \precsim M$, also (mit Satz 5.248) $|T| \leq |M|$, und da jede Funktion f eine Surjektion von $\mathtt{Db}(f)$ in $\mathtt{Wb}(f)$ ist, gilt nach Satz 5.91 S. 200, dass $\mathtt{Db}(f) \succsim \mathtt{Wb}(f)$, also $\mathtt{Wb}(f) \precsim \mathtt{Db}(f)$, also schließlich nach Satz 5.248 $|\mathtt{Wb}(f)| \leq |\mathtt{Db}(f)|$.

Wegen Theorem 5.30.6 besteht eine genaue Entsprechung zwischen den Mengenstufen und den sie repräsentierenden Kardinalzahlen. Anschaulich gesprochen muss es daher „genau soviele“ Mengenstufen geben, wie es Kardinalzahlen gibt, und das sind – wie wir in Korollar 5.30.18 feststellen werden – so viele, dass ihre Repräsentanten eine Unmenge bilden.[811]

Wenn möglich, möchte man auch jeder *Unmenge* U eine ≪Kardinalzahl≫ zuordnen: ein Objekt $|U|$, das *uneigentliche Kardinalzahl* heißen soll. Die bisherigen Kardinalzahlen, die Elemente von $\mathtt{Cn}$, sollen demgegenüber *eigentliche Kardinalzahlen* oder Kardinalzahlen schlechthin heißen, und wir fassen eigentliche und uneigentliche Kardinalzahlen als *verallgemeinerte Kardinalzahlen* zusammen. Die Festlegung der uneigentlichen Kardinalzahlen sollte so geschehen, dass auf jeder Unmengenstufe $\mathfrak{U}$ je eine dort liegende Unmenge ausgewählt und zur (uneigentlichen) Kardinalzahl $|U|$ oder $\mathtt{card}(U)$ aller Unmengen dieser Stufe erklärt wird. Legen wir dann noch fest, dass für verallgemeinerte Kardinalzahlen κ_1, κ_2, von denen mindestens eine uneigentlich ist, $\kappa_1 < \kappa_2$ bzw. $\kappa_1 \leq \kappa_2$ genau dann gelten soll, wenn $\kappa_1 \prec \kappa_2$ bzw. $\kappa_1 \precsim \kappa_2$ gilt, so gelten die Sätze 5.30.2, 5.30.5 und 5.30.6 uneingeschränkt für beliebige Klassenstufen bzw. Klassen bzw. verallgemeinerte Kardinalzahlen. Da für Mengen M und Unmengen U (nach Satz 5.94 S. 201) $M \prec U$ und erst recht $M \precsim U$ gilt, ist dann $|M| < |U|$ und $|M| \leq |U|$. Für die Unmengenstufe $\llbracket\Omega\rrbracket$ liegt es nun nahe, als uneigentliche Kardinalzahl dieser Stufe die Unmenge $\Omega(= \mathtt{On})$ zu nehmen, weil diese ja auch schon unsere uneigentliche Ordinalzahl ist (Definition 5.14.15 S. 196). Für die auf der maximalen Stufe $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ zu wählende uneigentliche Kardinalzahl schlage ich in Anlehnung an Cantor die Bezeichnung $\mathfrak{n}$ [Lesart: Tau] vor,[812] wobei $\mathfrak{n}$ im Fall, dass die Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ und $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ gleich sind, natürlich mit Ω identisch sein muss. So lege ich fest:

5.30.8 Definition

$$\mathfrak{n} :\equiv \begin{cases} \Omega & \text{falls } \mathbb{D} \sim \Omega \qquad\qquad (\text{d. h. falls } \llbracket\mathbb{D}\rrbracket = \llbracket\Omega\rrbracket) \\ \mathbb{D} & \text{falls nicht } \mathbb{D} \sim \Omega \quad (\text{d. h. falls } \llbracket\mathbb{D}\rrbracket > \llbracket\Omega\rrbracket) \end{cases}.$$

Außerdem sei Ω $(= \mathtt{On})$ die Kardinalzahl der wohlordnungstragenden (auf $\llbracket\Omega\rrbracket$ liegenden) und $\mathfrak{n}$ jene der maximalen (auf $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ liegenden) Unmengen. Für Unmengen U, die weder auf $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ noch auf $\llbracket\Omega\rrbracket$ liegen, sei als Kardinalzahl mit Hilfe des $\boldsymbol{\varepsilon}$-Operators die Unmenge $\boldsymbol{\varepsilon}\, x\ (x \sim U)$ festgesetzt. Die hier eingeführten *uneigentlichen Kardinalzahlen* fassen wir mit den bisherigen zu den *verallgemeinerten Kardinalzahlen* zusammen.[813] Für verallgemeinerte Kardinalzahlen κ_1, κ_2 von denen mindestens eine uneigentlich ist, soll schließlich $\kappa_1 < \kappa_2$ bzw. $\kappa_1 \leq \kappa_2$ genau dann wahr sein, wenn $\kappa_1 \prec \kappa_2$ bzw. $\kappa_1 \precsim \kappa_2$ gilt.[814]

---

811 Zu beachten ist, dass wir weder die ≪Anzahl der Mengenstufen≫ noch ihre ≪Gleichmächtigkeit mit der Klasse $\mathtt{Cn}$ der Kardinalzahlen≫ in der elementaren Mengentheorie exakt definieren können, da die Mengenstufen als Unmengen nicht Elemente einer Klasse sind. Wir können aber von ≪n Mengenstufen≫ bzw. von ≪endlich oder unendlich vielen Mengenstufen≫ bzw. von einer ≪Menge oder Unmenge von Mengenstufen≫ reden, wenn wir diesen Redeweisen die Bedeutung geben, dass *die Klasse der sie repräsentierenden Kardinalzahlen* n Elemente hat bzw. dass diese Klasse endlich oder unendlich ist bzw. dass diese Klasse eine Menge oder Unmenge ist.

812 Vgl. Cantors Brief an Dedekind vom 28.6.1899 (Zermelo, *Cantor* S. 445). Tau ($\mathfrak{n}$) ist der letzte Buchstabe des hebräischen Alphabets. Cantor definiert ebd. $\mathfrak{n}$ allerdings etwas anders, nämlich als „das System aller Alephs“, das ist die Klasse, die wir als $\mathtt{Cn}_\infty$ bezeichnet haben (oben, Definition 5.30.1). Wie wir in Korollar 5.30.18 S. 324 sehen werden, ist dies eine mit Ω gleichmächtige Unmenge.

813 Formal führen wir die verallgemeinerte Kardinalzahl $\overline{\mathtt{card}}X$ oder $[\![X]\!]$ wie folgt ein: $\overline{\mathtt{card}}(X) :\equiv [\![X]\!] :\equiv \imath\, K\Big(\big(X \in \mathbb{M} \ \wedge\ K = |X|\big) \vee \big(X \in \llbracket\Omega\rrbracket \ \wedge\ K = \Omega\big) \vee \big(X \in \llbracket\mathbb{D}\rrbracket \ \wedge\ K = \mathfrak{n}\big) \vee \big(X \notin \llbracket\Omega\rrbracket \ \wedge\ X \notin \llbracket\mathbb{D}\rrbracket \ \wedge\ X = \boldsymbol{\varepsilon}\, x\ (x \sim U)\big)\Big)$. Für $\overline{\mathtt{card}}(X)$ bzw. $[\![X]\!]$ kann man vereinfacht $\mathtt{card}(X)$ bzw. $|X|$ schreiben, denn der Fall, für den die Bezeichnungen $\mathtt{card}(X)$ und $|X|$ gemäß Definition 5.14.13 konzipiert waren, war ja der, dass X eine Menge bezeichnet, und in diesem Fall stimmen $\overline{\mathtt{card}}(\mathcal{X})$ und $\mathtt{card}(\mathcal{X})$ überein.

814 Sind κ_1 und κ_2 eigentliche Kardinalzahlen, gilt dies bereits wegen Theorem 5.30.5, es gilt nun also allgemein.

Interessant sind nun für uns vor allem die (eigentlichen) unendlichen Kardinalzahlen oder Alephs. Das kleinste Aleph ist ω, und man bezeichnet ω daher auch mit $\aleph_0$.

5.30.9 Definition $\aleph_0$ [Lesart: Aleph-Null] $:\equiv$ die kleinste unendliche Kardinalzahl ω.

5.30.10 Theorem $\aleph_0$ *ist die Mächtigkeit jeder abzählbar unendlichen Mengen* N.

Beweis. Nach Satz 5.242 ist ω eine Kardinalzahl, und da N abzählbar unendlich ist, gilt nach Definition 5.20.4 S. 259 $N \sim \omega$, also ist $\aleph_0 (= \omega)$ die mit N gleichmächtige Kardinalzahl, d. h. die Mächtigkeit $|N|$ von N. □

Um nun größere unendliche Kardinalzahlen als $\aleph_0$ zu erhalten, ist die Erkenntnis entscheidend, dass es *zu jeder Kardinalzahl stets eine größere gibt*:

5.30.11 Theorem und Definition *Die Klasse* $\mathtt{Cn}$ *besitzt kein Maximum, d. h. zu jeder Kardinalzahl* κ *gibt es eine größere,* und die kleinste Kardinalzahl, die größer ist als κ, heißt der *kardinale Nachfolger* von κ und wird mit κ^+ bezeichnet.[815] *Die Mengenstufe* $\llbracket \kappa^+ \rrbracket$ *von* κ^+ *ist von* $\llbracket \kappa \rrbracket$ *aus die nächst höhere.*

Beweis. Siehe Anhang S. 468. □ Der kardinale Nachfolger κ^+ ist für *unendliches* κ stets von dem gewöhnlichen (oder «ordinalen») Nachfolger $\kappa' (= \kappa + 1)$ zu unterscheiden, der ja nach Satz 5.243 *keine* Kardinalzahl ist. Es ist also κ^+ (für eine unendliche Kardinalzahl κ) auf jeden Fall größer als κ', und somit gilt $\kappa < \kappa' < \kappa^+$. Für *endliches* κ ist dagegen die unmittelbar nachfolgende Ordinalzahl $\kappa' (= \kappa + 1)$ nach Satz 5.242 eine Kardinalzahl, und somit ist hier der kardinale Nachfolger κ^+ gleich dem ordinalen Nachfolger κ'. Bemerkenswert ist noch, dass jede Ordinalzahl α zwischen ihrer Mächtigkeit $|\alpha|$ und deren kardinalem Nachfolger liegt:

Für jede Ordinalzahl α *ist* $|\alpha| \leq \alpha < |\alpha|^+$.[816] (5.250)

Theorem 5.30.11 ist die Grundlage für das so genannte *Cantorsche Paradoxon* oder *Kardinalzahlen-Paradoxon*:[817] Es besagt, dass einerseits jede Kardinalzahl einen kardinalen Nachfolger hat (Theorem 5.30.11), es aber andererseits dennoch eine größte Kardinalzahl zu geben scheint: etwa die Kardinalzahl der allumfassenden Klasse aller Dinge. Man beachte hier die Analogie zum Ordinalzahlen-Paradoxon von Burali-Forti (siehe S. 197). Wie beim Ordinalzahlen-Paradoxon ist in unserer Theorie der Widerspruch durch die Unterscheidung von Mengen und Unmengen bzw. eigentlichen und uneigentlichen Kardinalzahlen aufgehoben: Der Satz, dass es zu jeder Kardinalzahl eine größere gibt, gilt nämlich nur für die eigentlichen Kardinalzahlen, während der Satz, dass die

815 Formal: $\kappa^+ := \min_{<_{\mathtt{On}}} \{\alpha \mid \alpha \in \mathtt{Cn} \wedge \kappa < \alpha\}$.

816 Beweis. Nach Definition ist die Kardinalzahl $|\alpha|$ die *kleinste* mit α gleichmächtige Ordinalzahl; da α selbst zu den mit α gleichmächtigen Ordinalzahlen gehört, muss also $|\alpha| \leq \alpha$ sein. Weiter ist nach Definition des kardinalen Nachfolgers $|\alpha| < |\alpha|^+$, also gilt (nach Satz 5.247) $|\alpha| \prec |\alpha|^+$. In dieser Aussage können wir das $|\alpha|$ wegen Theorem 5.15.4 S. 201 durch das gleichmächtige α ersetzen und erhalten $\alpha \prec |\alpha|^+$. Dann muss aber $\alpha < |\alpha|^+$ sein: Andernfalls gilt $|\alpha|^+ \leq \alpha$, nach Satz 5.79 S. 192 also $|\alpha|^+ \subseteq \alpha$, nach Satz 5.89 S. 200 also $|\alpha|^+ \precsim \alpha$ und zusammen mit $\alpha \prec |\alpha|^+$ (nach Satz 5.97 S. 201) schließlich $|\alpha|^+ \prec |\alpha|^+$, was nach Satz 5.96 S. 201 falsch ist. □

817 Das Paradoxon kann Cantor zugeschrieben werden, weil es auf dem 1890 entdeckten Satz von Cantor (Theorem 5.20.19 S. 262) basiert, und weil in Cantors Brief an Dedekind vom 3.8.1899 die (das Paradoxon auflösende) Inkonsistenz der Kardinalzahlenreihe ausgesprochen ist (Cantor, *Briefe* S. 410). Man spricht auch von der „zweiten Cantorschen Antinomie“ (siehe Fußnote 500 auf S. 197). Russell beschreibt das Paradoxon so: „The cardinal contradiction is simply this: Cantor has a proof that there is no greatest cardinal, and yet there are properties (such as $x = x$) which belong to *all* entities. Hence the cardinal number of entities having such a property must be the greatest of cardinal numbers. Hence a contradiction“ (*Difficulties* S. 31).

Kardinalzahlen ein Maximum ת haben, für die verallgemeinerten Kardinalzahlen gültig ist.[818]

Da die unendliche Ordinalzahl ω nach Satz 5.242 eine Kardinalzahl ist, liefert uns Theorem 5.30.11 eine unendliche Reihe von unendlichen Kardinalzahlen, nämlich $\omega, \omega^+, \omega^{++}, \ldots$ Wie schon erwähnt, wird die kleinste unendliche Kardinalzahl ω auch mit $\aleph_0$ (≪Aleph-Null≫) bezeichnet, die danach kommende ω^+ nennt man $\aleph_1$ (≪Aleph-Eins≫), ω^{++} heißt $\aleph_2$ (≪Aleph-Zwei≫) usw. Allgemein heißt $\aleph_n$ (≪Aleph-n≫) auch ≪das n-te Aleph≫ oder ≪die n-te unendliche Kardinalzahl≫. Die Zahl n heißt der *Index* der Kardinalzahl $\aleph_n$. Die Frage liegt nun nahe, ob die Reihe $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \ldots$ aller Kardinalzahlen, die eine natürliche Zahl n als Index haben, bereits *alle* Kardinalzahlen enthält. Wegen des folgenden Theorems ist dies nicht der Fall:

5.30.12 Theorem und Definition *Ist M eine Menge von Kardinalzahlen, so ist auch* $\sup M$*, d. h.* $\bigcup M$ (vgl. Definition 5.14.4 S. 191) *eine Kardinalzahl* und wir legen wie folgt eine Kardinalzahl $M^{\maltese}$ fest, die wir als *kardinalen Nachfolger aller Elemente von M* bezeichnen:

$$M^{\maltese} :\equiv \begin{cases} (\max M)^+ & \textit{falls } \max M \textit{ existiert,} \\ \sup M & \textit{falls } \max M \textit{ nicht existiert.} \end{cases}$$

Dieses $M^{\maltese}$ ist stets die kleinste Kardinalzahl, die größer ist als jedes Element von M.

Beweis. Siehe Anhang S. 469. □

Da die Klasse X der Kardinalzahlen $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \ldots$ mit einer natürlichen Zahl als Index eine Menge ist (solange die Klasse C der Indizes von vorliegenden Alephs eine Menge ist, ist auch die Klasse der vorliegenden Alephs eine solche),[819] existiert gemäß Theorem 5.30.12 eine Kardinalzahl $X^{\maltese}$, die größer ist als alle diese Kardinalzahlen. Wir nennen diese neue Kardinalzahl $\aleph_\omega$, geben ihr also die unendliche Zahl ω als Index. Deren Nachfolger ${\aleph_\omega}^+$ nennen wir $\aleph_{\omega+1}$, worauf $\aleph_{\omega+2}$ kommt, usw. Es folgt also eine neue unendliche Reihe von Kardinalzahlen

$$\aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2} \ \ldots,$$

und da dies wieder eine Menge ist, gibt es eine dritte unendliche Reihe usw. So ergibt sich eine transfinite Aneinanderreihung von unendlichen Reihen von Kardinalzahlen, die der in Abschnitt 5.28 beschriebenen Reihe der Ordinalzahlen analog ist, nur dass jetzt die Ordinalzahlen als Indizes auftauchen. So ist klar, dass nach der Gesamtreihe aller soeben beschriebenen Aleph-Reihen

$$\aleph_0, \aleph_1 \ldots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{\omega 2}, \aleph_{\omega 2+1} \ldots \ \ldots$$

[818] In der *erweiterten* Theorie wäre allerdings zu bedenken, dass es dort womöglich Kollektionen gibt, die nicht nur ergänzungs– sondern auch relationstheoretisch größer als $\mathbb{D}$ sind. Für solche Kollektionen müssten noch zusätzliche uneigentliche Kardinalzahlen eingeführt werden, und wenn man die „Größerrelation“ $<$ sinnvollerweise so ausweitet, dass die Theoreme 5.30.2, 5.30.5 und 5.30.6 für alle Kollektionen uneingeschränkt gültig bleiben, müssten diese zusätzlichen Kardinalzahlen größer als ת sein. Nun wiederholt sich das Paradoxon auf höherer Ebene: Nach einem verallgemeinerten Satz von Cantor sollte für jede Kollektion C die „Potenzkollektion“ von C (die Klasse aller Teilkollektionen von C) relationstheoretisch größer als C sein, so dass es zu jeder verallgemeinerten Kardinalzahl eine größere gibt. Andererseits aber sollte die Kollektion aller Kollektionen die größte verallgemeinerte Kardinalzahl haben. Hier gibt es mehrere denkbare Auswege aus dem Paradoxon. Zum einen könnte die Kollektion aller Kollektionen nicht existieren (was ich aber wegen der Einfachheit des Begriffs nicht für sehr plausibel halte). Zweitens lässt sich die Größenrelation vielleicht nicht in der beschriebenen Weise auf alle zusätzlichen Kardinalzahlen ausweiten (das ist durchaus möglich, da es schon in der elementaren Theorie unvergleichbare Unmengen geben könnte; siehe S. 202). Die dritte und einfachste Lösung scheint aber die zu sein, dass der Satz von Cantor einzuschränken ist, weil die „Potenzkollektion“ einer Kollektion C nicht immer relationstheoretisch größer als C sein muss: Wenn die Kollektion $\mathbb{C}$ aller Kollektionen existiert, dürfte $\mathbb{C} \sim \mathcal{P}(\mathbb{C})$ gelten, weil nicht jede Auswahl von Elementen von $\mathbb{C}$ als Kollektion existiert (ähnlich wie in der elementaren Theorie $\mathbb{D} \sim \mathcal{P}(\mathbb{D})$ gilt, weil nicht jede Teilklasse von $\mathbb{D}$ als Menge existiert; siehe Fußnote 620 auf S. 262).

[819] Denn die Klasse dieser Alephs ist Wertebereich der Funktion $\langle x \in C \mapsto \aleph_x \rangle$, deren Definitionsbereich die Menge C ist; per Ersetzungsaxiom ist also dieser Wertebereich, d. h. die Klasse der vorliegenden Alephs, eine Menge.

als nächst größere Kardinalzahl das Aleph $\aleph_{\omega^2}$ folgt, dann nach etlichen weiteren unendlichen Reihen $\aleph_{\omega^\omega}$ usw., dann irgendwann $\aleph_{\epsilon_0}$, und wenn man weiter durch die ansteigende Reihe der Kardinalzahlen läuft, werden einmal alle abzählbaren Indizes verbraucht sein. Dann kommt $\aleph_{\aleph_1}$, die erste Kardinalzahl mit überabzählbarem Index $\aleph_1$, und man gelangt durch Bereiche von Alephs, deren Indizes selbst immer größere Alephs sind. Dabei stößt man auch auf eine Kardinalzahl, deren *Index* die Zahl $\aleph_{\aleph_1}$ ist: nämlich auf die Kardinalzahl $\aleph_{\aleph_{\aleph_1}}$. Auch diese aber muss irgendwann einer noch viel größeren Kardinalzahl als Index dienen. Allgemein wird also eine jede Kardinalzahl einmal zum Index einer größeren. Schließlich sollte man dann zu einer Kardinalzahl $\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\ldots}}}}$ gelangen, deren „Indexiteration“ selbst unendlich ist: Ihr Index ist ein Aleph, dessen Index selbst ein Aleph ist, dessen Index selbst ein Aleph ist usw. ad infinitum. Diese Kardinalzahl wird manchmal θ genannt. Da aber dieser Name auch für eine Funktion sowie eine andere, noch größere Kardinalzahl verwendet wird,[820] schlage ich den Namen θ^* vor. Man kann θ^* ohne Verwendung des Unendlichkeitsbegriffs beschreiben: Es ist eine (genauer: die kleinste) *Kardinalzahl, die ihr eigener Index* ist: $\theta^* = \aleph_{\theta^*}$. Dass nämlich für eine Kardinalzahl υ mit der Eigenschaft $\upsilon = \aleph_\upsilon$ tatsächlich eine „unendliche Indexiteration“ vorliegt, kann man so einsehen: In der Bezeichnung $\aleph_\upsilon$ kann man den Index υ, eben weil er mit $\aleph_\upsilon$ identisch ist, durch $\aleph_\upsilon$ ersetzen und erhält $\aleph_{\aleph_\upsilon}$ als neue Bezeichnung für dieselbe Zahl. Dann kann man auch hierin das υ wieder durch $\aleph_\upsilon$ ersetzen und erhält $\aleph_{\aleph_{\aleph_\upsilon}}$ als neue Bezeichnung usw. ad infinitum. Eine andere, etwas „anschaulichere“ Vorstellung von θ^* gewinnt man durch folgende Überlegung: Betrachtet man immer größere Kardinalzahlen, so steigt parallel zu diesen auch der Index der betrachteten Zahlen an; dieser ist im Allgemeinen kleiner (und natürlich nie größer) als die Zahl, deren Index er ist. In dem „Wettlauf“ der Kardinalzahlen und ihrer Indizes kann es aber bei sehr großen Kardinalzahlen geschehen, dass ein Index die mit ihm indizierte Kardinalzahl „einholt“. θ^* ist nun die erste Zahl, bei der dies der Fall ist.

Man hat bei derartigen Beschreibungen oft das Gefühl, dass man möglicherweise etwas übersehen hat, was die beschriebenen Prozeduren unmöglich macht. Es werden ja hier an das Vorstellungsvermögen extreme Anforderungen gestellt. So entsteht das Bedürfnis, statt der vagen Beschreibungen exakte Definitionen zu benutzen und alles logisch herzuleiten, so dass die Anschauung nicht mehr benötigt wird. Zunächst muss hierzu die Indizierung der Alephs mittels der sog. Aleph-Funktion $\aleph$ exakt definiert werden, deren Argumente die Indizes und deren Werte die damit indizierten Alephs sind. Da diese Funktion Spezialfall der ≪transfiniten Aufzählung≫ einer ≪unbeschränkten und abgeschlossenen Menge von Ordinalzahlen≫ ist, führe ich zunächst diese Begriffe ein.

5.30.13 Definition Eine Klasse A von Ordinalzahlen heißt *unbeschränkt*, wenn es zu jedem α aus $\mathtt{On}$ ein Element in A gibt, das größer als α ist. A heißt *abgeschlossen*, wenn für jede nichtleere Teilmenge T von A das Supremum $\bigcup T$ von T in A liegt,[821] so dass man aus A nicht herauskommt, wenn man von Teilmengen von A zu ihrem Supremum übergeht.

[820] Meist bezeichnet man mit θ die sog. ≪Theta-Funktion≫ (siehe S. 333) oder auch die ≪erste unerreichbare Kardinalzahl≫, die noch weit größer ist als die hier beschriebene (siehe Abschnitt 5.31, bes. S. 334). Wir werden die erste unerreichbare Kardinalzahl mit θ_0 bezeichnen und mit θ die Theta-Funktion.

[821] Formal: A (ist) unbeschränkt $:\Leftrightarrow \bigwedge_{\alpha\in\mathtt{On}} \bigvee_{x\in A} (x <_{\mathtt{On}} \alpha)$. Unbeschränktheit ist hier also dasselbe wie die Verneinung der ≪$<_{\mathtt{On}}$-Beschränktheit von A nach oben≫ im Sinne von Definition 5.13.20.
A (ist) abgeschlossen $:\Leftrightarrow \bigwedge_T (\emptyset \neq T \subseteq A \rightarrow \bigcup T \in A)$.

Beispiele. für unbeschränkte und abgeschlossene Klassen sind $\mathtt{On}$ selbst sowie $\mathtt{Cn}$ und $\mathtt{Cn}_\infty$.[822]

Ist nun A eine unbeschränkte Klasse von Ordinalzahlen, so ist sie nichtleer,[823] hat also ein Minimum $\min A$. Da es nach Definition der Unbeschränktheit zu jedem Element α von A noch größere Elemente von A gibt, können wir das kleinste von diesen den *A-Nachfolger von α* nennen. Schließlich existiert zu jeder nichtleeren Teilmenge T von A ein Element von T, das größer ist als alle in T enthaltenen Elemente,[824] und das kleinste von diesen soll *A-Nachfolger der Menge T* heißen. Aufgrund dieser Tatsachen lässt sich durch Sukzessor-Limes-Rekursion wie folgt eine Funktion f von $\mathtt{On}$ in A definieren, welche die *transfinite Aufzählung* von A heißt:

5.30.14 Definition Ist A eine unbeschränkte Klasse von Ordinalzahlen, so heißt die rekursiv definierte Funktion $f\colon \mathtt{On} \longrightarrow A$ mit

$$\begin{array}{lll} f(0) & := \min A, & \\ f(\alpha+1) & := \text{der } A\text{-Nachfolger von } f(\alpha) & \text{für } \alpha \text{ aus } \mathtt{On}, \text{ und} \\ f(\lambda) & := \text{der } A\text{-Nachfolger der Menge } \mathtt{Wb}(f/\lambda) & \text{für Limeszahlen } \lambda. \end{array}$$

die *transfinite Aufzählung der Elemente von A*. Sie wird mit $\mathtt{Tf}_A$ bezeichnet.[825]

Zu beachten ist, dass wegen des Ersetzungsaxioms für Limeszahlen λ und Funktionen $f\colon \mathtt{On} \longrightarrow A$ stets $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$ eine Menge ist, da der Definitionsbereich von f/λ eine Menge, nämlich λ ist. Da λ Limeszahl und somit nichtleer ist, ist $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$ sogar eine nichtleere Teilmenge von A und somit «A-Nachfolger der Menge $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$» ein wohldefiniertes Element von A. Das nun folgende Theorem ist einer der aufschlussreichsten Sätze der Ordinalzahltheorie:

5.30.15 Theorem Sei A eine unbeschränkte Klasse von Ordinalzahlen. *Dann ist ihre transfinite Aufzählung f ein* (und somit: *der*) *Isomorphismus*[826] *von $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ in $\langle A, < \rangle$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 469–470. □ Da die transfinite Aufzählung f von A als Isomorphismus von $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ in $\langle A, < \rangle$ ordnungserhaltend ist, werden in der Reihe

$$f(0), f(1), f(2), \ldots f(\omega), f(\omega+1), \ldots$$

genau die Elemente von A in der Reihenfolge ihrer Ordnung „der Größe nach“ aufgezählt; $f(\alpha)$ heißt deshalb jeweils das «α-te Element von A». Als Korollar folgt nun:

5.30.16 Korollar *Jede unbeschränkte Teilklasse A von Ordinalzahlen ist eine mit $\mathtt{On}$ gleichmächtige Unmenge. Ist außerdem f ihre transfinite Aufzählung, so gilt für jede Ordinalzahl α, dass*

---

822 $\mathtt{On}$ ist unbeschränkt, da für α aus $\mathtt{On}$ der Nachfolger α' eine größere Ordinalzahl als α ist. $\mathtt{On}$ ist abgeschlossen, da für Mengen M von Ordinalzahlen $\bigcup M$ nach Theorem 5.14.4 S. 191 wieder in $\mathtt{On}$ liegt. $\mathtt{Cn}$ ist unbeschränkt, da für α aus $\mathtt{On}$ wegen Satz 5.250 die Kardinalzahl $|\alpha|^+$ größer als α ist. $\mathtt{Cn}$ ist abgeschlossen, da für Mengen M von Kardinalzahlen gemäß 5.30.12 auch $\bigcup M$ in $\mathtt{Cn}$ liegt. $\mathtt{Cn}_\infty$ ist ebenfalls unbeschränkt: denn für *unendliches* α aus $\mathtt{On}$ ist $|\alpha|^+$ eine Kardinalzahl, die nach Satz 5.250 größer als α und damit erst recht unendlich ist (also in $\mathtt{Cn}_\infty$ liegt), und für *endliches* α ist $\aleph_0 (= \omega)$ eine Element von $\mathtt{Cn}_\infty$, das größer als α ist. $\mathtt{Cn}_\infty$ ist auch abgeschlossen, weil für eine nichtleere Menge M unendlicher Kardinalzahlen deren Supremum $\bigcup M$, das nach 5.30.12 in $\mathtt{Cn}$ liegt, erst recht unendlich sein muss, also in $\mathtt{Cn}_\infty$ liegt.

823 Denn nach Definition der Unbeschränktheit gibt es ein Element von A, das größer als 0 ist.

824 Denn zu der Ordinalzahl $\sup T$ gibt es nach Definition der Unbeschränktheit ein Element von A, das größer als $\sup T$ ist; dieses ist natürlich auch größer als jedes Element von T.

825 Formal: $\mathtt{Tf}_A :\equiv \imath f \Big(f\colon \mathtt{On} \longrightarrow A \ \wedge\ f(0) = \min_{<_{\mathtt{On}}} A \ \wedge \bigwedge_{\alpha \in \mathtt{On}} f(\alpha+1) = A\text{-Nachfolger von } f(\alpha)$
$\wedge \bigwedge_{\lambda} (\lambda \text{ Limeszahl} \rightarrow f(\lambda) = A\text{-Nachfolger der Menge } \mathtt{Wb}(f/\lambda)) \Big)$, wobei
«A-Nachfolger von $f(\alpha)$» $:= \min_{<_{\mathtt{On}}} \{x \mid x \in A \wedge f(\alpha) <_{\mathtt{On}} x\}$, und
«A-Nachfolger der Menge $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$» $:= \min_{<_{\mathtt{On}}} \{x \mid x \in A \wedge \bigwedge_{y \in \mathtt{Wb}(f/\lambda)} (y <_{\mathtt{On}} x)\}$.

826 Siehe Definition 5.13.34 S. 187. Nach Theorem 5.13.39 S. 188 gibt es höchstens *einen* Isomorphismus.

$\alpha \leq f(\alpha)$ gilt, und dass genau α Elemente von A kleiner als $f(\alpha)$ sind, d. h. dass die Klasse der ≪unterhalb von $f(\alpha)$ liegenden≫ *Elemente von A die Mächtigkeit $|\alpha|$ hat.*

Beweis. Siehe Anhang S. 470–471. □ Ist A eine *abgeschlossene* unbeschränkte Klasse von Ordinalzahlen und f ihre transfinite Aufzählung, so gilt für Limeszahlen λ, dass $\sup \mathtt{Wb}(f/\lambda)$ das kleinste Element von A ist, das größer als alle Elemente von $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$ ist.[827] Infolgedessen ist $\sup \mathtt{Wb}(f/\lambda)$ der A-Nachfolger der Menge $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$, und so lassen sich die Definitionsgleichungen 5.30.14 der transfiniten Aufzählung für eine *abgeschlossene* unbeschränkten Klasse A wie folgt abwandeln:

$$f(0) := \min A, \quad f(\alpha+1) := A\text{-Nachfolger von } f(\alpha), \quad f(\lambda) := \sup \mathtt{Wb}(f/\lambda). \tag{5.251}$$

Da nun die Klasse $\mathtt{Cn}_\infty$ der Alephs eine unbeschränkte und abgeschlossene Menge von Ordinalzahlen ist (siehe die Beispiele nach Definition 5.30.13), kann ihre transfinite Aufzählung in der eben erwähnten Form definiert werden. Diese Aufzählung nenne ich die *allgemeine*[828] *Aleph-Funktion* $\aleph$ und benutze für ihren Funktionswert an der Stelle α die Indexschreibweise $\aleph_\alpha$. Da außerdem der $\mathtt{Cn}_\infty$-Nachfolger von $\aleph_\alpha$ gleich dem kardinalen Nachfolger $(\aleph_\alpha)^+$ von α ist, geht die rekursive Definition der Aleph-Funktion gemäß Definition 5.251 in die folgende Form über:

5.30.17 Definition der allgemeinen Aleph-Funktion $\aleph$ ist transfinite Aufzählung $\mathtt{Tf}_{\mathtt{Cn}_\infty}$ der Klasse $\mathtt{Cn}_\infty$ aller unendlichen Kardinalzahlen, d. h. die Funktion von $\mathtt{On}$ in $\mathtt{Cn}_\infty$ mit

$$\begin{aligned} \aleph_0 &:\equiv \omega, \\ \aleph_{\alpha+1} &:\equiv (\aleph_\alpha)^+ && \text{für } \alpha \text{ aus } \mathtt{On}, \text{ und} \\ \aleph_\lambda &:\equiv \sup \mathtt{Wb}(\aleph/\lambda) && \text{für Limeszahlen } \lambda. \end{aligned}$$

Die Sukzessor-Rekursionsgleichung $\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+$ bedeutet, dass sich der Index um eins erhöht, wenn wir von einer Kardinalzahl zu ihrem kardinalen Nachfolger übergehen. Die Limes-Rekursionsgleichung $\aleph_\lambda := \sup \mathtt{Wb}(f/\lambda)$ bedeutet, dass wenn man von den Kardinalzahlen $\aleph_\xi$, deren Index ξ kleiner als die Limeszahl λ ist (d. h. von den Elementen von $\mathtt{Wb}(\aleph/\lambda)$) zur nächst höheren Kardinalzahl übergeht, der Index dieser Kardinalzahl λ ist. So haben wir nun die Indizierung der Alephs exakt definiert, die schon im Vorfeld von Definition 5.30.13 ohne Definition beschrieben wurde.

Aus Theorem 5.30.15 und seinem Korollar 5.30.16 folgt nun sofort, dass die Aleph-Funktion der Isomorphismus von $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ in $\langle \mathtt{Cn}_\infty, < \rangle$ ist und $\mathtt{On} \sim \mathtt{Cn}_\infty$ gilt: d. h. es gibt relationstheoretisch *genau so viele Alephs, wie es Ordinalzahlen gibt*. Hieraus folgt überdies, dass es *genau so viele Kardinalzahlen wie Ordinalzahlen* gibt,[829] so dass $\mathtt{Cn}$ ebenso wie $\mathtt{Cn}_\infty$ mit der Unmenge $\mathtt{On}$ gleichmächtig ist. Insgesamt können wir festhalten:

5.30.18 Korollar *$\aleph$ ist Isomorphismus von $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ in $\langle \mathtt{Cn}_\infty, < \rangle$.*
$\mathtt{Cn}_\infty$ und $\mathtt{Cn}$ sind mit $\mathtt{On}$ gleichmächtige Unmengen.

---

827 Beweis: Für jedes Element α von $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$ ist das Supremum $\sigma := \sup \mathtt{Wb}(f/\lambda)$ zunächst größer oder gleich α. Es ist aber sogar größer: Denn da α im Wertebereich von f/λ liegt, gibt es ein ξ aus λ (also mit $\xi < \lambda$), so dass $\alpha = f(\xi)$. Da λ Limeszahl ist, gibt es zu ξ ein η mit $\xi < \eta < \lambda$ (sonst wäre λ der Nachfolger von ξ). Da f (als Isomorphismus) ordnungserhaltend ist, gilt $f(\xi) < f(\eta)$, und da η kleiner als (also Element von) λ ist, gehört $f(\eta)$ zum Wertebereich von f/λ, ist also $\leq \sigma$. Zusammengefasst gilt also $\alpha = f(\xi) < f(\eta) \leq \sigma$, also $\alpha < \sigma$. Da A *abgeschlossen* ist, gehört σ zu A, und insgesamt haben wir jetzt gezeigt: ≪σ ist ein Element von A, das größer als alle in $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$ liegenden Elemente von A ist≫. Ein ρ mit derselben Eigenschaft, das kleiner als σ ist, gibt es nicht: es wäre sonst größer als alle Elemente der Menge $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$, und dennoch kleiner als das Supremum σ dieser Menge, was absurd ist. □

828 Diese ≪allgemeine Aleph-Funktion≫ ist von der sog. ≪Aleph-Funktion von Hartogs≫ zu unterscheiden, die ebenfalls mit $\aleph$ bezeichnet wird (vgl. Oberschelp, *Allgemeine Mengenlehre* S 190).

829 Aus $\mathtt{On} \sim \mathtt{Cn}_\infty$ folgt $\mathtt{On} \precsim \mathtt{Cn}_\infty$, und da nun $\mathtt{Cn}_\infty \subseteq \mathtt{Cn} \subseteq \mathtt{On}$, also (wegen Satz 5.89 S. 200) $\mathtt{Cn}_\infty \precsim \mathtt{Cn} \precsim \mathtt{On}$ gilt, folgt $\mathtt{On} \precsim \mathtt{Cn}_\infty \precsim \mathtt{Cn} \precsim \mathtt{On}$, also $\mathtt{On} \precsim \mathtt{Cn} \precsim \mathtt{On}$ und wegen Theorem 5.15.5 S. 201 schließlich $\mathtt{On} \sim \mathtt{Cn}$.

Da $\aleph$ als Isomorphismus eine Bijektion ist, gibt es zu jedem Aleph κ *genau einen* Index α, so dass $\kappa = \aleph_\alpha$. Daher können wir von „dem“ Index eines Aleph sprechen.

Auf ähnliche Weise, wie man Ordinalzahlen einteilt in die 0, die Sukzessorzahlen und Limeszahlen,[830] können wir nun auch die Kardinalzahlen einteilen:

5.30.19 Definition Eine *Sukzessor-Kardinalzahl* ist eine Kardinalzahl, die der kardinale Nachfolger κ^+ einer anderen Kardinalzahl ist. Eine *Limes-Kardinalzahl* ist eine von 0 verschiedene Kardinalzahl, die keine Sukzessor-Kardinalzahl ist.[831]

Es ist klar, dass jede Kardinalzahl entweder 0, oder eine Sukzessor-Kardinalzahl oder eine Limes-Kardinalzahl ist. Alle von 0 verschiedenen endlichen Zahlen n sind natürlich Sukzessor-Kardinalzahlen, und ω ist die kleinste Limes-Kardinalzahl. Für die von ω verschiedenen unendlichen Kardinalzahlen aber können wir an ihrem Index ablesen, ob sie Sukzessor-Kardinalzahlen oder Limes-Kardinalzahlen sind. Das hängt nämlich davon ab, ob die Ordinalzahl, die als ihr Index dient, eine Sukzessorzahl $\alpha + 1$ oder eine Limeszahl λ ist:

5.30.20 Theorem *Ist $\alpha + 1$ eine Sukzessorzahl und λ eine Limeszahl, so ist $\aleph_{\alpha+1}$ eine Sukzessor-Kardinalzahl und $\aleph_\lambda$ eine Limes-Kardinalzahl.*

Beweis. Nach Definition der Aleph-Funktion ist zunächst $\aleph_{\alpha+1}$ die Sukzessor-Kardinalzahl $(\aleph_\alpha)^+$. Angenommen, $\aleph_\lambda$ ist ebenfalls eine Sukzessor-Kardinalzahl, so gibt es ein ξ mit $\aleph_\lambda = (\aleph_\xi)^+$. Dann ist $\aleph_\xi < (\aleph_\xi)^+ = \aleph_\lambda$, und da die Funktion $\aleph$ als Isomorphismus ordnungserhaltend ist, folgt $\xi < \lambda$. Da λ aber Limeszahl ist, gibt es Ordinalzahlen ψ mit $\xi < \psi < \lambda$, und daraus folgt wegen der Ordnungserhaltung durch den Isomorphismus $\aleph$, dass $\aleph_\xi < \aleph_\psi < \aleph_\lambda$, d. h. $\aleph_\xi < \aleph_\psi < (\aleph_\xi)^+$, im Widerspruch dazu, dass $(\aleph_\xi)^+$ für $\aleph_\xi$ die *nächst größere* Kardinalzahl ist. Also war die Annahme falsch und $\aleph_\lambda$ muss eine Limes-Kardinalzahl sein. □
Für unsere Modelltheorie halten wir nun über Kardinalzahlen das Folgende fest:

5.30.21 Metatheorem Sei $\mathbb{G}$ ein paartreues Modell und bezeichne $\ll M \gg$ ebenso wie $\ll \kappa \gg$ in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ jeweils dasselbe Objekt: und zwar $\ll M \gg$ eine in $\mathbb{G}$ liegende Menge, für die auch $|M|$ in $\mathbb{G}$ liegt, und $\ll \kappa \gg$ eine in $\mathbb{G}$ liegende Kardinalzahl, für die auch κ^+ in $\mathbb{G}$ liegt. Dann gilt:

Die «Kardinalzahlen» des Modells $\mathbb{G}$ sind die in $\mathbb{G}$ liegenden Kardinalzahlen. (5.252)

$\ll |M| \gg$ bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dasselbe Objekt. (5.253)

$\ll \kappa^+ \gg$ bezeichnet in den Modellen $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe Objekt. (5.254)

Die «Sukzessor-Kardinalzahlen» bzw. «Limes-Kardinalzahlen» des Modells $\mathbb{G}$ sind die in $\mathbb{G}$ liegenden Sukzessor-Kardinalzahlen bzw. Limes-Kardinalzahlen. (5.255)

Beweis. Siehe Anhang S. 471–472. □ Ist A eine unbeschränkte Klasse von Ordinalzahlen und f ihre transfinite Aufzählung, so ist nach Korollar 5.30.16 $f(a)$ für jede Ordinalzahl α stets größer oder gleich α. Gilt nun $f(\alpha) = \alpha$, so ist α ein sog. *Fixpunkt* von f und hat die Eigenschaft, die «α-te Zahl von A» zu sein. Ein solches α heißt eine *kritische Zahl* von A:

5.30.22 Definition Eine *kritische Zahl* einer unbeschränkten Klasse A von Ordinalzahlen ist ein Element α von A, das von der transfiniten Aufzählung f von A auf sich selbst geworfen wird, für das also $f(\alpha) = \alpha$ gilt. Die Klasse der kritischen Zahlen von A nennen wir $\mathtt{Cr}(A)$.[832]

---

830 Siehe Definition 5.14.9 S. 193.

831 Formal: κ (ist) Sukzessor-Kardinalzahl $:\Leftrightarrow \kappa \in \mathtt{Cn} \wedge \bigvee_{\alpha \in \mathtt{Cn}} (\kappa = \alpha^+)$.
κ (ist) Limes-Kardinalzahl $:\Leftrightarrow \kappa \in \mathtt{Cn} \setminus \{0\} \wedge \neg \bigvee_{\alpha \in \mathtt{Cn}} (\kappa = \alpha^+)$.

832 Formal: α (ist) kritische Zahl von A $:\Leftrightarrow \alpha \in \mathtt{On} \wedge \mathtt{Tf}_A(\alpha) = \alpha$. $\mathtt{Cr}(A) :\equiv \{\xi \mid \xi$ kritische Zahl von $A\}$.

Enthält A nur Kardinalzahlen, kann man die kritischen Zahlen von A so charakterisieren:

5.30.23 Theorem Sei A eine unbeschränkte Klasse von Kardinalzahlen und $\kappa \in A$. Dann gilt: *κ ist kritische Zahl von A $\leftrightarrow$ es gibt genau κ Elemente von A, die kleiner als κ sind.*

Beweis. Siehe Anhang S. 472. □ Wir können nun im allgemeinen Rahmen die Existenz von Kardinalzahlen υ nachweisen, die ihr eigener Index sind (also Zahlen υ mit $\upsilon = \aleph_\upsilon$). Diese Kardinalzahlen sind in der jetzt eingeführten Terminologie *die Fixpunkte der Aleph-Funktion*, d. h. *die kritischen Zahlen von* $\mathtt{Cn}_\infty$. Wenn es solche gibt, muss es sich jedenfalls um Limes-Kardinalzahlen handeln, die größer als $\aleph_0$ sind:

Alle kritischen Alephs sind Limes-Kardinalzahlen größer als $\aleph_0$.[833] (5.256)

Das folgende erstaunliche Theorem stellt sicher, dass nicht nur $\mathtt{Cn}_\infty$, sondern *jede* beschränkte und abgeschlossene Teilklasse A von $\mathtt{On}$ stets kritische Zahlen besitzt, und dass darüber hinaus die Klasse $\mathtt{Cr}(A)$ dieser kritischen Zahlen immer eine Unmenge ist, und zwar eine solche, die selbst wieder zu den unbeschränkten und abgeschlossenen Teilklassen von $\mathtt{On}$ gehört.

5.30.24 Theorem *Ist A eine unbeschränkte und abgeschlossene Klasse von Ordinalzahlen, so ist die Klasse $\mathtt{Cr}(A)$ der kritischen Zahlen von A eine unbeschränkte und abgeschlossene Unmenge von Ordinalzahlen.*

Beweis. Siehe Anhang S. 472–474. □ Nun lässt sich Folgendes zeigen:

5.30.25 Theorem Für die unendlichen Kardinalzahlen oder Alephs gilt:
Ein Index ist stets kleinergleich seinem Aleph ($\alpha \leq \aleph_\alpha$),
kann aber sein Aleph einholen (d. h. es gibt kritische Alephs υ mit $\upsilon = \aleph_\upsilon$),
und die Klasse $\mathtt{Cr}(\mathtt{Cn}_\infty)$ dieser kritischen Alephs ist unbeschränkt und abgeschlossen.

Beweis. Da die Klasse $\mathtt{Cn}_\infty$ der Alephs unbeschränkt und abgeschlossen ist (vgl. die Beispiele nach Definition 5.30.13), folgt dies aus Korollar 5.30.16 und Theorem 5.30.24. □ Insbesondere existiert das kleinste kritische Aleph, das wir θ^* genannt haben (siehe S. 322). Die Unbeschränktheit der Klasse $\mathtt{Cr}(\mathtt{Cn}_\infty)$ aller kritischen Alephs bedeutet nun, dass $\mathtt{Cr}(\mathtt{Cn}_\infty)$ eine mit $\mathtt{On}$ gleichmächtige Unmenge ist (Korollar 5.30.16), und da $\mathtt{Cr}(\mathtt{Cn}_\infty)$ unbeschränkt und abgeschlossen ist, existierten gemäß Theorem 5.30.24 auch hier wieder Fixpunkte bzw. kritische Zahlen, die abermals eine unbeschränkte und abgeschlossene Klasse $\mathtt{Cr}(\mathtt{Cr}(\mathtt{Cn}_\infty))$ bilden usw.

Man könnte nun glauben, dass schon das kleinste kritische Aleph θ^* so groß ist, dass kein vernünftiger Anlass besteht, sich mit noch größeren Zahlen zu beschäftigen. Der folgende Abschnitt wird den Leser jedoch vom Gegenteil überzeugen.

[833] Beweis: Sei υ eine kritische Zahl von $\mathtt{Cn}_\infty$, dann liegt υ in $\mathtt{Cn}_\infty$, ist also eine unendliche Kardinalzahl, weshalb $\aleph_0 \leq \upsilon$ ist. Nun ist aber υ nicht mit $\aleph_0$ identisch (denn es gilt $0 < \aleph_0$, so dass $\aleph_0$ selbst nicht kritisch ist), also ist $\aleph_0 < \upsilon$. Angenommen, υ ist eine Sukzessor-Kardinalzahl, so ist der Index von υ eine Sukzessorzahl $\alpha + 1$ (wäre nämlich Index von υ eine Limeszahl λ, so wäre υ nach Theorem 5.30.20 S. 325 eine Limes-Kardinalzahl; und wäre der Index 0, so wäre $\upsilon = \aleph_0$, was falsch ist, wie wir gerade gesehen haben). Es folgt also $\upsilon = \aleph_{\alpha+1}$ und zugleich $\upsilon = \aleph_\upsilon$ (weil υ kritisch ist), also $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\upsilon$, und da die Aleph-Funktion als Isomorphismus injektiv ist, folgt daraus $\alpha + 1 = \upsilon$. Somit ist $\alpha + 1$ eine Sukzessorzahl, die zugleich eine unendliche Kardinalzahl (nämlich $= \upsilon$) ist. Jedoch gibt es nach Satz 5.243 S. 317 keine unendlichen Sukzessorzahlen, die Kardinalzahlen sind, und so war die Annahme falsch. □

5.31 Unerreichbare Kardinalzahlen und das Universenaxiom

Unter *unerreichbaren Kardinalzahlen* (inaccessible cardinals) oder *Theta-Zahlen* versteht man gewisse Kardinalzahlen, die viel größer sind als alle, die wir bisher besprochen haben.

5.31.1 Definition Eine Kardinalzahl υ heißt *unerreichbar* oder eine *Theta-Zahl*, wenn gilt:

(a) υ ist eine Limes-Kardinalzahl größer als $\aleph_0$,

(b) die Vereinigung von weniger als υ Mengen mit Mächtigkeiten kleiner als υ hat ebenfalls eine Mächtigkeit kleiner als υ,[834]

(c) und ist die Mächtigkeit einer Menge kleiner als υ, gilt dies auch für ihre Potenzmenge.[835]

Treffen die Bedingungen (a) und (b) zu, heißt υ bereits *schwach unerreichbar*. Trifft auch (c) zu, heißt υ schlechthin unerreichbar und man sagt dann auch, dass υ *stark unerreichbar* ist. Gilt (a), so kann man υ nicht „von unten“ her erreichen, indem man sukzessive von einer Kardinalzahl zu ihrem Nachfolger springt. Gilt auch (b) und (c), kann man eine solche Kardinalzahl auch nicht durch Vereinigung und Potenzmengenbildung „von unten her“ erreichen, und so drückt der Name „Unerreichbarkeit“ aus, dass die Operationen, die man üblicherweise benutzen kann, um aus kleineren Mengen immer größere zu gewinnen, hier nicht ausreichen, um zu υ „aufzusteigen“. Dass auch schon die „schwach“ unerreichbaren Zahlen (wenn sie existieren) wirklich sehr groß sein müssen, zeigt das folgende Theorem:

5.31.2 Theorem *Jedes schwach unerreichbare υ ist eine kritische Zahl* (mit $\upsilon = \aleph_\upsilon$)*, und es liegen unendlich viele kritische Kardinalzahlen κ* (mit $\kappa = \aleph_\kappa$) *noch unterhalb von υ.*

Beweis. Siehe Anhang S. 474–475. □ Damit muss υ also viel größer sein als die am Ende des vorhergehenden Abschnitts 5.30 betrachtete kleinste kritische Kardinalzahl θ^*, die ja bereits kaum vorstellbar ist.[836] Theorem 5.31.2 gilt natürlich erst recht für „stark“ unerreichbare Zahlen υ. Einen Eindruck von der Größe stark unerreichbarer Zahlen wird vor allem Korollar 5.31.9 vermitteln, aber auch der folgende Satz bringt schon etwas davon zum Ausdruck:

5.31.3 Theorem *Ist $\alpha < \upsilon$ für eine unerreichbare Kardinalzahl υ, so gilt auch $|\mathbb{V}_\alpha| < \upsilon$. Außerdem ist $|\mathbb{V}_\upsilon| = \upsilon$.*

Beweis. Siehe Anhang S. 475. □ Die schwach unerreichbaren Zahlen wurden erstmals 1914 von Felix Hausdorff beschrieben. Schon die kleinste von ihnen, so meinte Hausdorff, sei „von einer so exorbitanten Größe, dass sie für die üblichen Zwecke der Mengenlehre kaum jemals in Betracht kommen wird“.[837] Stark unerreichbare Zahlen wurden erstmals 1930 von Zermelo, Tarski und

---

834 Genauer: Ist $\mathfrak{M}$ Mengenmenge mit $|\mathfrak{M}| < \upsilon$ und $|M| < \upsilon$ für jedes M aus $\mathfrak{M}$, so ist $|\bigcup \mathfrak{M}| < \upsilon$.

835 Formal: υ (ist) unerreichbar $:\Leftrightarrow$ υ Limes-Kardinalzahl $\wedge$ $\aleph_0 < \upsilon$
$\wedge \bigwedge_{\mathfrak{M} \in \mathbb{M}} \Big((\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{M} \wedge |\mathfrak{M}| < \upsilon \wedge \bigwedge_{M \in \mathfrak{M}} |M| < \upsilon) \rightarrow |\mathfrak{M}| < \upsilon \Big) \wedge \bigwedge_{M \in \mathbb{M}} \Big(|M| < \upsilon \rightarrow |\mathcal{P}(M)| < \upsilon \Big)$.

836 Die Aussage von Theorem 5.31.2 kann noch wesentlich verstärkt werden. So ist nach Levy, *Basic Set Theory* S. 152 die kleinste schwach unerreichbare Kardinalzahl größer als die jeweils kleinste kritische Zahl von $\mathtt{Cr}(\mathtt{Cn}_\infty)$, $\mathtt{Cr}(\mathtt{Cr}(\mathtt{Cn}_\infty))$ usw. ad infinitum.

837 Vgl. Hausdorff, *Mengenlehre* S. 131. Hausdorff nannte diese Zahlen ≪reguläre Anfangszahlen mit Limesindex≫, wobei die ≪Regularität≫ mit Bedingung (b) von Definition 5.31.1 äquivalent ist.

Sierpiński betrachtet.[838] Die unerreichbaren Kardinalzahlen hängen eng mit den so genannten ≪Universen≫ oder ≪universalen Klassen≫ zusammen: Klassen, die so groß sind, dass sich in ihnen alle gewöhnlichen mathematischen Prozesse, auch die ins Unendliche laufenden, abspielen können, ohne aus ihnen jemals herauszuführen:[839]

5.31.4 Definition Eine Klasse $\mathfrak{U}$ heißt *universal* oder ein *Universum*, wenn sie ω enthält und $\in$-transitiv sowie $\mathcal{P}$–, $\bigcup$– und funktionstreu ist.[840]

Mit Blick auf die Bedeutung der Begriffe $\in$-Transitivität, $\mathcal{P}$–, $\bigcup$– und Funktionstreue[841] kann man sagen, dass eine Klasse $\mathfrak{U}$ genau dann universal ist, wenn für Individuen x, Mengen M, Mengenklassen $\mathfrak{M}$ und Funktionen f, deren Werte in $\mathfrak{U}$ liegen, stets gilt:

U-Unendlichkeitsaxiom:	Die Menge $\omega(=\aleph_0)$ ist Element von $\mathfrak{U}$.	(5.257)
U-Transitivitätsaxiom:	Ist $x \in M \in \mathfrak{U}$, so ist auch $x \in \mathfrak{U}$.	(5.258)
U-Potenzmengenaxiom:	Ist M Element von $\mathfrak{U}$, so auch $\mathcal{P}(M)$.	(5.259)
U-Vereinigungsmengenaxiom:	Ist $\mathfrak{M}$ Element von $\mathfrak{U}$, so auch $\bigcup \mathfrak{M}$.	(5.260)
U-Ersetzungsaxiom:	Ist $\mathtt{Db}(f) \in \mathfrak{U}$, so ist auch $\mathtt{Wb}(f) \in \mathfrak{U}$.	(5.261)

Wir können sofort Unmengen angeben, die diese Forderungen erfüllen:

Die Unmengen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{V}$ sind universal.[842] (5.262)

Nun stellt sich aber die Frage, ob es auch universale *Mengen* gibt. Ich werde weiter unten eine intuitive Begründung dafür angeben, dass diese Frage zu bejahen ist, und eine entsprechende Existenzaussage als Axiom aufstellen. Es wird sich auch zeigen, dass die Existenzfrage für universale Mengen mit derjenigen von unerreichbare Kardinalzahlen gleichbedeutend ist: em Unerreichbare Kardinalzahlen existieren dann und nur dann, wenn universale Mengen existieren.

Zunächst soll aber das folgende Theorem klarstellen, dass man aus einer universalen Klasse $\mathfrak{U}$ (wenn man vom Schnitt über die leere Menge und von der Komplementbildung absieht) *durch keinen Mengenbildungsprozess der bisher betrachteten Art herauskommt*. Ein solches Phänomen war uns zuerst am Ende von Abschnitt 5.18 begegnet: Die entsprechenden Mengenbildungsprozesse mit endlichen Mengen ergeben wieder endliche Mengen. Daher verhält sich eine universale Klasse $\mathfrak{U}$ zu allen ihren (endlichen und unendlichen) Mengen ähnlich wie die Klasse aller endlichen Mengen zu diesen Mengen:[843]

---

838 Vgl. Zermelo, *Grenzzahlen und Mengenbereiche*, Tarski und Sierpiński, *Nombres inaccessibles* und Tarski, *Unerreichbare Kardinalzahlen*. Zermelo sprach von ≪Grenzzahlen≫, während der Ausdruck ≪unerreichbare Kardinalzahlen≫ von Tarski und Sierpiński eingeführt wurde. Tarski zeigte in *Unerreichbare Kardinalzahlen* S. 74f, dass wenn die (bisher weder bewiesene noch widerlegte) allgemeine Kontinuumshypothese zutrifft (siehe Abschnitt 5.22), eine Zahl genau dann schwach unerreichbar ist, wenn sie stark unerreichbar ist. Man bräuchte dann also zwischen schwach und stark unerreichbaren Zahlen nicht mehr zu unterscheiden, und könnte in der Definition der Unerreichbarkeit Bedingung (c) weglassen.

839 Universen werden in der Literatur verschieden definiert, stets jedoch so, dass in einem Universum sämtliche klassischen Axiome der Mengenlehre gelten.

840 Formal: $\mathfrak{U}$ (ist) Universum $:\Leftrightarrow$ $\mathfrak{U}$ Klasse $\wedge\ \omega \in \mathfrak{U} \wedge \mathfrak{U}$ ist $\in$-transitiv, $\mathcal{P}$–, $\bigcup$– und funktionstreu.

841 Vgl. die Definitionen 5.8.6 S. 110, 5.29.14 S. 311, 5.29.11 S. 310 und 5.29.27 S. 314.

842 Dass $\mathbb{D}$ ein Universum ist, ist trivial. $\mathbb{V}$ ist $\in$-transitiv wegen 5.195 S. 305, $\mathcal{P}$– und $\bigcup$-treu wegen 5.211 S. 308 und funktionstreu wegen 5.29.27 S. 314. Außerdem gilt $\omega \in \mathbb{V}$ wegen 5.200 S. 305.

843 Die Klasse der endlichen Mengen wäre sogar selbst ein Universum, wenn sie ω enthalten würde.

5.31.5 Theorem Für Universen $\mathfrak{U}$ gilt:

Alle Teilklassen von Elementen von $\mathfrak{U}$ sind Elemente von $\mathfrak{U}$. (5.263)

ω und alle natürlichen Zahlen sind Elemente von $\mathfrak{U}$. Insbesondere ist $\emptyset \in \mathfrak{U}$. (5.264)

Aus $x \in \mathfrak{U}$ folgt $\{x\} \in \mathfrak{U}$. Aus $x \in \mathfrak{U}$ und $y \in \mathfrak{U}$ folgt $\{x, y\} \in \mathfrak{U}$. (5.265)

Aus $M \in \mathfrak{U}$ und $N \in \mathfrak{U}$ für Mengen M und N folgt $M \cup N \in \mathfrak{U}$. (5.266)

Aus $x \in \mathfrak{U}$ und $y \in \mathfrak{U}$ folgt $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{U}$. (5.267)

Liegt die Ordinalzahl α in $\mathfrak{U}$, gilt dies auch für ihre Vorgänger, für $\alpha + 1$ und $\mathbb{V}_\alpha$. (5.268)

Liegen Mengen M und N in $\mathfrak{U}$, so auch $M \cap M$, $M \setminus N$ und $M \times N$. (5.269)

Liegen Mengen M und N in $\mathfrak{U}$, so liegt in $\mathfrak{U}$ auch
jede Relation mit linken Gliedern aus M und rechten Gliedern aus N, (5.270)
ebenso wie die Menge $\mathtt{Func}(M, N)$ aller Funktionen von M in N.

Liegt eine nichtleere Mengenklasse $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$, so auch $\bigcap \mathfrak{M}$. (5.271)

Liegt eine Mengenmenge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$, so auch $\times\, \mathfrak{M}$. (5.272)

Ist $\langle x \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ Familie von Mengen aus $\mathfrak{U}$ und $I \in \mathfrak{U}$ oder $|I| \in \mathfrak{U}$, gilt $\bigcup_{i\in I} \theta(i) \in \mathfrak{U}$. (5.273)

Ist $\langle x \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ Familie von Mengen aus $\mathfrak{U}$ und $I \neq \emptyset$, gilt $\bigcap_{i\in I} \theta(i) \in \mathfrak{U}$. (5.274)

Ist $\langle x \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ Familie von Mengen aus $\mathfrak{U}$ und $I \in \mathfrak{U}$, gilt $\bigtimes_{i\in I} \theta(i) \in \mathfrak{U}$. (5.275)

Liegt die Menge M in $\mathfrak{U}$, so auch $|M|$ und jede Ordinalzahl $< |M|$. (5.276)

Liegt die Kardinalzahl κ in $\mathfrak{U}$, so auch deren kardinaler Nachfolger κ^+. (5.277)

Beweis. Siehe Anhang S. 476–478. □ Da jedes Universum per Definition 5.31.4 $\in$-transitiv ist und nach Satz 5.264 S. 329 die Zahlen 0 und 1 enthält, sind Universen *Modelle* im Sinne von Erklärung 5.8.7 S. 110. Daher heißen Universen auch „universale Modelle“, und wir können fragen, welche Axiome in ihnen gelten. Das folgende Metatheorem zeigt, dass in Universen und *nur* in diesen *alle* klassischen Axiome gelten:

5.31.6 Metatheorem *Jedes Universum ist ein Modell, in denen alle klassischen Axiome gelten. Umgekehrt ist jedes Modell, in dem alle klassischen Axiome gelten, ein Universum.*

Beweis. Siehe Anhang S. 478. □ Die beiden nächsten Theoreme stellen nun den Zusammenhang zwischen *universalen Mengen* und *unerreichbaren Kardinalzahlen* her:

5.31.7 Theorem Sei $\mathfrak{U}$ eine universale Menge. *Dann gibt es Kardinalzahlen, die größer sind als sämtliche in $\mathfrak{U}$ vorhandenen, und die kleinste von diesen ist unerreichbar. Außerdem gibt es dann ein unerreichbares υ, so dass die Mächtigkeit von $\mathfrak{U}$ größer oder gleich υ ist.*

Beweis. Siehe Anhang S. 478–480. □ So impliziert die Existenz einer universalen Menge die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl. Es gilt auch das Umgekehrte, so dass die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen und die Existenz von Universen sich gegenseitig implizieren:

5.31.8 Theorem *Ist υ unerreichbar, so ist $\mathbb{V}_\upsilon$ eine universale Menge, und ist umgekehrt für eine Ordinalzahl υ die Menge $\mathbb{V}_\upsilon$ ein Universum, so ist υ eine unerreichbare Kardinalzahl.*

Beweis. Siehe Anhang S. 480–481. □ Unerreichbare Kardinalzahlen υ sind daher *so groß, dass in $\mathbb{V}_\upsilon$ die ganze klassische Mengenlehre stattfinden kann*:

5.31.9 Korollar *Ist υ unerreichbar, so gelten in $\mathbb{V}_\upsilon$ alle klassischen Axiome, und ist umgekehrt υ eine Ordinalzahl, so dass in $\mathbb{V}_\upsilon$ alle klassischen Axiome gelten, so ist υ unerreichbar.*

Beweis. Dies ergibt sich aus Theorem 5.31.8 in Verbindung mit Metatheorem 5.31.6. □ Nun soll gezeigt werden, dass sich aus den bisherigen Axiomen die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen nicht herleiten lässt. Hierzu benötigen wir die zwei folgenden Metatheoreme:

5.31.10 Metatheorem *In einem Universum $\mathbb{G}$, das ja ein universales Modell ist, Modell sind die ≪unerreichbaren Kardinalzahlen≫ des Modells die in $\mathbb{G}$ liegenden unerreichbaren Kardinalzahlen.*

Beweis. Siehe Anhang S. 481–482. □

5.31.11 Metatheorem und Definition *Ist υ unerreichbar, so existiert ein Modell $\mathbb{G}$ mit $|\mathbb{G}| = \upsilon$, dessen ≪Ordinalzahlen≫ genau die unterhalb von υ liegenden Ordinalzahlen sind, und in dem alle bisherigen Axiome einschließlich des Axioms für Urelemente gelten.* Wir werden im Beweis ein solches $\mathbb{G}$ konstruieren und nennen dieses das *υ-te Universalmodell* $\mathbb{G}_\upsilon$.

Beweis. Siehe Anhang S. 482–486. □

5.31.12 Korollar *Aus den bisherigen Axiomen lässt sich die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen nicht herleiten.*

Beweis. Angenommen, aus den bisherigen Axiomen folgt die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen. Sei dann υ die kleinste dieser Zahlen. Da gemäß 5.31.11 in $\mathbb{G}_\upsilon$ alle bisherigen Axiome gelten, muss es nach Annahme auch im Modell $\mathbb{G}_\upsilon$ eine ≪unerreichbare Kardinalzahl≫ υ^* geben, die nach 5.31.10 auch absolut gesehen (d. h. im Standardmodell) eine unerreichbare Kardinalzahl ist. Doch ist υ^* in $\mathbb{G}_\upsilon$ auch eine ≪Ordinalzahl≫, also gemäß 5.31.11 im Standardmodell $< \upsilon$, und so ist υ^* hier eine unerreichbare Kardinalzahl, die kleiner als die kleinste unerreichbare Kardinalzahl υ ist, was absurd ist. Somit war die Annahme falsch. □

Wenn also unerreichbare Kardinalzahlen existieren, müssen sie von allen Zahlen, deren Existenz wir mit den bisherigen Axiomen beweisen können, verschieden sein. Daher *müssen wir die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen durch ein neues Axiom sicherstellen*, wenn wir mit unerreichbaren Kardinalzahlen (bzw. mit universalen Mengen) arbeiten wollen.[844] Das System, das man erhält, wenn man ein solches „Universenaxiom“ zu den klassischen Axiomen hinzufügt, wird manchmal als „Tarski-Grothendieck–“ oder **TG**-Mengenlehre bezeichnet. Das Universenaxiom wurde nämlich zum ersten Mal 1938 von Alfred Tarski aufgestellt,[845] und von Alexander Grothendieck in der Kategorienlehre benutzt.[846] Später hat es Dieter Klaua in sein System integriert.[847] Es gibt nun verschiedene Versionen eines solchen Axioms. Am einfachsten ist die Forderung, *dass eine universale Menge* bzw. *eine unerreichbare Kardinalzahl existiert*. Statt dessen fordert man manchmal die Existenz von zwei unerreichbaren Kardinalzahlen θ_0 und θ_1 oder auch die Existenz unendlich vieler, die man der Größe nach geordnet $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ nennt. Da man jedoch für Axiome keine Begriffe wählen sollte, die umfangreiche Erklärungen voraussetzen, ist die „Universums“-Variante eines solchen Axioms der „Kardinalzahl“-Variante vorzuziehen, und am sinnvollsten scheint dann die Forderung zu sein, dass es zu jedem Individuum eine universale Menge gibt, die das Individuum

844 Der Rückgriff auf universale Mengen ist besonders für die sog. mathematische *Kategorienlehre* vorteilhaft, wenn nicht sogar unverzichtbar. (vgl. Mac Lane, *Categories* S. 22-25).

845 Tarski forderte, dass jede Menge in einer universalen Menge liegt. Er nannte dieses Axiom das „Axiom der unerreichbaren Mengen“ (vgl. Tarski, *Unerreichbare Kardinalzahlen* § 2 S. 84).

846 Es scheint von Grothendieck hierüber nur unpubliziertes Material gegeben zu haben, denn es heißt bei Mac Lane, *Categories and Foundation* S. 42: „Grothendieck (unpublished) is reputed to use the assumed existence of strongly inaccessible cardinals to construct large ‚universes‘ in which ... one can properly form a category of all abelian categories“. Vgl. auch die Hinweise bei Hayden und Kennison, *Set Theory* S. 157f mit Fußnote 2 S. 157; Mac Lane, *Categories* S. 25 und Potter, *Sets* S 73f.

847 Vgl. Klaua, *Mengenlehre* S. 321 und Klaua, *Unerreichbarkeitsaxiom.*

enthält. Ich formuliere daher das Universenaxiom als „Schlussstein“ für das Axiomensystem unserer realistischen Mengenlehre wie folgt:

5.31.13 Vierzehntes Axiom der Mengenlehre: Universenaxiom *Jedes Individuum a ist Element einer universalen Menge $\mathfrak{U}$.*

Plausibilitätsbetrachtung. Sei a ein Individuum. Dann ist $\{a\}$ eine Menge, und dieser Menge entspricht ein Erkenntnisakt, dessen unmittelbarer Inhalt allein durch a gebildet wird. Wenn wir nun einen solchen Erkenntnisakt ausüben, haben wir aber wenigstens indirekt *noch weitere Individuen* vor uns, die wir auf dem Weg des *Aufmerkens* klarer in den Blick nehmen können. Dies lässt sich anhand der Betrachtung eines Körpers illustrieren: Wer direkt einen Körper vor Augen hat, hat indirekt auch seine Teile vor Augen, insbesondere etwa Seitenflächen, Kanten und Ecken. Außerdem hat er auch das ganze räumliche Universum des Körpers und dessen Teile vor Augen als Orte, wohin der Körper sich bewegen kann. Sei nun die Klasse aller Individuen, die bei einem Erkenntnisakt, dessen einziger direkter Inhalt ein Individuum a ist, notwendigerweise mit diesem verbunden ist. Diese Klasse nenne ich den *Horizont von a* und bezeichne sie als $H(a)$. Nun kann man alles in einem Moment *indirekt* in der Vorstellung Befindliche im nächsten Moment *direkt* betrachten (wodurch sich ein neuer Horizont auftut, der *dann* indirekt betrachtet wird). Dieses Prinzip haben ich schon benutzt, um das Potenzmengenaxiom und das Vereinigungsmengenaxiom plausibel zu machen.[848] Dort haben wir bestimmte *Teile* des Horizonts einer Menge durch Aufmerken zum Gegenstand eines neuen Erkenntnisaktes gemacht, dessen Abstraktion die Potenzmenge bzw. Vereinigungsmenge war. Hier wollen wir nun den *ganzen* Horizont eines Individuums a betrachten. Aus dem genannten Prinzip folgt, dass die Gesamtheit der Elemente von $H(a)$ direkter Inhalt einer widerspruchsfreien Denkform sein kann und somit $H(a)$ eine *Menge* ist. Aus gleichen Gründen ist dann auch der Horizont $H(H(a))$ von $H(a)$ eine Menge. Ich werde nun plausibel machen, dass vielleicht schon $H(a)$, in jedem Fall aber $H(H(a))$ ein Universum ist. Zunächst gilt für $H(a)$ das Folgende.

(1) *Ist $x \in H(a)$, so liegt auch jedes x^* in $H(a)$, das durch Abstraktion aus x hervorgeht.* Denn x^* ist in x enthalten wie der Teil im Ganzen, wird also von dem, der x betrachtet, mitbetrachtet.

(2) *Es gilt $a \in H(a)$ und $\{a\} \in H(a)$.* a liegt in $H(a)$, weil a das direkt betrachtete Objekt in diesem Horizont ist. Man kann aber nicht a betrachten, ohne sich dessen bewusst zu sein, d. h. ohne dass wenigstens indirekt ein weiterer Erkenntnisakt im Hintergrund abläuft, dessen Inhalt der auf a zielende Erkenntnisakt ist. Durch Abstraktion aus diesem Akt erhält man aber die Menge $\{a\}$, die deshalb nach (1) ebenfalls in $H(a)$ liegt.

(3) *$H(a)$ ist $\in$-transitiv: aus $x \in M \in H(a)$ folgt $x \in H(a)$.* Gilt nämlich $x \in M \in H(a)$, ist M eine im Horizont liegende Menge, und dann müssen auch ihre Elemente in $H(a)$ liegen: da eine Menge eine Zusammenfassung ihrer Elemente ist, kann man die Menge nicht betrachten, ohne (wenigstens indirekt) auch ihre Elemente (als zusammenstehend) vor sich zu haben.[849]

(4) *Aus $T \subseteq M \in H(a)$ folgt $T \in H(a)$. Außerdem ist $\emptyset \in H(a)$.* Die Elemente einer zum Horizont gehörigen Menge M müssen nämlich als zusammenstehende Einheiten sichtbar sein. Dadurch stehen auch alle Individuen zusammen, die zu einer beliebigen Auswahl von Elementen von M gehören und somit eine Teilmenge T von M bilden. Indem man dies erkennt, übt man wenigstens indirekt einen Vorstellungsakt aus, dessen Abstraktion T ist. Somit gehört T wegen (1) zum Horizont. Wenn nun wenigstens *eine* Menge zum Horizont gehört, was ja nach (2) wirklich der Fall ist, so gehört auch die (der leeren Auswahl aus dieser Menge entsprechende) leere Menge zum Horizont.

---

848 Siehe 5.10.16 S. 124 und 5.10.19 S. 125.

849 Umgekehrt braucht aber eine Menge M nicht im Horizont zu liegen, wenn dies für alle ihre Elemente gilt: Z. B. ist $H(a)$ selbst eine Menge, deren Elemente alle im Horizont liegen, aber es gilt $H(a) \notin H(a)$.

(5) *Ist eine Menge M Element von $H(a)$, so gilt dies auch für jede mit M gleichmächtige Menge, deren Elemente im Horizont liegen.* Wer M betrachtet, kann durch Ausblenden der konkreten Identität der Elemente von M eine Art abstrakten Behälter M^* erkennen, welcher eine bestimmte Anzahl von Elementen zusammenfassen kann. Dieses M^* liegt nach (1) im Horizont. Durch die Betrachtung von M^* erfasst man aber auch alle Möglichkeiten, M^* mit beliebigen ebenfalls erkannten (also im Horizont liegenden) Individuen „anzufüllen", also zu einer Menge zu konkretisieren, die dann mit M gleichmächtig ist. Somit werden indirekt auch alle diese Mengen betrachtet.

(6) *Ist eine Menge M Element von $H(a)$, so gilt dies auch für jede Menge L mit $|L| \leq |M|$, deren Elemente im Horizont liegen.* Denn $|L| \leq |M|$ bedeutet nach Satz 5.248 S. 318, dass $L \precsim M$, also gibt es nach Satz 5.90 S. 200 eine Injektion f von L in M. Für $T := \mathtt{Wb}(f)$ gilt dann, dass f eine Bijektion von L in T ist, also $L \sim T$ gilt. Nun ist T eine Teilklasse von M, so dass T nach (4) Element von $H(a)$ ist, und nach (5) liegt dann jede mit T gleichmächtige Menge, deren Elemente im Horizont liegen, selbst im Horizont. Also gilt $L \in H(a)$.

(7) *$H(a)$ ist funktionstreu: Gilt für eine Funktion f, dass $\mathtt{Db}(f) \in H(a)$ und $\mathtt{Wb}(f) \subseteq H(a)$, so gilt $\mathtt{Wb}(f) \in H(a)$.* Nach Satz 5.249 S. 318 gilt nämlich $|\mathtt{Wb}(f)| \leq |Db(f)|$, also folgt dies aus (6).

(8) *$H(a)$ ist $\mathcal{P}$-treu: Gilt für eine Menge M, dass $M \in H(a)$, folgt $\mathcal{P}(M) \in H(a)$.* Wer nämlich M betrachtet, hat auch einen Überblick über die Teilmengen von M, die er ja gemäß (4) in der Betrachtung von M „mitsieht". In diesem Überblick stehen die Teilmengen zusammen, geeint dadurch, dass sie unmittelbar alle im Blick auf M miterscheinen. Der Betrachter übt also einen indirekten Vorstellungsakt aus, dessen Abstraktion $\mathcal{P}(M)$ nach (1) in $H(a)$ liegt.

(9) *Aus $x \in H(a)$ folgt $\{x\} \in H(a)$, und aus $x \in H(a)$ und $y \in H(a)$ folgt $\{x, y\} \in H(a)$.* Liegt nämlich x in $H(a)$, so gilt für die Funktion f, die das nach (2) in $H(a)$ liegende a auf x wirft, dass $\mathtt{Db}(f) = \{a\} \in H(a)$ und $\mathtt{Wb}(f) = \{x\} \subseteq H(a)$. Also liegt nach (7) $\{x\}$ in $H(a)$. Liegen nun x und y in $H(a)$, argumentieren wir so: Nach (8) liegt mit $\{a\}$ auch die Potenzmenge $\{\emptyset, \{a\}\}$ von $\{a\}$ in $H(a)$, so dass für die Funktion g, die $\emptyset$ auf x und $\{a\}$ auf y wirft, $\mathtt{Db}(g) = \{\emptyset, \{a\}\} \in H(a)$ und $\mathtt{Wb}(g) = \{x, y\} \subseteq H(a)$ gilt. Also liegt nach (7) $\{x, y\}$ in $H(a)$.

(10) *$H(a)$ ist $\bigcup$-treu: Gilt für eine Mengenklasse $\mathfrak{M}$, dass $\mathfrak{M} \in H(a)$, gilt auch $\bigcup \mathfrak{M} \in H(a)$.* Der Betrachter von $\mathfrak{M}$ sieht nämlich die Elemente M von $\mathfrak{M}$ zusammenstehend vor sich, und in der Betrachtung eines jeden Elements M von $\mathfrak{M}$ stehen ihm auch die Elemente von M zusammengefasst vor Augen. In der Zusammenschau dieser Tatsachen stehen alle Elemente der Elemente von $\mathfrak{M}$ zusammen, und die Abstraktion $\bigcup \mathfrak{M}$ dieser Schau liegt nach (1) in $H(a)$.

(11) *Liegen Mengen M und N im Horizont, so auch ihre Vereinigung $M \cup N$.* Denn wegen (9) liegt $\{M, N\}$ in $H(a)$, also wegen (10) auch $\bigcup \{M, N\}$, das ist $M \cup N$.

(12) *Alle natürlichen Zahlen, also alle Ordinalzahlen α mit $\alpha < \omega$, liegen in $H(a)$.* Dies folgt durch triviale vollständige Induktion: 0, das ist $\emptyset$, liegt nach (4) in $H(a)$, und wenn vorausgesetzt wird, dass eine Zahl n in $H(a)$ liegt, liegt dort wegen (9) und (11) auch $n \cup \{n\}$, d. h. $n + 1$.

Insgesamt erfüllt die Horizontklasse $H(a)$ wegen (3), (7), (8), (10) alle Bedingungen für ein Universum *abgesehen* von der Bedingung (5.257), dass die Menge ω in $H(a)$ liegt. Aus (12) lässt sich $\omega \in H(a)$ nicht ableiten, denn (12) besagt nur, dass jedes *Element* von ω in $H(a)$ liegt; aber wie schon in Fußnote 849 festgestellt, können alle Elemente einer Menge in $H(a)$ liegen, ohne dass diese *selbst* in $H(a)$ liegen muss. Wir können außerdem mit dem folgenden Verfahren[850] gewisse Individuen auswählen, die alle im Horizont liegen, derart dass die Menge der ausgewählten Indi-

[850] Es handelt sich um eine Modifikation des Verfahrens 5.2.5 S. 75 für die Bildung von Unmengen.

viduen[851] *nicht* im Horizont liegt. Hierzu wählen wir zu jeder im Horizont liegenden Menge X ein ≪Außenindividuum≫ a_X aus, das kein Element von X ist und dennoch zum Horizont gehört.[852] Die Menge M aller ausgewählten a_X liegt dann nicht mehr im Horizont.[853] So gibt es Vielheiten, deren Bestandteile alle im Horizont von a liegen, ohne dass die Vielheiten selbst *als zusammengefasste Einheiten*, also als Mengen, im Horizont zu sehen sind. Der Grund hierfür scheint die Größe dieser Vielheiten zu sein: Sie sind so groß, dass sie sich nicht, *während wir direkt a und indirekt den Horizont von a vor Augen haben*, in einem einzigen Vorstellungsbild unterbringen lassen. Wir können diese Vielheiten *relativ inkonsistent* nennen, nämlich inkonsistent bezogen auf den Horizont $H(a)$. Die in $H(a)$ befindlichen Mengen nennen wir dagegen *relativ zum Horizont $H(a)$ konsistent.* Die relativ zu $H(a)$ inkonsistenten Vielheiten sind nun jedoch nicht absolut inkonsistent (also völlig unvorstellbar), da ja $H(a)$ selbst eine *Menge* ist, so dass jede dieser relativ inkonsistenten Vielheiten nach dem Teilmengenaxiom eine Teilmenge von $H(a)$ bildet. Nun ist ω eine Teilmenge von $H(a)$, denn nach (12) liegen alle Zahlen, die kleiner als (also Element von) ω sind, in $H(a)$. Ob nun also ω Element von $H(a)$ ist oder nicht, hängt davon ab, ob die Vielheit der Elemente von ω relativ zu $H(a)$ konsistent ist oder nicht. Glücklicherweise brauchen wir nicht zu entscheiden, ob bzw. wann dies der Fall ist.[854] $H(a)$ selbst nämlich ist als Menge jedenfalls ein Individuum, und wir können daher zur direkten Betrachtung von $H(a)$ übergeben. Im Horizont $H(H(a))$ von $H(a)$ aber liegt nun $H(a)$, so dass wegen (4) auch *alle Teilmengen von $H(a)$* in $H(H(a))$ liegen müssen, wobei es gleichgültig ist, ob die entsprechende Vielheit relativ zu $H(a)$ konsistent oder inkonsistent ist. Somit liegt ω in der Horizontmenge $H(H(a))$ von $H(a)$. Verstehen wir also unter dem ≪Universum $U(a)$ von a≫ die Menge $H(H(a))$, so ist $U(a)$ eine universale Menge mit $a \in U(a)$. □

Aus der Existenz von Universen folgt nun mittels Theorem 5.31.7 die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen. Es ergibt sich aber sogar Folgendes:

5.31.14 Theorem *Zu jeder Ordinalzahl α existiert eine unerreichbare Kardinalzahl υ, die größer als α ist.*

Beweis. Zunächst existiert zu α wegen Satz 5.250 S. 320 eine Kardinalzahl κ, die größer als α ist: nämlich $\kappa := |\alpha|^+$. Zu κ gibt es nach dem Universenaxiom eine universale Menge $\mathfrak{U}$ mit $\kappa \in \mathfrak{U}$, und nach Theorem 5.31.7 gibt es eine unerreichbare Kardinalzahl υ, die größer ist als alle in $\mathfrak{U}$ enthaltenen Kardinalzahlen, insbesondere größer als κ. Insgesamt gilt also $\alpha < \kappa < \upsilon$. □

5.31.15 Definition und Theorem Die Klasse der unerreichbaren Kardinalzahlen nennen wir $\mathtt{Cn}_{inacc}$. *Wegen Theorem 5.31.14 ist die Klasse $\mathtt{Cn}_{inacc}$ der unerreichbaren Zahlen unbeschränkt, also nach Korollar 5.30.16 eine mit $\mathtt{On}(= \Omega)$ gleichmächtige Unmenge.* Ihre transfinite Aufzählung (siehe Definition 5.30.14 S. 323) heißt die *Theta-Funktion* und wird mit θ bezeichnet, wobei man wie bei der Aleph-Funktion für den Funktionswert die Indexschreibweise benutzt. *So sind also*

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_\omega, \theta_{\omega+1} \ldots \theta_{\aleph_1} \ldots \theta_{\theta_0} \ldots$$

die unerreichbaren Kardinalzahlen in der Reihenfolge ihres Auftretens.

---

851 Die ausgewählten Individuen bilden eine Teilklasse der Menge $H(a)$, also per Teilmengenaxiom eine Menge.

852 Das ist immer möglich, und die einfachste Art, ein solches Außenindividuum zu wählen, besteht darin, als a_X einfach X selbst zu nehmen. Denn X liegt im Horizont und ist kein Element von X, d. h. kein Element von sich selbst. Man kann aber zum Beispiel auch $\{X\}$ oder $\{\{X\}\}$ usw. nehmen.

853 Beweis. Angenommen, M liegt in $H(a)$, so ergibt sich wie folgt ein Widerspruch: Da M *alle* a_X für Mengen X des Horizonts als Elemente hat, muss auch a_M Element von M sein; aber andererseits ist a_M als *Außen*individuum von M kein Element von M.

854 Das hängt vom „Anfangsobjekt“ a ab. Ist beispielsweise a selbst schon ω, so liegt natürlich ω in $H(a)$ und ist daher relativ zu a konsistent. Ist aber a eine endliche Zahl oder eine Nichtmenge, könnte ω relativ zu a inkonsistent sein.

Die kleinste unerreichbare Kardinalzahl θ_0 ist nun eine ähnlich bedeutsame Grenzmarke im Klassenuniversum wie die kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$, da sie die minimale Mächtigkeit eines Universums bezeichnet. So ist es gerechtfertigt, für Klassen, die auf oder über der Unendlichkeitsstufe von θ_0 liegen, einen eigenen Namen einzuführen:

5.31.16 Theorem und Definition Eine Klasse C heißt *unerreichbar unendlich*, wenn sie auf oder über der Unendlichkeitsstufe $\llbracket\theta_0\rrbracket$ liegt, d. h. wenn für die Mächtigkeit $|C|$ von C gilt, dass $\theta_0 \leq |C|$. *Es ist $\llbracket\theta_0\rrbracket$ ist die kleinste Stufe, auf der Universen liegen.*

Beweis. Zu jedem Universum $\mathfrak{U}$ gibt es ein unerreichbares υ mit $\upsilon \leq |\mathfrak{U}|$.[855] Da θ_0 die kleinste unerreichbare Kardinalzahl ist, gilt erst recht $\theta_0 \leq |\mathfrak{U}|$. Nach Theorem 5.31.3 ist nun $\mathbb{V}_{\theta_0}$ ein Universum mit Mächtigkeit θ_0. So ist θ_0 die Mächtigkeit der kleinsten Universen. □ Das folgende Theorem vergleicht die unerreichbare mit der abzählbaren, kontinuierlichen und funktionalen Unendlichkeit anhand der entsprechenden Kardinalzahlen $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ und θ_0:[856]

5.31.17 Theorem $\aleph_0 < \mathfrak{c} < \mathfrak{f} < \theta_0$, $\aleph_0 \prec \mathfrak{c} \prec \mathfrak{f} \prec \theta_0$ *und* $\llbracket\aleph_0\rrbracket <_{Fr} \llbracket\mathfrak{c}\rrbracket <_{Fr} \llbracket\mathfrak{f}\rrbracket <_{Fr} \llbracket\theta_0\rrbracket$.

Beweis. Siehe Anhang S. 486. □ Wir können nun unsere grundlegenden Unendlichkeitsbegriffe mit den entsprechenden Kardinalzahlen wie folgt charakterisieren: *abzählbar unendlich* sind diejenigen Klassen, deren Mächtigkeit die kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$ ist.[857] Alle größeren Klassen, deren Mächtigkeit also $> \aleph_0$ (d. h. $\geq \aleph_1$) ist, sind *überabzählbar unendlich*.[858] Dazu gehören die *kontinuierlich unendlichen* Klassen mit der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und die *funktional unendlichen* Klassen mit der noch größeren Mächtigkeit $\mathfrak{f}$.[859] Dabei ist bis heute offen, ob $\mathfrak{c}$ die erste überabzählbare Kardinalzahl $\aleph_1$ oder ein größeres Aleph ist, und entsprechend ist die genaue Position von $\mathfrak{f}$ in der Kardinalzahlreihe unbekannt (Kontinuumsproblem). Nach dem letzten Theorem ist aber klar, dass $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ zwischen $\aleph_0$ und θ_0 liegen.[860] *Unerreichbar unendlich* heißen diejenigen Klassen, deren Mächtigkeit $\geq \theta_0$ ist, wobei die niedrigsten Stufen im Bereich des unerreichbar Unendlichen noch *Mengen*stufen sind. Über diesen liegt der Bereich des *inkonsistent Unendlichen* mit seinen Unmengen, wobei wir für den Fall, dass es dort Größenunterschiede gibt, als Mächtigkeit der kleinsten Unmengen die uneigentliche Kardinalzahl Ω eingeführt haben, während $\beth$ die Mächtigkeit der größten oder *absolut unendlichen* Unmengen bezeichnet.[861] Insgesamt lautet nun die Ungleichungskette zwischen den wichtigsten unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 < \aleph_1 \leq \mathfrak{c} < \mathfrak{f} < \theta_0 < \Omega \leq \beth.$$

Mit dem Universenaxiom haben wir alle Axiome der realistischen Mengenlehre begründet, und wir könnten Bilanz ziehen. Zuvor soll jedoch im Folgenden das Thema der großen Kardinalzahlen noch etwas weitergeführt und die Frage nach dem Wesen der Zahl beantwortet werden.

---

855 Ist $\mathfrak{U}$ eine Menge, folgt dies aus Theorem 5.31.7. Andernfalls gilt für die Menge $\upsilon := \theta_0$ wegen Satz 5.94 S. 201, dass $\upsilon \prec \mathfrak{U}$, also erst recht $\upsilon \precsim \mathfrak{U}$ und somit nach Definition 5.30.8 S. 319 $\upsilon \leq \mathfrak{U}$.

856 Vgl. Satz 5.242 S. 317 und die Definitionen 5.20.4 S. 259, 5.20.24 S. 264 und 5.22.3 S. 282.

857 Siehe Theorem 5.30.10 S. 320.

858 Nach Definition 5.20.4 S. 259 sind die überabzählbar unendlichen Klassen diejenigen Klassen C mit $\omega \prec C$, d. h. mit $\aleph_0 \underset{5.30.9}{=} \omega \underset{5.245}{=} |\omega| \underset{5.247}{<} |C|$.

859 Nach Definition 5.20.24 S. 264 bzw. 5.22.3 S. 282 sind kontinuierlich bzw. funktional unendliche Klassen die auf $\llbracket\mathcal{P}(\omega)\rrbracket$ bzw. $\llbracket\mathfrak{c}\rrbracket$ liegenden Klassen, d. h. die Klassen C mit $C \sim \mathfrak{c}$ bzw. $C \sim \mathfrak{f}$, d. h. gemäß Satz 5.246 S. 318 mit $|C| = |\mathfrak{c}|$ bzw. $|C| = |\mathfrak{f}|$. Da $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{f}$ nach Satz 5.242 S. 317 Kardinalzahlen sind, ist dies wegen Satz 5.245 S. 318 äquivalent mit $|C| = \mathfrak{c}$ bzw. $|C| = \mathfrak{f}$.

860 Der aktuelle Stand zum Kontinuumsproblem (siehe auch S. 284–285) lässt sich so zusammenfassen, dass für $\mathfrak{c}$ fast alle Werte oberhalb von $\aleph_0$ und unterhalb von θ_0 möglich sind (nur gewisse Limes-Kardinalzahlen konnten ausgeschlossen werden; vgl. hierzu Oberschelp, *Allgemeine Mengenlehre* S. 246f).

861 Siehe hierzu die Definitionen 5.17.39 S. 247 und 5.30.8 S. 319.

5.32 Große Kardinalzahlen und das Reflexionsprinzip

Da die kleinste unerreichbare Kardinalzahl θ_0 eine „Grenzzahl“ ist, die den Bereich der gewöhnlichen Mengenlehre nach oben hin abschließt, hat die Beschäftigung mit noch größeren Kardinalzahlen einen „esoterischen“ Charakter und wird nur von Spezialisten betrieben. Dennoch möchte ich, ohne auf beweistechnische Einzelheiten einzugehen, auf die Grundzüge der „Theorie der großen Kardinalzahlen“ eingehen, da uns diese Theorie einige philosophisch und theologisch sehr interessanten Aspekte der Unendlichkeitsproblematik erschließen kann.

Aus dem Universenaxiom konnten wir ableiten, dass die Klasse $\mathtt{Cn}_{inacc}$ der unerreichbaren Kardinalzahlen unbeschränkt ist (Theorem 5.31.14), also eine transfinite Aufzählung

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\omega, \theta_{\omega+1} \ldots \theta_{\aleph_1}, \ldots, \theta_{\theta_0}, \ldots$$

dieser Zahlen existiert. Solange nun der Index α einer solchen ≪Thetazahl≫ θ_α kleiner als θ_α ist, ist diese Zahl in gewisser Weise doch noch „von unten erreichbar“, nämlich durch Indizierung mit einem Index, der kleiner ist als sie. Das wäre nicht mehr der Fall bei einer unerreichbaren Zahl υ, für die $\upsilon = \theta_\upsilon$ gilt, deren Theta-Index also die indizierte Zahl eingeholt hätte; es lägen υ Thetazahlen unterhalb von υ. Eine solche Zahl nennt man *hyper-unerreichbar* (hyperinaccessible cardinal).

Wäre $\mathtt{Cn}_{inacc}$ nicht nur unbeschränkt, sondern auch abgeschlossen, so würde aus Theorem 5.30.24 folgen, dass es hyper-unerreichbare Zahlen gibt: das wären die kritischen Zahlen von $\mathtt{Cn}_{inacc}$. Aber $\mathtt{Cn}_{inacc}$ ist nicht abgeschlossen[862] und die Existenz hyper-unerreichbarer Zahlen lässt sich auch nicht anders aus den bisherigen Axiomen ableiten,[863] müsste also als neues Axiom postuliert werden. Das Gleiche gilt für die Existenz anderer „großer“ Kardinalzahlen, die man nur mit Hilfe immer „stärkerer Unendlichkeitsaxiome“ beweisen kann.

Um die Annahme solcher Axiome plausibel zu machen, benutzt man oft das so genannte *Reflexionsprinzip*, das Azriel Levy 1960 aufgestellt hat.[864] Verschiedene Formen des Reflexionsprinzips lauten, in nicht-formalisierter Form ausgedrückt:

5.32.1 Reflexionsprinzip *Jede begreifbare Eigenschaft einer Unmenge trifft auch auf eine Menge zu. Jede begreifbare Eigenschaft des gesamten kumulativen Universums $\mathbb{V}$ trifft auch auf eines seiner konsistenten Teiluniversen $\mathbb{V}_\kappa$ zu. Jede begreifbare Eigenschaft der uneigentlichen Ordinalzahl Ω trifft auch auf eine eigentliche Ordinalzahl α zu.*

Man kann dieses Prinzip wie folgt rechtfertigen. Eine Unmenge ist inkonsistent unendlich und daher für unser Denken eigentlich nicht adäquat begreifbar. *Wenn* wir also eine Eigenschaft einer Unmenge U begreifen, kann man davon ausgehen, dass es sich nicht um eine *exklusive* Eigenschaft von U handelt, die U charakterisiert (sonst hätten wir mit dieser charakteristischen Eigenschaft die Unmenge U adäquat begriffen), sondern um eine solche, die auch in einer Menge M verwirklicht ist. Auf $\mathbb{V}$ übertragen heißt das: Wenn wir meinen, ganz $\mathbb{V}$ zu „sehen“, haben wir in Wirklichkeit ein konsistentes Teiluniversum $\mathbb{V}_\kappa$ im Blick, in dem sich eine Eigenschaft von $\mathbb{V}$ „wiederspiegelt“, welchem daher diese Eigenschaft ebenfalls schon zukommt. Oder auf Ω übertragen: Begriffene „Ordinalzahl“-Eigenschaften der unbegreiflichen Zahl Ω müssen schon auf eine konsistente, gewöhnliche Ordinal-

862 Zum Beweis betrachte die Menge M aller θ_n mit $n \in \omega$. Deren Supremum $\sup M$ ist keine unerreichbare Zahl, denn $\sup M = \bigcup M = \bigcup_{n\in\omega} \theta_n$ ist eine Vereinigung von ω (also weniger als θ_0, erst recht weniger als $\sup M$) Zahlen der Mächtigkeit θ_n (die kleiner ist als $\sup M$).

863 Vgl. Drake, *Set Theory* S. 111.

864 Vgl. Levy, *On the Principles of Reflection* und Levy, *Principles of Reflection*. Zur Diskussion dieses Prinzips Vgl. Kreisel und Levy, *Reflection Principles*, Reinhardt, *Reflection Principles*, Drake, *Set Theory* Kap. 3, 75–106, Ebbinghaus, *Mengenlehre* Kap. 10 § 2 S. 170–177 und Rucker, *Infinity and the Mind* S. 75f, 112, 115, 262–264 und 346–350. Das Prinzip spielt im Axiomensystem der Mengenlehre von Dana Scott eine entscheidende Rolle (vgl. Scott, *Axiomatizing Set Theory*).

zahl α zutreffen. Zu diesem Prinzip gibt es eine bemerkenswerte Parallele in der Theologie. So sagt Papst Gregor der Große: „Was immer nun von ihm [Gott] geschaut wird, ist noch nicht er selbst, sondern ist etwas unterhalb von ihm“.[865] Als Beispiele für die Anwendung des Reflexionsprinzips betrachte man zunächst die folgenden Beweise für das Unendlichkeits– und das Universenaxiom:

Es gibt eine unendliche Menge.

Beweis. Die *Klasse* $\mathbb{D}$ ist unendlich, denn sie enthält ja alle natürlichen Zahlen. Per Reflexionsprinzip muss es also auch eine unendliche *Menge* geben. □

Jedes Individuum a liegt in einer universalen Menge.

Beweis. Die Unmenge $\mathbb{D}$ hat die Eigenschaft, ein Universum zu sein, in dem a liegt. Per Reflexionsprinzip gibt es auch eine Menge mit dieser Eigenschaft. □ Ich ziehe dennoch die in Abschnitt 5.31 gegebene ausführlichere Begründung des Universenaxioms vor, weil das Reflexionsprinzip, wie wir sehen werden, nicht unproblematisch ist. Zuvor möchte ich noch zeigen, wie man mit dem Reflexionsprinzip die Existenz unerreichbarer und hyper-unerreichbarer Kardinalzahlen beweist:

Es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl.

Beweis. Ω hat wie eine Kardinalzahl die Eigenschaft, mit keiner kleineren Ordinalzahl gleichmächtig zu sein,[866] und besitzt darüber hinaus auch alle in Definition 5.31.1 ausgesprochenen charakteristischen Eigenschaften einer unerreichbaren Kardinalzahl.[867] Nach dem Reflexionsprinzip muss es daher auch eigentliche Kardinalzahlen geben, die unerreichbar sind. □

Es gibt eine hyper-unerreichbare Kardinalzahl.

Beweis. Für eine unerreichbare Kardinalzahl υ besteht die Hyper-Unerreichbarkeit darin, dass es nicht weniger als υ unerreichbare Kardinalzahlen unterhalb von υ gibt. Nun hat Ω diese Eigenschaft, denn die unerreichbaren Kardinalzahlen bilden nach Theorem 5.31.15 S. 333 eine mit Ω gleichmächtige Unmenge. Per Reflexionsprinzip existiert daher eine hyper-unerreichbare Kardinalzahl. □

Wie diese Beispiele zeigen, ist das Reflexionsprinzip sehr fruchtbar. Bei den Anwendungen ist jedoch Vorsicht geboten. So hat Ω die Eigenschaft, größer als alle eigentlichen Ordinalzahlen des Standardmodells zu sein. Wendet man das Reflexionsprinzip auf *diese* Eigenschaft an, erhält man die widersprüchliche Aussage, dass es auch eine eigentliche Ordinalzahl α gibt, die größer als alle eigentlichen Ordinalzahlen ist. So gibt es Eigenschaften, auf die das Prinzip nicht angewendet werden darf: Diese heißen *nicht reflektierbar*. Dabei handelt es sich um Eigenschaften einer Unmenge, die für diese *charakteristisch* sind, also nicht wirklich „begriffen“ werden können. Die „Begreifbarkeit“ oder „Reflektierbarkeit“ einer Eigenschaft ist nun aber ein unpräziser Begriff. Um ihn zu präzisieren, kann man verlangen, dass die Eigenschaft durch formal-logische Ausdrücke formulierbar sein muss, die bestimmten einschränkenden Kriterien genügen, und je nachdem, wie weit man einschränkt, wird die Reichweite des Reflexionsprinzips größer oder kleiner sein. Um die Existenz größerer Kardinalzahlen zu rechtfertigen, muss man großzügiger sein, aber je großzügiger man ist, desto „gefährlicher“ wird die Anwendung des Prinzips. Ein scharfes formales Kriterium dafür, wann eine Aussage reflektierbar

---

865 Siehe S. 543.

866 Diese gilt wegen Theorem 5.12.10 S. 167, weil Ω Unmenge und jede kleinere Ordinalzahl eine Menge ist. Passend zu diesem „Kardinalzahl“-Charakter von Ω haben wir Ω als (uneigentliche) Kardinalzahl der wohlordnungstragenden Unmengen eingeführt (Definition 5.30.8 S. 319).

867 Ω gleicht einer Limes-Kardinalzahl, da $\Omega \neq 0$ und Ω nicht der kardinale Nachfolger κ^+ einer Kardinalzahl κ ist. Auch gilt $\aleph_0 \in \Omega$, d. h. $\aleph_0 < \Omega$, und die Vereinigung von ≪weniger als Ω≫ Mengen (d. h. von so vielen, dass sie eine Mengenmenge bilden) ist nach dem Vereinigungsmengenaxiom wieder eine Menge; sie hat daher eine eigentliche Kardinalzahl, die in Ω liegt, also $< \Omega$ ist. Schließlich ist die Potenzmenge jeder Menge M eine Menge, so dass $|\mathcal{P}(M)|$ als eigentliche Kardinalzahl ein Element von Ω, also $< \Omega$ ist.

ist, scheint es nicht zu geben. Als nicht-formales Kriterium für Reflektierbarkeit kann jedoch das folgende gelten: *Begreifbar oder reflektierbar sind alle Eigenschaften, die sich ohne einen offenen oder versteckten Bezug auf eine Unmenge (im absoluten Sinn) formulieren lassen.*

Kehren wir nun zu den hyper-unerreichbaren Kardinalzahlen zurück. Nachdem wir ihre Existenz bewiesen haben, können wir fragen, wie viele es gibt. Ist α eine Ordinalzahl, so hat Ω die Eigenschaft, *eine hyper-unerreichbare Kardinalzahl größer als α zu sein.* Per Reflexionsprinzip gibt es also auch eine eigentliche hyper-unerreichbare Kardinalzahl größer als α. Da dies für jedes α gilt, ist die Klasse der hyper-unerreichbaren Kardinalzahlen unbeschränkt, besitzt also eine transfinite Aufzählung

$$\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2 \ldots \upsilon_\omega, \ldots \upsilon_{\aleph_1} \ldots \upsilon_{\theta_0} \ldots \upsilon_{\upsilon_0} \ldots .$$

Mit einem Reflexionsargument derselben Art, mit dem wir die Existenz einer hyper-unerreichbaren Zahl gerechtfertigt haben, folgt nun, dass es eine hyper-unerreichbare Zahl $\hat{\upsilon}$ geben muss mit $\hat{\upsilon} = \upsilon_{\hat{\upsilon}}$, die also so groß ist, dass sie $\hat{\upsilon}$ hyper-unerreichbare Kardinalzahlen unter sich hat. Solche Zahlen nennt man hyper-hyper-unerreichbar. Analog kann man alsdann hyper-hyper-hyper-unerreichbare Zahlen definieren usw. Um hier die Sprechweise zu vereinfachen, nennt die gewöhnlichen unerreichbaren Kardinalzahlen auch 0-*hyperunerreichbar*, die hyper-unerreichbaren 1-*hyperunerreichbar*, die hyper-hyper-unerreichbaren 2-*hyperunerreichbar*, und kann, analog fortfahrend, rekursiv für *alle* Ordinalzahlen α einen Typ von α-*hyperunerreichbaren* Kardinalzahlen definieren.[868] Nun hat Ω die Eigenschaft, *für jede Ordinalzahl α α-hyperunerreichbar zu sein.* Auf diese Eigenschaft ist das Reflexionsprinzip *nicht* direkt anwendbar, da hier auf eine Unmenge, nämlich die Unmenge „aller Ordinalzahlen“ Bezug genommen wird. Wir können aber den Bezug eliminieren, wenn wir formulieren: Ω hat die Eigenschaft, *für jedes ihrer Elemente α stets α-hyperunerreichbar zu sein.* Jetzt können wir reflektieren und erhalten eine Kardinalzahl κ mit der Eigenschaft, dass κ für jede Ordinalzahl α, die Element von (d. h. kleiner als) κ ist, α-hyperunerreichbar ist. Nach einem Vorschlag von Rucker[869] können wir eine solche Kardinalzahl hyper^2-unerreichbar nennen und dann analog zu der α-Hyperunerreichbarkeit eine α-Hyper^2-Unerreichbarkeit für alle Ordinalzahlen α definieren. Dann folgen die Stufen der α-Hyper^3-Unerreichbarkeit usw. usw.

Hat man verstanden, was „usw.“ hier heißt, spürt man das Bedürfnis, sich „mit einem Schlag“ über *alle* Stufen der Hyper-Unerreichbarkeit zu erheben, sowohl über die schon geschilderten als auch über die mit dem „usw.“ angedeuteten. Man gelangt dann zu einer neuen gigantischen Kardinalzahl: zu der kleinsten sog. *Mahloschen Kardinalzahl*. Die Mahloschen Kardinalzahlen sind unerreichbare Kardinalzahlen ρ, unterhalb derer es bereits ρ Zahlen von *jedem* Hyper-Unerreichbarkeitstyp gibt. Derartige Zahlen wurden 1911 von Paul Mahlo beschrieben.[870] Die Existenz solcher Zahlen folgt wieder aus dem Reflexionsprinzip, da Ω offensichtlich die besagte Eigenschaft hat.[871]

Den nach den Mahlo-Zahlen nächst größeren Kardinalzahltyp bilden die sog. *unbeschreibbaren Kardinalzahlen* verschiedener Arten.[872] Am oberen Ende stehen die *total unbeschreibbaren* (totally in-

---

868 Vgl. Drake, *Set Theory* S. 117. Für eine Limeszahl λ schreiben wir dabei einer Kardinalzahl υ genau dann die Eigenschaft der λ-*Hyperunerreichbarkeit* zu, wenn sie für alle unterhalb von λ liegenden Zahlen α zugleich jeweils die Eigenschaft der α-Hyperunerreichbarkeit aufweist.

869 Vgl. Rucker, *Infinity and the Mind* S. 349f.

870 Vgl. Mahlo, *Lineare transfinite Mengen.* Mahlo hatte allerdings nur eine Hierarchie von schwach unerreichbaren Zahlen und darauf aufbauenden hyper-unerreichbaren Zahlen betrachtet. Die entsprechenden Mahloschen Zahlen heißen heute *schwache Mahlo-Zahlen* (weakly Mahlo cardinals). Durch Transformation auf starke Unerreichbarkeit erhält man die *starken* oder eigentlichen Mahlo-Zahlen.

871 Exakter kann man Mahlosche Kardinalzahlen unabhängig von dem Begriff der Hyper-Unerreichbarkeit so definieren: Eine Mahlosche Zahl ρ ist eine unerreichbare Kardinalzahl, so dass jede Menge von Ordinalzahlen unterhalb von ρ, die abgeschlossen ist (vgl. Definition 5.30.13 S. 322) und (in ρ) keine oberen Schranken besitzt, einen unerreichbaren kritischen Punkt in ρ besitzt. Diese Eigenschaft kommt Ω wegen Theorem 5.30.24 zu.

872 Vgl. Drake, *Set Theory* Kap. 9 S. 267–288; Potter, *Sets* Kap. 3.4 S. 76f.

describable) und die ν-unbeschreibbaren Kardinalzahlen (für Ordinalzahlen $\nu \geq \omega$). Die zu den unbeschreibbaren Kardinalzahlen führende Grundidee ist es, Kardinalzahlen α zu suchen, die so groß sind, dass gewisse Mengenbildungsprozesse, die in $\mathbb{V}_\alpha$ starten, niemals aus $\mathbb{V}_\alpha$ hinausführen (man sagt dann, $\mathbb{V}_\alpha$ sei gegenüber diesen Prozessen «abgeschlossen».) Die unerreichbaren Kardinalzahlen erfüllen die Abgeschlossenheitseigenschaft für die Prozesse der Bildung der Vereinigungsmenge und der Potenzmenge. Die hyper-unerreichbaren Kardinalzahlen erfüllen sie zusätzlich für den Prozess des Übergangs von einer unerreichbaren Kardinalzahl zur nächsten. Die Mahloschen Zahlen sind abgeschlossen gegenüber dem Prozess des Fortschreitens von einer unbeschränkten abgeschlossenen Menge zu ihrer kleinsten unerreichbaren kritischen Zahl.[873] Bei *unbeschreibbaren Kardinalzahlen* fordert man nun die Abgeschlossenheit von *beliebigen* Mengenbildungsprozessen, die *mit bestimmten Formeln* beschrieben werden können. Die Existenz solcher Zahlen kann durch Reflexionsargumente untermauert werden, da ja Ω die Eigenschaft hat, dass beliebige Mengenbildungsprozesse in $\mathbb{V}_\Omega$ $(= \mathbb{V})$ stets abgeschlossen sind.[874] So kann man ein entsprechendes „Axiom der Unbeschreibbarkeit“ aufstellen, und da sich aus einem solchen sowohl das Potenzmengen–, wie auch das Ersetzungsaxiom und das einfache Unendlichkeitsaxiom ableiten lassen, ist es nach Potter „für die Faulen sehr attraktiv“ und hat zudem den Vorteil, dass es „die Decke so hoch macht, dass nur die entschlossensten Bergsteiger Gefahr laufen, sich die Köpfe zu stoßen“.[875]

Die kleinsten Vertreter aller vorgenannten Kardinalzahlen werden schließlich weit übertroffen von den *messbaren Kardinalzahlen* (measurable cardinals) – falls es sie gibt. Diese Zahlen wurden 1930 von Stanisław Ulam, dem Miterfinder der Wasserstoffbombe, konzipiert. Ulam knüpfte an das klassische Maßproblem an (siehe S. 158–160) und fragte, ob es zu einer Kardinalzahl κ eine «Maßfunktion» gibt,[876] d. h. eine Funktion, die jeder Teilmenge von κ eine reelle Zahl als ihr «Maß» zuschreibt, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Ganz κ hat das „Maß“ 1 (so dass κ dem «Einheitsintervall» entspricht).
2. Jede einelementige Teilmenge von κ hat das Maß 0.
3. κ-Additivität: Vereinigt man weniger als κ disjunkte Teilmengen von A, so erhält man das Maß dieser Vereinigung, indem man die Maße der Teilmengen *addiert*.[877]

Man nennt eine Kardinalzahl κ *reellwertig messbar*, wenn es eine derartige Maßfunktion auf κ gibt. Gibt es sogar eine Maßfunktion, die *jeder* Teilmenge von κ entweder den Wert 0 oder den Wert 1 zuweist, heißt κ *messbar* (schlechthin). Schon Ulam erkannte, dass messbare Kardinalzahlen größer sein müssen als die kleinste unerreichbare Zahl. Inzwischen aber ist „die Grenze, unterhalb der solche Zahlen nicht existieren können, sehr weit hinausgeschoben worden“.[878] So muss die kleinste messbaren Kardinalzahl viel größer sein als die kleinste Mahlo-Zahl, und außerdem liegen unter ihr noch viele Kardinalzahlen, die hochgradig unbeschreibbar sind.[879] Die Existenz messbarer Kardinalzahlen bleibt aber umstritten, weil es nicht gelungen ist, hierfür ein einwandfreies Reflexionsargument

[873] Siehe hierzu die exakte Definition der Mahloschen Zahlen in Fußnote 871.

[874] Um eine „reflektierbare“ Eigenschaft zu erhalten, muss man sich allerdings stets auf Mengenbildungsprozesse beschränkten, die durch Formeln einer bestimmte Sprachstufe beschreibbar sind: Denn die Eigenschaft von Ω, dass in $\mathbb{V}_\Omega$ $(= \mathbb{V})$ schlechthin „alle“ Mengenbildungsprozesse abgeschlossen sind, kann nicht als „begreifbare“ Eigenschaft gelten, ist also nicht reflektierbar.

[875] Potter, *Sets* S. 77.

[876] Vgl. Ulam, *Maßtheorie in der Mengenlehre.*

[877] In der gewöhnlichen Maßtheorie wird die Additivität nur für abzählbar viele Teilmengen gefordert, während hier bis zu κ Teilmengen zugelassen sind. Unter der Summe von κ Zahlen versteht man (für unendliches κ) das Supremum der Menge aller Summen von je endlich vielen dieser Zahlen.

[878] Oberschelp, *Allgemeine Mengenlehre* S. 273.

[879] Vgl. Kanamori und Magidor, *Large Cardinal axioms* S. 118: „there are many cardinals below it which are highly indescribable“.

anzugeben.[880]

Ähnlich ist es mit Begriffen von Kardinalzahlen, deren kleinste Vertreter noch größer sein müssen als die kleinste messbare Kardinalzahl, falls der jeweilige Begriff nicht widersprüchlich ist: die *streng kompakten*, die *riesigen*, die *superkompakten*, und schließlich die *erweiterbaren* Kardinalzahlen (strongly compact, huge, supercompact, extendible cardinals).[881] Letztere sind, falls sie existieren, die größten derzeit diskutierten Kardinalzahlen.[882] Die erweiterbaren Kardinalzahlen wurden 1974 von William Nelson Reinhardt (†1998) eingeführt und mit einem Reflexionsargument gerechtfertigt, in dem „imaginäre Mengen und Klassen" eine Rolle spielen und Ordinalzahlen größer als Ω betrachtet werden,[883] was natürlich problematisch ist. Verstärkt man die Definition der erweiterbaren Kardinalzahlen noch geringfügig in der Absicht, noch größere Zahlen zu definieren, so erhält man einen nachweislich widersprüchlichen Begriff.[884] Aus diesem Grund scheinen wir hier – zumindest vorläufig – an den Grenzen unseres Denkens in Unendlichkeitsfragen angekommen zu sein.

880 Allerdings gibt es Versuche in diese Richtung. Vgl. Rucker, *Infinity and the Mind* S. 356f.

881 Vgl. Jech, *Set Theory* S. 365–387.

882 Dennoch nehmen in einigen Kardinalzahltabellen die „huge cardinals" den obersten Platz ein (vgl. Kanamori, *Higher infinite* S. 471; Kanamori und Magidor, *Large Cardinal axioms* S. 265f). Man ordnet dann die Kardinalzahlbegriffe nicht strikt nach der Größe ihres kleinsten Vertreters, sondern nach der „Konsistenzimplikation", d. h. ein Begriff wird „höher" angesiedelt als ein anderer, wenn die Widerspruchsfreiheit des ersten jene des zweiten impliziert. Diese Reihenfolge aber entspricht nicht immer der Größenrelation zwischen den kleinsten Vertretern des Kardinalzahlbegriffs (vgl. Jech, *Set Theory* S. 381).

883 Vgl. Reinhardt, *Reflection Principles*.

884 Vgl. Kanamori und Magidor, *Large Cardinal axioms* S. 196–203.

5.33 Das Wesen der Zahl

Nachdem wir verschiedene Arten von Zahlen aus mathematischer Sicht beschrieben haben, soll zum Abschluss die philosophische Frage nach dem Wesen der Zahl erörtert werden. Diese Frage ist (a) für die Kardinalzahlen, (b) die Ordinalzahlen und (c) für die geometrisch motivierten Zahlen (d. h. die reellen, hyperreellen und surrealen Zahlen) verschieden zu beantworten. Die letzteren sind in realistischer Interpretation einfach Punkte eines geometrischen Kontinuums (z. B. einer Zahlengeraden), die man als „Maßzahlen“ zum Ausmessen eines solchen Kontinuums benutzen kann. Dagegen handelt es sich bei Ordinalzahlen und Kardinalzahlen um „Zählzahlen“, die man erst *nachträglich* als Punkte auf einer (transfinit verlängerten) Geraden ansehen kann. Dabei sind die Kardinalzahlen die „reineren“ Zahlen, da man sie auch zur Zählung von Objekten in „ungeordneten“ Bereichen einsetzen kann. Sie und nicht die Ordinalzahlen sind daher m. E. die eigentlichen Zahlen oder Anzahlen.[885] In gewisser Hinsicht sind allerdings auch die Ordinalzahlen bevorzugt, weil es nämlich (ergänzungstheoretisch) „mehr“ Ordinalzahlen als Kardinalzahlen gibt, und weil das rekursive Definitionsverfahren ebenso wie das induktive Beweisverfahren auf die Ordinalzahlreihe Bezug nimmt. Daher waren einige bedeutenden Mathematiker der Ansicht, dass der ordinale Aspekt das Wesentliche am Zahlenbegriff ist.[886] Die Frage nach der natürlichen Bedeutung des Zahlenbegriffs bezieht sich aber jedenfalls auf beide Zahlenarten. Wir haben die Ordinal– und Kardinalzahlen, von Neumann folgend, als bestimmte Mengen definiert. Doch sind diese Mengen offenbar nur Repräsentanten für etwas anderes, „Ursprünglicheres“. Dies soll hier klarer herausgearbeitet werden.

Die *Pythagoräer* (5. Jh. v. Chr.) fassten die Zahlen in mystischer Weise als „die Wesenheit aller Dinge“ auf,[887] die als immanente Bestandteile den sinnlichen Dingen und insbesondere dem Himmel innewohnen.[888] Euklid, der Kompilator der griechischen Mathematik (um 300 v. Chr.), erklärte viel nüchterner, eine Zahl sei eine „aus Einheiten zusammengesetzte Menge“.[889] Dann käme aber alles darauf an, zu sagen, was eine Einheit ist. Aber diesen Begriff behandelte Euklid als unerklärbaren Grundbegriff: „Einheit ist das, wonach jedes Ding eins genannt wird“,[890] womit eigentlich nichts erklärt ist. Bei Platon († 347 v. Chr.) zeigt sich eine zwischen der euklidischen und der pythagoräischen Ansicht vermittelnde Auffassung, wonach es zwei Arten von Zahlen gibt: die „mathematischen“ und die „idealen“. Erstere sind aus Einheiten zusammengesetzt (siehe Euklid), es gibt also unendlich viele Exemplare der Eins und infolgedessen auch unendlich viele Exemplare jeder anderer mathematischen Zahl. Die idealen Zahlen dagegen sind die Urbilder jener mathematischen Zahlen, sie sind nicht zusammengesetzt und jeweils einzigartig, so dass es nur eine ideale Eins, eine ideale Zwei usw. gibt. Nach Platon gehören diese Zahlen zur „überhimmlischen“, zeitlos–übersinnlichen Welt der Ideen, während die mathematischen Zahlen zwischen den idealen und den sinnlich-realen Gegenständen einen „mittleren“ Seinsbereich bilden.[891] Aristoteles († 322 v. Chr.) und die ihm

---

885 Das entspricht der Fregeschen Auffassung (siehe unten).

886 Vgl. zunächst Kronecker, *Zahlenbegriff* S. 265: „Den naturgemäßen Ausgangspunkt für die Entwicklung des Zahlenbegiffs finde ich in den Ordnungszahlen“. Ähnlich heißt es bei Benacerraf, *Numbers* S. 291: „To be the number 3 is no more and no less than to be preceded by 2, 1 and possibly 0, and to be followed by 4,5, and so forth.“ Vgl. auch Helmholtz, *Zählen und Messen* S. 22f und Schlömilch, *Analyis* S. 1. Auch Cantor setzte den Begriff der *Anzahl* explizit mit dem der *Ordnungszahl* gleich (vgl. Cantor, *Lehre vom Transfiniten*, Ausgabe Zermelo S. 388.)

887 Aristoteles, *Metaphysica* Buch 1 Kap. 5, 987a19, Ausgabe Seidl Band 1 S. 36f.

888 Vgl. Aristoteles, *Metaphysica* Buch 13 Kap. 6, 1080b14–21, Ausgabe Seidl Band 2 S. 300f. Wie Aristoteles ebenda (Buch 1 Kap. 5, 986a3, Band 1 S. 30f) berichtet, behaupteten die Pythagoräer, „der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl“.

889 Buch 7 der *Elemente*, Definition 2.

890 Euklid, *Elemente* Buch 7 Def. 1, Ausgabe Heiberg/Stamatis Band 2 S. 103, Ausgabe Thaer S. 141.

891 Die diesbezüglichen Lehren hat Platon nicht in seinen Dialogen ausgeführt, wir müssen sie aus Schriften des Aristoteles und anderer erschließen (vgl. Wedberg, *Plato's Philosophy of Mathematics* S. 65–67).

folgenden mittelalterlichen Scholastiker gaben der Zahlentheorie schließlich eine materielle Basis, indem sie die Mathematik auf die Seinskategorie der Quantität oder materiellen Ausdehnung beschränkten.[892] Zahlen sind in diesem System die *diskreten Ausdehnungen*, allerdings nicht die an konkreten Körpern befindlichen, sondern deren Abstraktionen.[893]

Neben den klassischen Positionen des PLATON und ARISTOTELES wurden in der Neuzeit noch weitere Ansichten entwickelt. Eine von ihnen bestand in der Ablehnung der sowohl bei PLATON wie auch bei ARISTOTELES feststellbaren „objektivistisch-realistischen" Deutung der Zahl.[894] So behauptete George BERKELEY (1685–1753), die Zahl sei ein „Produkt des Geistes",[895] und schärfer formulierte später Richard DEDEKIND (1831–1916), Zahlen seinen „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes".[896] Als dieser Aussage entgegengesetzt wurde häufig der Ausspruch Leopold KRONECKERs (1823–1891) zitiert: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".[897] Jedoch muss man bedenken, dass KRONECKER in diesem Ausspruch die Zahlen nicht als in der Ewigkeit bestehende Realitäten, sondern als *geschaffen* hinstellt, also doch wohl ganz ähnlich wie DEDEKIND als „freie Schöpfungen" eines (wenn auch göttlichen) Geistes ansehen möchte.[898]

Einen echten Gegensatz zu der Ansicht, die Zahlen seien Geistesprodukte, bildet aber die Ansicht von John Stuart MILL (1808–1873), der in den Zahlen „etwas Physisches" sehen wollte.[899] Er sah sich aber nicht in der Lage, dies zu präzisieren.[900] Konkreter setzten viele Mathematiker seit

---

892 Vgl. ARISTOTELES, *Categoriae* 4b20–31.

893 THOMAS VON AQUIN, *Summa Theologiae* pars 1 quaestio 11 articulus 3 ad 2, Ausgabe Busa S. 198b: „unum enim quod est principium numeri, est de genere mathematicorum; quae habent esse in materia, sed sunt secundum rationem a materia abstracta." SUÁREZ, *Disputationes* 41 sectio 4 § 9, Ausgabe Berton Band 2 S. 598b: „quantitas discreta seu numerus". Vgl. GREDT, *Elementa* Band 1 S. 150f und 194, deutsche Ausgabe S. 94f und 125f; außerdem APOSTLE, *Aristotle's Philosophy* S. 89–95. – Neben diesen gewöhnlichen Zahlen kannte man in der Scholastik aber auch sog. *transzendentale Zahlen*, die sich auch auf geistige Substanzen und auf Gott erstrecken. In der *Summa Theologiae* pars 1 quaestio 30 articulus 3 corpus, Ausgabe Busa S. 232b unterscheidet THOMAS VON AQUIN den „numerus qui est species quantitatis", der „non est nisi in rebus materialibus", von der „multitudo quae non est in aliquo genere, sed est de transcendentibus", welche man ebenfalls durch die „termini numerales" bezeichnen könne. Vor allem aber wurde in der Scholastik durchgehend die „quantitative" oder „numerische" von der sog. „transzendentalen" *Einheit* unterschieden, die man als eine der sechs oder sieben alle Seinsbereiche durchdringenden „Transzendentalien" ansah (vgl. SUÁREZ, *Disputationes* 4 sectio 9, Ausgabe Berton Band 1 S. 140b–145b; siehe auch Abschnitt 4.5.1).

894 Zwar entstehen die Zahlen in der aristotelisch-scholastischen Philosophie durch Abstraktion, haben aber doch ein „fundamentum in re".

895 BERKELEY, *Knowledge* § 12, Ausgabe Ayers S. 80 (Ausgabe Klemmt S. 31): „creature of the mind".

896 DEDEKIND, *Zahlen* Vorwort S. III. Auch Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) hatte die Zahlen als „bloß unseres Geistes Produkt" bezeichnet (siehe Fußnote 28 auf S. 63).

897 Vgl. im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* Band 2(1891/2) die von Heinrich Weber gehaltene Gedächtnisrede zum Tode KRONECKERs (ebd. S. 5–31), wo es S. 19 heißt: „Manche von Ihnen werden sich des Ausspruchs erinnern, den er [Kronecker] in einem Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung im Jahre 1886 tat: ‚Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk'".

898 Diese Interpretation findet eine Stütze in KRONECKERs Studie *Über den Zahlenbegriff*, wo er in zustimmender Weise an den (schon in Fußnote 28 auf S. 63 erwähnten) Ausspruch von GAUSS erinnert, die Zahl sei „bloß unseres Geistes Produkt" (*Über den Zahlenbegriff* S. 265). Doch hat KRONECKER in dieser Studie seine Position nicht klar herausgestellt. So zitiert er S. 264 aus einer Parodie des Mathematikers Carl Gustav Jacobi (1804–1851) auf SCHILLERs Gedicht *Archimedes und der Schüler*: „In der Olympier Schar thronet die ewige Zahl", was eine platonische Ansicht nahe legt. Wieder einen anderen Ton schlägt er auf S. 265f an, wo er erklärt: „In diesen [sc. den Ordnungszahlen] besitzen wir einen Vorrat gewisser ... Bezeichnungen, welche wir einer Schar verschiedener ... Objekte beilegen können. Die Gesamtheit der hierbei verwendeten Bezeichnungen [!] fassen wir in dem Begriffe der ‚Anzahl der Objekte' ... zusammen". Hier scheint sich KRONECKER also der (weiter unten zu besprechenden) Gruppe von Mathematikern anzuschließen, für welche die Zahlen bloß Zeichen („Bezeichnungen") sind.

899 MILL, *Logik* Buch 3 Kap. 24 S. 351: „Die in der Definition einer Zahl ausgesagte Tatsache ist eine physische Tatsache. ... Zwei zum Beispiel bezeichnet alle Paare von Dingen und Zwölf alle Dutzende und bezeichnet das mit, was sie zu Paaren und Dutzenden macht, und dies ist etwas Physisches."

900 Vgl. MILL, *Logik* Buch 3 Kap. 24 S. 351.

dem 19. Jahrhundert die Zahlen einfach mit den Zahlzeichen gleich. FREGE bemerkt etwas spöttisch über die Vertreter dieser Ansicht: „Sie fangen gewöhnlich mit der Versicherung an, dass sie mit den Zahlzeichen nichts, aber auch gar nichts bezeichnen wollen.“[901] So lehrte bereits Hermann Ludwig Ferdinand VON HELMHOLTZ (1821–1894): „Die Zahlen dürfen wir zunächst als eine Reihe willkürlich gewählter Zeichen betrachten ...“.[902] Auch Felix HAUSDORFF (1868–1942) stellte sich „einfach auf den formalen Standpunkt“, indem er forderte, dass „einem System von Mengen“ irgendwie ein „System von Dingen“ zuzuordnen ist: „Diese neuen Dinge oder Zeichen nennen wir Kardinalzahlen“.[903] Besonders deutlich bekannte sich zu dieser „formalen Auffassung“ Carl Johannes THOMAE (1840–1921): „Die Arithmetik ist für die formale Auffassung ein Spiel mit Zeichen“, denen „kein anderer Inhalt zukommt als der, der ihnen in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber gewissen Verknüpfungsregeln (Spielregeln) beigelegt wird ... Der formale Standpunkt hebt uns über alle metaphysischen Schwierigkeiten hinweg, das ist der Gewinn, den er uns bietet“.[904]

Eine ganz andere Entwicklung wurde durch LOCKE und LEIBNIZ angestoßen, welche gegenüber der Scholastik eine *Ausweitung* des Zahlenbegriffs anstrebten. Hatte noch NEWTON (1643–1727) Zahlen als Einheitsquantitäten aufgefasst, die Quantitäten derselben Art ausmessen,[905] so war für LOCKE (1632–1704) die Zahl Eins „die allgemeinste Idee, die wir haben“, aus welcher durch Addition die anderen Zahlen als „komplexere Ideen“ hervorgehen.[906] Die Idee im Sinne von LOCKE ist von der platonischen Idee zu unterscheiden, er beschreibt sie als „Phantasma, Begriff, Vorstellung oder was immer es sei, das den denkenden Geist beschäftigen kann“.[907] Noch stärker betonte LEIBNIZ (1646–1716) die Universalität des Zahlenbegriffs, die nach ihm ein „universalissimum“ ist: Die Zahl sei eine „unkörperliche Figur“, die „aus der Vereinigung beliebiger Seiender“ hervorgehen kann, „z. B. Gottes, eines Engels, eines Menschen und einer Bewegung, was zusammen vier ist“.[908] KANT (1724–1804) und SCHOPENHAUER (1788–1860) engten dagegen den Zahlenbegriff wieder ein, indem sie die Zahlen als *zeitliche* Quantitäten deuteten.[909]

Alle diese Autoren haben gemeinsam, dass keiner von ihnen den Versuch unternahm, Zahlen auf etwas Einfacheres zurückführen. Sie alle nahmen die Zahlen als ein selbstverständlich Gegebenes hin und unterscheiden sich nur in ihren Ansichten darüber, (1) *wie* wir den Zahlenbegriff bilden: ob durch mystische oder übersinnliche Intuition (Pythagorärer, PLATON), Abstraktion (ARISTOTELES, Scho-

---

901 FREGE, *Zahlen und Arithmetik* S. 295.

902 HELMHOLTZ, *Zählen und Messen* S. 21.

903 HAUSDORFF, *Mengenlehre* Kap. 3 § 1 S. 47.

904 THOMAE, *Elementare Theorie* S. 25.

905 „Per Numerum ... abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus“ (NEWTON, *Lectures on Algebra* Mathematical Papers Band 5 S. 492). Das Zitat gehört nicht zum „Haupttext“ der *Lectures*, sondern zu den „Corrections“, die NEWTON später an diesem „Haupttext“ vorgenommen hat. – In der Ausgabe von Samuel HORSLEY erscheint das Zitat fälschlich in der *Arithmetica Universalis* (NEWTON, *Werke*Band 1 S. 2).

906 LOCKE, *Essay* Buch 2 Kap. 16 § 1–2, Ausgabe Yolton Band 1 S. 167, Ausgabe Brandt Band 1 S. 240.

907 LOCKE, *Essay* Einleitung (in Ausgabe Yolton: Kap. 1 von Buch 1) § 8, Ausgabe Yolton Band 1 S. 9, Ausgabe Brandt Band 1 S. 28.

908 “Est enim numerus quasi figura quaedam incorporea, orta ex unione entium quorumcunque, v. g. Dei, Angeli, Hominis, Motus, qui simul sunt quattuor.“ (LEIBNIZ, *Ars combinatoria* Prooemium S. 8). Kardinal John Henry NEWMAN (1801–1890) war vom Gegenteil überzeugt: „Wir können ... nicht ohne Extravaganz Napoleons Hirn, Ehrgeiz, Hand, Seele, Lächeln, Größe und Alter bei Marengo zusammenzählen und sagen, dass es ihrer sieben seien, wiewohl es sieben Wörter sind.“ (*Grammar* Teil 1 Kap. 4 § 1 Nr. 1 S. 49, Ausgabe Laros/Becker S. 34).

909 KANT, *Kritik der reinen Vernunft* A142f: „Also ist die Zahl nichts anderes, als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch, dass ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge.“ SCHOPENHAUER nennt die Zahl eine „rein zeitliche Größe“ (*Wille und Vorstellung* Band 1 Buch 1 § 12, Werke Band 2 S. 65; vgl. ebd. § 15 S. 90). Da die Zeit für KANT und SCHOPENHAUER nicht mit der objektiven aristotelischen Quantitäts-Kategorie identisch, sondern eine Form unserer Anschauung (KANT) bzw. unserer Vorstellung (SCHOPENHAUER) ist, handelt es sich hier um einen neuen Ansatz.

lastik) willkürliche geistige Schöpfung (Berkeley, Dedekind, Thomae) oder physisch-sinnliche Beobachtung (Mill), und (2) *wie weit* sich der Zahlenbegriff erstreckt: ob nur auf Quantität, Zeit, Physisches, oder auf schlechthin alles.

Demgegenüber hat Frege (1848–1925) in seinen *Grundlagen der Arithmetik* (1884) erstmals versucht, die Zahl (und mit ihr die ganze Arithmetik) auf etwas Einfacheres zurückzuführen, nämlich auf logische Begriffe. Hierzu führte Frege zunächst die *Gleichzahligkeit* (d. h. Gleichmächtigkeit) von Mengen (in seiner Sprache: von Begriffen) ein, was möglich ist, ohne den allgemeinen Begriff der Anzahl zu verwenden (siehe S. 164–165 mit Definition 5.12.2). Darauf aufbauend definierte Frege die Anzahl wie folgt: „Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffs ‚gleichzahlig mit F'."[910] In der heutigen Mathematik möchte man nicht *Begriffen*, sondern *Mengen* eine Anzahl zuschreiben, und ferner kann man den *Umfang* eines Begriffs mit der Klasse seiner Instanzen gleichsetzen. Für den ≪Begriff F≫ in Freges Definition hat man daher ≪Menge F≫ zu substituieren, und der ≪Umfang des Begriffs ‚gleichzahlig mit F'≫ entspricht der Äquivalenzklasse $[F]_\sim$. Mit diesen Anpassungen können wir Freges Definition in Übereinstimmung mit unserer Definition 5.12.14 so paraphrasieren: Die Anzahl der Elemente einer Menge M sei die Klasse $\llbracket M \rrbracket :\equiv [M]_\sim$. Anzahlen sind demnach die Äquivalenzklassen von $\sim$, die wir uns als Stufen im Klassenuniversum vorgestellt haben. In diesem Sinne hat erstmals Russell die Fregesche Definition ausgelegt.[911]

Zweierlei ist nun am Fregeschen System problematisch. Zum einen handelt es sich bei den Fregeschen Zahlen, abgesehen von der Null, um Unmengen,[912] und man kann mit Unmengen nicht operieren wie mit Individuen, ohne sich in Widersprüche zu verstricken, wie das Russellsche Paradoxon gezeigt hat, welches Freges System ins Wanken brachte. Zweitens hat Frege mit seiner Definition nicht wirklich *alle* Zahlen auf etwas Einfacheres zurückgeführt. Denn *bevor* man seine Definition verstehen kann, muss man von den Zahlen ≪Null≫ und ≪Eins≪ sowie von der Zahlengattung ≪Mehrere≫ bereits ein Vorverständnis haben.[913] Wenn aber die Zahlen 0 und 1 schon vorher bekannt sind, und dann noch einmal als Klasse der null– bzw. einelementigen Mengen definiert werden, stellt sich die Frage, ob diese Definition tatsächlich bloß eine Explikation dessen ist, was man sich schon vorher darunter vorgestellt hat, und dies wird man wohl verneinen müssen (siehe unten).

Trotz dieser Probleme ist es ein bleibendes Verdienst Freges, dass infolge seiner Arbeiten klar geworden ist, worauf es beim Versuch einer exakten Definition der Zahlen ankommt: Man muss zweierlei angeben: (a) geeignete Objekte, die als ≪Anzahlen≫ dienen, und (b) eine ≪Anzahl-Funktion≫, die jeder Menge ihre Anzahl zuordnet. Dabei erscheint es als vernünftig, für die Wahl der Anzahlen und der Anzahlfunktion Folgendes zu fordern:

(1) Die wichtigste und vom rein *logischen* Standpunkt aus einzig notwendige Forderung ist, dass gleichmächtige Mengen (und nur solche) stets dieselbe Anzahl bekommen.

---

910 Frege, *Grundlagen der Arithmetik* § 68, Ausgabe Thiel S. 76.

911 Vgl. Russell, *Mathematische Philosophie* Kap. 2, bes. S. 24: „Die Zahl einer Menge ist die Menge aller ihr äquivalenten Mengen." Unter ≪äquivalenten≫ Mengen verstand Russell gleichmächtige Mengen. Auch Frege selbst hat am Ende seines Lebens im kritischen Rückblick erklärt, dass er „die Zahlen als Mengen auffassen" wollte, wovon er sich dann allerdings aufgrund der aufgetretenen Paradoxien der Mengenlehre distanzierte (Frege, *Erkenntnisquellen* S. 289). Siehe auch Fußnote 914.

912 Siehe Theorem 5.12.17 S. 171.

913 Ein Vorverständnis der Zahl *Eins* benötigt man spätestens in der Definition der *Funktion*: man muss ja verstehen, was es heißt, dass eine Funktion jedes ihrer Argumente auf *genau einen* Wert wirft. Um aber zu verstehen, was „*genau* ein" heißt, muss man auch wissen, was „*weniger* als ein" und „*mehr* als ein" bedeutet: Denn „genau ein" wird erklärt durch „nicht weniger und nicht mehr als ein". Das Verständnis der Redewendung „weniger als ein" ist nun aber gleichbedeutend mit dem Verständnis der Zahl *Null*. Man braucht also insgesamt eine Verständnis der Zahlen 0 und 1 sowie der Zahlengattung ≪Mehrere≫.

(2) Für die *Arithmetik* ist es sinnvoll, dass man als Zahlen Individuen wählt, damit sich die arithmetischen Operationen einfach und ohne die Gefahr von Widersprüchen definieren lassen.

(3) Vom *philosophischen* Standpunkt aus wäre schließlich wünschenswert, dass die Definition eine echte Explikation unserer natürlichen Anschauung von den Zahlen darstellt.

FREGEs Zahlendefinition (in ihrer modernen, RUSSELLschen Auslegung) erfüllt die Forderung (1), aber (2) ist insofern nicht erfüllt, als die von 0 verschiedenen FREGEschen Zahlen Unmengen sind, und dass (3) verfehlt wurde, ist ebenfalls ziemlich klar:[914] Es entspricht keineswegs unserer Anschauung, dass die Zahl Null genau ein Element enthält, und jede andere Zahl aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzt ist. Statt dessen stellt man sich gewöhnlich vor, dass die Zwei aus zwei, die Drei aus drei usw. „Einheiten“ besteht.

Es sind daher nach FREGE weitere Versuche unternommen worden, den Zahlenbegriff angemessener zu definieren. Um zu einer Anzahl-Definition zu gelangen, welche Forderungen (1) und (2) erfüllt, kann man so vorgehen, dass man zu jeder FREGEschen Anzahl ein Individuum festlegt, welches der „Repräsentant“ jeder Anzahl sein soll, so dass die Repräsentanten verschiedener FREGEscher Zahlen stets verschieden sind. Nimmt man dann als Zahlen statt der FREGEschen Anzahlen ihre Repräsentanten, sind (1) und (2) erfüllt. Am einfachsten ist es, als den Repräsentanten einer FREGEschen Anzahl eines ihrer *Elemente* nehmen. Bei dieser Vorgehensweise hat man für den Repräsentanten der FREGEschen Null keine Wahl: Das einzige Element der FREGEschen Null ist $\emptyset$. Für die Eins muss man irgendeine einelementige Menge $\{a\}$ wählen, z. B. die Menge {Erde}, deren einziges Element die Erde ist; für die Zahl Zwei hat man eine zweielementige Menge $\{a, b\}$ mit $a \neq b$ auszusuchen, beispielsweise die Menge {Erde, Mond} usw. In Übereinstimmung mit der natürlichen Anschauung hat hier also die Zahl 1 ein Element, die Zahl 2 zwei Elemente usw. Hierbei ist nun eine sehr naheliegende Wahl der Repräsentanten diejenige, die John VON NEUMANN 1923 eingeführt hat.[915] Ausgehend von der zwingenden Wahl der leeren Menge als Null werden hier die Zahlen sukzessiv aufgebaut, indem die jeweils folgende Zahl immer genau ihre Vorgänger als Elemente hat. Die bei transfiniter Fortsetzung dieser Sukzession auftretende Schwierigkeit, dass bei unendlichen Zahlen die „unmittelbar nächste“ Zahl mit der vorhergehenden gleichmächtig ist und somit derselben Äquivalenzklasse angehört, hat man – ebenfalls naheliegenderweise – dadurch gelöst, dass man nur noch die jeweils erste Zahl, die in einer *neuen* Äquivalenzklasse liegt, als hauptsächliche Zahl („Kardinalzahl“) gelten lässt (vgl. den Anfang von Abschnitt 5.30). Aber auch die übrigen Zahlen, die zunächst nur „Füllmaterial“ zwischen benachbarten unendlichen Kardinalzahlen sind, erhalten einen eigenständigen Wert als Vertreter wohlgeordneter Mengen, derart dass man alle Zahlen der NEUMANNschen Sukzession als „Ordinalzahlen“ bezeichnen und zur „Zählung“ der Elemente wohlgeordneter Mengen verwenden kann.

Trotz dieser Vorteile des NEUMANNschen Ansatzes liegt eine gewisse Willkür darin, als Repräsentanten einer FREGEschen Zahl U immer ein *Element* von U auszuwählen. Statt dessen kann man nach einem Vorschlag von Dana SCOTT auch eine *Teilmenge* von U verwenden: und zwar die Menge $\mathcal{R}_\mu \cap U$, wobei μ die kleinste Ordinalzahl ist mit der Eigenschaft, dass in U Elemente von Rang μ vorkommen.[916] Somit „schneidet“ man die Unmenge U „auf eine Menge zurück“, nämlich die Menge der in U enthaltenen Elemente kleinsten Ranges. Das SCOTTsche System ist

[914] Auch FREGE selbst hat am Ende seines Lebens seine Position aufgegeben: „Meine Anstrengungen, über das ins Klare zu kommen, was man Zahl nennen will, haben zu einem Misserfolg geführt“ (FREGE, *Tagebucheintragungen* 23.3.1924). Vgl. FREGE, *Zahl* S. 285 wo FREGE nochmals vom „völligen Misserfolg“ seiner Anstrengungen spricht. Er sei, so bekennt er in *Erkenntnisquellen* S. 289, einer „Täuschung unterlegen“, als er „die Zahlen als Mengen auffassen wollte“.

[915] Vgl. NEUMANN, *Transfinite Zahlen*; außerdem NEUMANN, *Definition durch transfinite Induktion*.

[916] Vgl. Abschnitt 5.29 und SCOTT, *Abstraction*. Man beachte, dass die FREGEsche Anzahl U wegen Theorem 5.30.2 S. 317 mindestens ein Element hat, welches eine Kardinalzahl (und somit eine Ordinalzahl) ist.

aber äußert „unregelmäßig“[917] und hat sich nicht durchsetzen können. Bekannter ist das von Ernst ZERMELO entworfene Modell (siehe Definition 5.16.49), in welchem die Null die leere Menge $\{\}$, die Eins die Menge $\{\{\}\}$, die Zwei die Menge $\{\{\{\}\}\}$ usw. ist: Hier ist jede Anzahl – außer der Null – eine *ein*elementige Menge.[918] Auf diese Weise erhält man sehr natürlich aussehende Zahlen. Allerdings lässt sich das ZERMELOsche Definitionsverfahren zumindest in der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre nicht transfinit fortsetzen.

Alle diese Zahlen erfüllen die Forderungen (1) und (2), aber die Forderung (3), also die Übereinstimmung mit der „natürlichen“ Zahlenvorstellung, scheint für keine dieser Zahlen erfüllt zu sein. Unter einer Zahl stellt man sich nämlich gewöhnlich weder eine Klasse mit unendlich vielen Elementen (FREGE) noch eine Menge mit nur einem Element (ZERMELO) noch eine ganz bestimmte Menge mit genau Z Elementen vor (VON NEUMANN), sondern offenbar überhaupt keine bestimmte Klasse oder Menge. Dass die in der natürlichen Zahlenanschauung gegebenen Zahlen keine Klassen oder Mengen sein können, hat auch FREGE am Ende seines Lebens eingesehen,[919] CANTOR hat es stets behauptet,[920] und vor allem haben es BENACERRAF, MADDY, HUSSERL und William Stanley JEVONS überzeugend dargelegt. Paul BENACERRAF geht allerdings in seinem Artikel *What numbers could not be* zu weit, wenn er erklärt, Zahlen seien nicht nur keine Mengen, sondern auch keine andersartigen Objekte („numbers are not objects at all“), sondern nur Relationen zueinander.[921] Das scheint philosophisch nicht haltbar zu sein, denn Relationen setzen doch jedenfalls Objekte voraus, deren Relationen sie sind.[922] Nach Penelope MADDY sind Zahlen nicht Mengen, sondern Eigenschaften von Mengen, ähnlich wie Längen keine physikalischen Objekte, sondern deren Eigenschaften sind, und die NEUMANNschen und ZERMELOschen Zahlen verhalten sich zu den eigentlichen Zahlen wie verschiedene Maßeinheiten zu den auszumessenden Größen.[923] Ähnlich behauptete schon HUSSERL, dass Zahlen „allgemeine Vielheitsformen“ sind, die durch Abstraktion aus Mengen entstehen,[924] es sind „Determinationen des unbestimmten Vielheitsbegriffs“.[925] JEVONS hat die zur Zahl führende Abstraktion genauer beschrieben. Während man bei der gewöhnlichen Abstraktion die Verschiedenheit konkreter Gegenstände ausblendet, um ihr Gemeinsames als eine Einheit zu erfassen, findet bei der von JEVONS so genannten „numerischen“ Abstraktion genau das Gegenteil statt: Man blendet alles Gemeinsame aus, was die Gegenstände außer ihrer nackten Verschiedenheit voneinander noch besitzen mögen, und es bleibt die „leere Form der Verschiedenheit“ übrig: die Zahl.[926]

Zahlen sind also Individuen, die man durch eine besondere Abstraktion aus konkreten Vielheiten

---

917 Die SCOTTschen Zahlen von 0 bis 2 sind die einelementigen Mengen $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ und $\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, die 3 aber hat vier und die 4 wieder nur ein Element, was einen äußerst „unregelmäßigen“ Eindruck macht.

918 Vgl. ZERMELO, *Grundlagen der Mengenlehre* § 1 S. 34; im Originalartikel S. 267.

919 Siehe Fußnote 914 auf S. 344.

920 Die *Ordinalzahlen* entstehen nach CANTOR durch eine Abstraktion, die bei einer wohlgeordneten Menge von der Eigenart der Elemente abstrahiert bis auf ihre Reihenfolge (siehe Fußnote 472 auf S. 190). So sind Ordnungszahlen Typen wohlgeordneter Mengen. Bei *Kardinalzahlen* muss man noch einen Schritt weitergehen, indem man bei einer Menge „sowohl von der Beschaffenheit ihrer Elemente, wie auch von allen Beziehungen“, einschließlich einer eventuell gegebenen Ordnungsbeziehung, abstrahiert (siehe Fußnote 800 auf S. 316).

921 Vgl. das Zitat in Fußnote 886 auf S. 340.

922 Die Frage nach dem Objekt dieser Relationen scheint BENACERRAF damit beantworten zu wollen, dass er erklärt: „Any object can play the role of 3; that is, any object can be the third element in some progression.“ (BENACERRAF, *Numbers* S. 291). Das ist richtig, insofern jedes Objekt als „Repräsentant“ der 3 auftauchen kann. Nur ist damit nicht gesagt, was die dadurch repräsentierte Drei *selbst* ist.

923 MADDY, *Realism in Mathematics* S. 86–89.

924 HUSSERL, *Arithmetik* S. 143.

925 HUSSERL, *Arithmetik* S. 130. Ähnlich hatte CANTOR behauptet, dass die Zahl „mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m ... abstrahiert wird.“ (CANTOR, *Transfinite Mengenlehre*, Ausgabe Zermelo S. 282).

926 JEVONS, *Principles of Science* S. 158f.

erhält. Ich nenne diese Zahlen, um sie von ihren mathematisch-mengentheoretischen Darstellungen zu unterscheiden, *echte Zahlen*, wobei ich *echte Kardinal–* und *echte Ordinalzahlen* unterscheide. Eine echte Kardinalzahl ist ein abstraktes Individuum, das einem Behälter gleicht, der beliebige Vielheiten von Individuen aufnehmen kann, aber stets so, dass die entsprechenden Klassen relationstheoretisch gleich groß sind. Dieser Behälter ist aber nicht mit konkreten Individuen aufgefüllt, sondern weist statt dessen nur „Leerstellen“ auf, die sich vollkommen gleichen (jede Leerstelle ist nichts anderes als das Vermögen, ein beliebiges Individuum aufzunehmen). Diese Leerstellen sind die „Einheiten“, aus denen sich die Zahl „zusammensetzt“. Bei einer echten Ordinalzahl stehen diese Leerstellen bzw. Einheiten zusätzlich in einer abstrakten Reihenfolge zueinander, die man durch eine Wohlordnungsrelation beschreiben kann. Um nun eine Zahl zu konkretisieren, muss man zunächst die Leerstellen mit je einem konkreten Objekt „besetzen“ und erhält dann eine Vielheit (ohne bzw. mit einer durch eine Wohlordnung beschreibbaren Reihenfolge), die immer noch ziemlich abstrakt ist; und indem man noch etwas weiter konkretisiert, kann man diese Vielheit in verschiedener Weise zum Inhalt eines Vorstellungsaktes machen und erhält dann eventuell eine Menge (zum Beispiel eine NEUMANNsche Zahl), die wir in der Mathematik als Stellvertreter für die entsprechende echte Zahl benutzen. Bei den echten Zahlen handelt es um ideale Gegenstände, die man theologisch als im Wesen Gottes grundgelegte und daher keineswegs geschaffene Urbilder des Seins deuten kann. Für die mathematische Handhabung scheinen jedoch die mengentheoretischen Stellvertreter der echten Zahlen besser geeignet zu sein als diese selbst: vor allem deshalb, weil sie Elemente des kumulativen Mengenuniversums $\mathbb{V}$ sein können, während die echten Zahlen Urelemente sind.[927]

[927] Zudem ist der natürliche Zugang zu den echten Zahlen (besonders zu den unendlichen) doch wohl der, dass man sich zunächst davon überzeugen muss, dass entsprechende Mengen (etwa die NEUMANNschen Ordinalzahlen) existieren; erst dann kann man durch Abstraktion zu den echten Zahlen gelangen.

5.34 Zusammenfassung der Axiome und ihrer Implikationen für die Unendlichkeitsfrage

Die Grundzüge des logischen Rahmens, in dem man Mengenlehre betreiben kann, werden durch das Rahmen–, Extensionalitäts–, Komprehensions–, und Auswahlaxiom ausgesprochen, welche daher als **Grundaxiome** fungieren. Das **Rahmenaxiom** (5.9.4 S. 117) setzt die Namen $\bot, \top, \underline{\bot}$ mit den Klassen $\emptyset, \{\emptyset\}, \mathbb{D}$ gleich, trennt diese voneinander,[928] schränkt den Objektbereich auf Individuen und Klassen ein[929] und fordert, dass die Elementrelation Individuen auf Klassen ausrichtet.

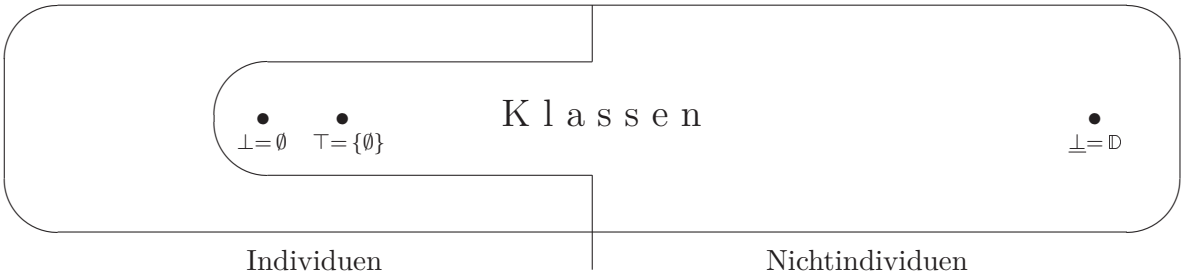


Abbildung 5.37: Zum Rahmenaxiom

Zur Rechtfertigung des Axioms mussten für die in ihm verwendeten Ausdrücke passende Inhalte gefunden werden. Als *Individuen* haben wir widerspruchsfreie Denkformen eingeführt, die stellvertretend für ihren Inhalt stehen.[930] Spezielle dieser Denkformen nannten wir *Mengen*,[931] und bezeichneten diese zusammen mit den *Unmengen* oder *inkonsistenten Vielheiten von Individuen* auch als *Klassen*.[932] So bilden die Mengen den in den Bereich der Individuen hineinragenden Teil der Klassen, während die übrigen Klassen Vielheiten und daher keine Individuen sind. Andere Nichtindividuen haben wir ausgeschlossen,[933] und so ergibt sich als „Rahmen“ für die weiteren Betrachtungen das obige Bild. Als Elemente von Mengen bestimmten wir die von ihnen beinhalteten Individuen, und als Elemente von Unmengen direkt ihre Bestandteile.[934] Es ergab sich, dass die Vielheit $\mathbb{D}$ aller Individuen inkonsistent ist,[935] und dass es zu jedem Individuum x eine nur dieses enthaltende Menge $\{x\}$ sowie eine leere Menge $\emptyset$ gibt.[936] Als Mengen sind $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ Individuen. Indem wir also $\underline{\bot}$ mit $\mathbb{D}$, $\bot$ mit $\emptyset$ und $\top$ mit $\{\emptyset\}$ gleichsetzten,[937] haben wir die im Rahmenaxiom geschilderte Situation vollkommen nachgebildet, und wir konnten zeigen, dass das Rahmenaxiom (ebenso wie die anderen Grundaxiome) in jedem Modell der Mengenlehre gültig ist.[938]

Für die Gültigkeit des **Extensionalitätsaxiom**s (5.9.5 S. 118; vgl. 5.3.1 S. 80), also der Aussage, dass es nicht mehrere Klassen mit denselben Elementen gibt, haben wir dadurch gesorgt, dass wir als Mengen Denkformen mit einem so tiefen Abstraktionsgrad genommen haben, dass keine zwei von ihnen dieselben Individuen beinhalten.[939] Hinter dem **Komprehensionsaxiom** (5.9.7 S. 118;

928 Es trennt sie, indem es fordert, dass $\bot$ und $\underline{\bot}$ verschiedene Individuen sind und $\underline{\bot}$ kein Individuum ist.

929 Es erklärt nämlich, dass alle Unmengen (d. h. nach Definition Nichtindividuen) Klassen sind.

930 Vgl. Erklärung 4.5.4 S. 56. Zu Denkformen siehe S. 26–27.

931 Vgl. Erklärung 5.2.2 S. 70.

932 Erklärung 5.2.9 S. 76.

933 Vgl. Erklärung 5.4.2 S. 88 im Kontext von Abschnitt 5.4.

934 Vgl. Erklärung 5.2.10 S. 76.

935 Vgl. die zu Satz 5.1 S. 75 führenden inhaltlichen Erwägungen, sowie Theorem 5.10.12 S. 123.

936 Vgl. die zum Axiom der Elementarmengen 5.2.3 S. 73 führenden Überlegungen auf S. 72–73.

937 Vgl. Erklärungen 5.4.3 S. 88 und 5.8.1 S. 105.

938 Modell ist hier im Sinne von Erklärung 5.8.7 S. 110 gemeint. Zu allgemeineren Modellen siehe S. 365.

939 Für Klassen, die keine Mengen und also bloße Vielheiten sind, ist das Axiom ja trivialerweise erfüllt.

vgl. 5.3.2 S. 80) und dem **Auswahlaxiom** (5.11.8 S. 156) stehen zwei unmittelbar einleuchtende Wahrheiten: dass beliebig ausgewählte Individuen stets die Elemente einer Klasse bilden bzw. dass man sich zu jeder vorgegebenen Auswahl von Objekten stets genau ein Objekt fest ausgewählt denken kann. Dass und warum Letzteres umstritten ist, haben wir in Abschnitt 5.11 gesehen; wir haben auch gesehen, dass diese Bedenken gegenstandslos sind, wenn wir nicht verlangen, dass jede „Auswahl“ selbst ein Objekt unserer Theorie sein muss.[940]

In einem weiteren Sinn gehören auch das Axiom für Urelemente sowie das Nullmengen– und Antizirkularitätsaxiom zu den Grundaxiomen. Auch das **Axiom für Urelemente** (5.15.20 S. 205) beschreibt ja nur den Rahmen der Betrachtung. Aber während die zuvor genannten Axiome wesentliche logisch-mengentheoretische Strukturen offen legen, steht dieses Axiom mengentheoretisch eher am Rande.[941] Es hat jedoch eine wichtige ontologische Bedeutung, weil es hilft, die Größenverhältnisse im Gesamtbereich der Objekte richtig einzuschätzen: Die Aussage $\mathbb{U} \sim \mathbb{D}$ bedeutet, dass die Klasse $\mathbb{U}$ der Urelemente zu den Klassen maximaler Größe gehört,[942] was das konträre Gegenteil der aus ökonomischen Gründen von Mathematikern oft bevorzugten Annahme $\mathbb{U} = \emptyset$ ist.

Im Gegensatz zu den obigen Axiomen sind die folgenden eigentliche **Mengenaxiome**, die den Mengenbegriff spezifizieren. Das erste von diesen ist das **Nullmengenaxiom** (5.9.13 S. 119; vgl. 5.2.3), das den Mengencharakter von $\emptyset$ behauptet. Dieses Axiom ist allerdings eine unmittelbare Folgerung aus der Behauptung des Rahmenaxioms, dass das mit $\emptyset$ gleichgesetzte $\top$ ein Individuum ist. Es könnte also gestrichen werden, ist aber für den sukzessiven Aufbau der Mengen „von unten her“ von Bedeutung und verdient daher, extra hervorgehoben zu werden. Als Folgerung aus dem Rahmenaxiom gilt das Nullmengenaxiom in jedem Modell.

Dasselbe gilt auch vom **Antizirkularitätsaxiom** (5.19.7 S. 257), zumindest was seine inhaltlich intendierte Aussage betrifft.[943] Mit seinem Ausschluss geschlossener Mengenketten hat es die Aufgabe, den realistischen Mengenbegriff von anderen Mengenkonzeptionen abzugrenzen. Seine Wahrheit beruht darauf, dass wir Mengen aus Erkenntnisakten *der uns bekannten Art* abstrahiert haben, die sich nicht selbst zum Inhalt haben können (vgl. Abschnitt 5.19). Dagegen konnten wir den im sog. **Fundierungsaxiom** ausgesprochenen Ausschluss auch aller unendlichen $\in$-Ketten in unserer Interpretation der Mengenlehre nicht bestätigen und sogar zurückweisen.[944] Das Antizirkularitätsaxiom haben wir für kein Theorem der formalen Theorie wirklich gebraucht,[945] und so ist es ähnlich wie das Axiom für Urelemente für die Anwendungen der Mengentheorie von nur marginalem Interesse.

Die zentralen Mengenaxiome sind jene fünf, die ich in Kap. 5.10 als die **konstruktiven** Axiome zusammengefasst habe. Von diesen sind das **Teilmengenaxiom** (5.10.5 S. 121) und das **Ersetzungsaxiom** (5.10.57 S. 141) miteinander verwandt, weil in ihnen dasselbe Unterscheidungsmerkmal zwischen Mengen und Unmengen zum Ausdruck kommt: Beide Axiome gelten aufgrund der Tatsache, dass Unmengen die „großen“ und Mengen die „kleinen“ Klassen sind. Deshalb ist jede Teilklasse einer Menge eine Menge (Teilmengenaxiom) und jeder Wertebereich einer Funktion, deren Definitionsbereich eine Menge ist, ebenfalls eine Menge (Ersetzungsaxiom).[946] Während man mit Berufung auf das Teilmengen– und Ersetzungsaxiom aus gegebenen Mengen nur zu *kleineren* oder *gleich großen* Mengen übergehen kann, gestatten die übrigen drei konstruktiven Axiome

---

940 Vgl. vor allem S. 155–156 mit Fußnote 383 auf S. 156.

941 Ich habe es nur zum Beweis von Korollar 5.15.21 und Metatheorem 5.31.11 sowie in Verbindung mit den Definitionen 5.21.24 und 5.23.3 verwendet. Vgl. hierzu noch die Fußnoten 522 und 523 auf S. 206.

942 Vgl. Theorem 5.15.19 S. 205.

943 Vgl. Bemerkung nach Korollar 5.29.23 S. 313.

944 Vgl. Satz 5.168 S. 256.

945 Verwendet haben wir es nur in dem unmittelbaren Korollar 5.19.8.

946 Ich habe in der Plausibilitätsbetrachtung der beiden Axiome auf das Teil– bzw. Ersetzungsprinzip 5.2.7 und 5.2.8 S. 76 zurückgegriffen: zwei Prinzipien, die auf einer Anschauung beruhen, die bereits Russell in seiner „limitation of size“-Theorie erwogen hat (siehe Fußnote 218 auf S. 95).

auch den Übergang zu *größeren* Mengen. Das **Paarmengenaxiom** (5.9.14 S. 119) ist diesbezüglich das schwächste. Es ermöglicht die Konstruktion einer höchstens zweielementige Menge $\{x, y\}$ aus Individuen x und y, und lässt sich mit der Kleinheit dieser Mengen rechtfertigen.[947] Zu größeren Mengen führen das **Vereinigungsmengenaxiom** (5.10.19 S. 125) und das **Potenzmengenaxiom** (5.10.16 S. 124), wonach die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{M}$ aller in einer Mengenmenge $\mathfrak{M}$ enthaltenen Mengen bzw. die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ebenfalls eine Menge ist. Für diese Axiome wurden Plausibilitätsbetrachtungen angeführt, die darauf beruhen, dass sich ein implizit in einer Vorstellung Enthaltenes durch Aufmerken zum expliziten Gegenstand des Erkennens machen lässt.

Schließlich haben das Unendlichkeits– und das Universenaxiom die Eigentümlichkeit, **Existenzaxiome** zu sein,[948] indem sie die Existenz einer unendlichen bzw. universalen Menge fordern. Das **Unendlichkeitsaxiom** (5.17.26 S. 242) konnten wir durch die Betrachtung eines Arithmetik-Modells auf einer Strecke rechtfertigen, dessen Zahlen eine unendliche Klasse und dennoch eine (relativ) überschaubare Gesamtheit bilden (siehe S. 231–232). Die Axiome außer dem Universenaxiom und dem Axiom für Urelemente lassen sich als die **klassischen Axiome** zusammenfassen.[949]

Demgegenüber ist das **Universenaxiom** (5.31.13 S. 331) ein so genanntes *starkes Unendlichkeitsaxiom*, das den Bereich des gesamten Mengenuniversums weit über die gewöhnliche Mengenlehre hinaus ausdehnt, und das die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen zur Folge hat. Ich habe am Ende von Abschnitt 5.31 versucht, es durch eine ausgedehnte Analyse des Erkennens zu begründen. Diese Begründung beruht (ähnlich wie die Begründung des Vereinigungsmengen– und Potenzmengenaxioms) auf dem Prinzip, dass etwas implizit Erkanntes durch Aufmerken explizit erkannt werden kann. Noch stärkere Unendlichkeitsaxiome könnte man durch das **Reflexionsprinzip** rechtfertigen,[950] bei dem aber korrekte und fehlerhafte Anwendungen nicht scharf unterschieden werden können, so dass seine Anwendung problematisch ist. – Im folgenden Überblick über die Axiome sind die fundamentaleren weiter unten, die darauf aufbauenden weiter oben, am linken und rechten Rand die unbedeutenderen und in der Mitte diejenigen von zentraler Bedeutung aufgelistet:

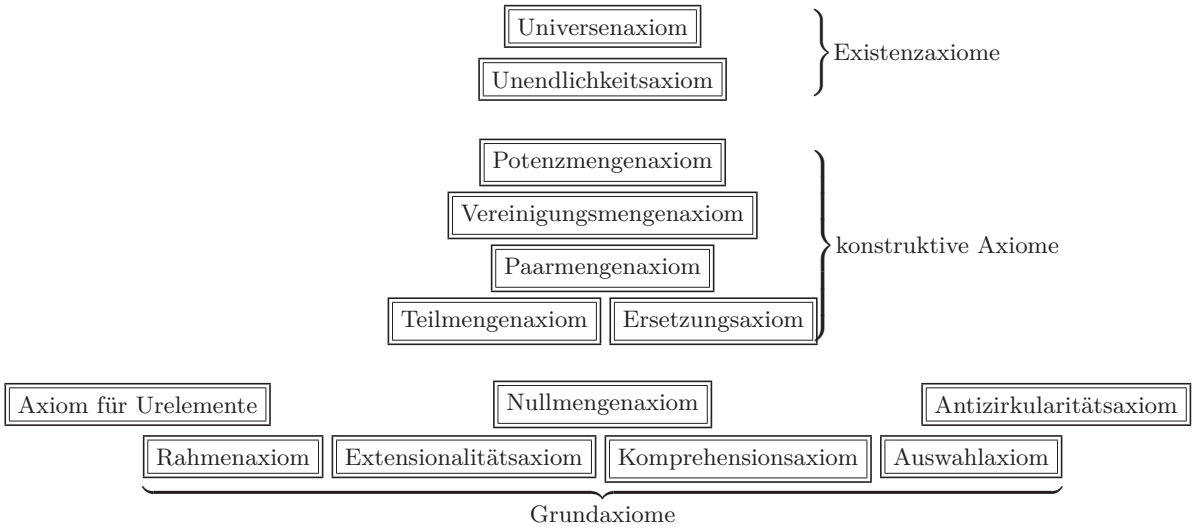


Abbildung 5.38: Die Axiome der realistischen Mengenlehre

947 Vgl. die Begründung zum Axiom der Elementarmengen 5.2.3 S. 73.

948 Oft wird auch das Nullmengenaxiom als Existenzaxiom betrachtet: Dann versteht man darunter die Aussage „es gibt eine leere Menge“. In unserem System lautet es nur: „die leere Klasse ist eine Menge“ und ist daher *kein* Existenzaxiom. Ein Existenzaxiom ist dagegen das Komprehensionsaxiom, das ich aber nicht zu den *Mengen*axiomen rechne, denn es fordert nicht die Existenz von Mengen, sondern nur von *Klassen*.

949 Vgl. Bemerkung auf S. 257 mit Fußnote 611.

950 Vgl. Abschnitt 5.32.

Diese Axiome sind nicht „unabhängig“, d. h. ihre Anzahl könnte reduziert werden. So kann man aus dem Universenaxiom das Unendlichkeits–, Potenzmengen–, Vereinigungsmengen–, Paarmengen–, Teilmengen–, und Nullmengenaxiom ableiten,[951] weshalb man theoretisch allein mit dem Universenaxiom, dem Ersetzungsaxiom und den Grundaxiomen auskommt. Trotzdem ist es gerechtfertigt, vor dem Universenaxiom auch alle übrigen aufzustellen, weil man sich ohne diese kaum einen adäquaten Zugang zum Verständnis des Universenaxioms verschaffen kann. Wichtiger als die Frage der Unabhängigkeit ist zudem die Frage, ob die Axiome widerspruchsfrei sind. Dies können wir nun ohne weiteres bejahen, da wir ein realistisches Modell für die Axiome etabliert haben.

Außer dem Axiomensystem der Mengenlehre haben wir noch zwei andere wichtige Axiomensysteme betrachtet: zum einen die fünf PEANOschen Axiome für die Arithmetik,[952] und zum anderen ein System von Axiomen für die Geometrie.[953] Für die **Axiome der Arithmetik** ist eine anschauliche Rechtfertigung eigentlich überflüssig, da man im Rahmen der Mengenlehre streng *beweisen* kann, dass diese Axiome erfüllt sind, wenn man die verwendeten Grundkonstanten ≪Zahl≫, ≪Null≫ und ≪Nachfolger≫ mit bestimmten durch die Mengenlehre schon bereitliegenden Objekten gleichsetzt.[954] Darüber hinaus existieren auch anschauliche Modelle der Arithmetik *außerhalb* der Mengenwelt, deren wichtigste die *räumlichen* Modelle sind.[955] Mit welchem arithmetischen Modell man arbeitet, ist prinzipiell gleichgültig,[956] und auch wenn es unter den Urelementen ≪echte≫ Zahlen gibt.[957] Mit den **Axiomen der Geometrie**, von denen nur das **Vollständigkeitsaxiom** (5.21.10 S. 270) einer eingehenderen anschaulichen Begründung bedurfte,[958] konnten wir schließlich in Abschnitt 5.21 die Mächtigkeit von Punktmengen im Anschauungsraum bestimmen.

Für die **Unendlichkeitsfrage** sind diese Axiomensysteme (das mengentheoretische, arithmetische und geometrische) gleichermaßen aufschlussreich. Zunächst können wir festhalten, dass aus jedem dieser Axiomensysteme *die Existenz unendlicher Klassen zwingend folgt*, wobei natürlich vorausgesetzt werden muss, dass diese Axiomensysteme in einem mengentheoretischen Rahmen formuliert werden, in welchem der Begriff des Unendlichen exakt definiert ist.[959] Diese Einbettung aller Theorien in die Mengenlehre ist aber in der Mathematik heute selbstverständlich, und so lässt sich das Unendliche aus keinem Bereich der modernen Mathematik mehr wegdenken.

Aus den arithmetischen Axiomen ergibt sich, dass es *unendlich viele Zahlen* gibt: die Klasse Klasse $\mathbb{N}$ oder ω dieser Zahlen ist unendlich.[960] Mit den Axiomen der Mengenlehre (einschließlich Unendlichkeitsaxiom) lässt sich alsdann genauer feststellen, dass dieses ω eine Menge ist, die der kleinsten Unendlichkeitsstufe angehört,[961] welche man die Stufe der *abzählbaren Unendlichkeit* nennt. Bei der Rede von Stufen der Unendlichkeit ist der Unterschied zwischen dem ergänzungstheoretischen und relationstheoretischen Größenvergleich zwischen Klassen zu beachten,[962] denn nur die

[951] Das folgt sofort aus der Definition der Universen und dem daraus ableitbaren Satz 5.265 S. 329.

[952] Vgl. Abschnitt 5.16.

[953] Vgl. Abschnitt 5.21.

[954] Auf S. 221–232 wurde gezeigt, dass dies sogar auf verschiedene Weise möglich ist.

[955] Siehe S. 230–232.

[956] Siehe S. 226–227.

[957] Vgl. Abschnitt 5.33, besonders S. 345–346.

[958] Wenn es nur um die logische Erfüllbarkeit der geometrischen Axiome geht, könnte man auch hier mengentheoretische Modelle angeben (HILBERT gab ein arithmetisches Modell der Geometrie an; vgl. HILBERT, *Geometrie* S. 34–37). Aber wir wollten ja nicht nur wissen, ob die Axiome in irgendeinem Modell erfüllbar sind, sondern ob sie wahr sind, wenn wir sie konkret auf den Anschauungsraum anwenden. Daher musste das Vollständigkeitsaxiom durch eine anschauliche Plausibilitätsbetrachtung gerechtfertigt werden.

[959] Siehe Definition 5.17.1 S. 233 und den ganzen Abschnitt 5.17.

[960] Vgl. Theorem 5.17.5 S. 234.

[961] Vgl. Korollar 5.17.27 S. 243 und Satz 5.150 S. 246.

[962] Vgl. Abschnitt 5.17, besonders S. 237.

relationstheoretisch größeren Klassen sind gewissermaßen „qualitativ“ größer und verdienen, einer höheren Stufe zugeordnet zu werden. Als *Stufen* haben wir die FREGEschen Zahlen genommen, mit denen sich das ganze Klassenuniversum größenmäßig einteilen lässt.[963]

Aus den geometrischen Axiomen folgt, dass *jede Strecke unendlich viele Punkte hat*, wobei die Klasse dieser Punkte auf einer höheren Unendlichkeitsstufe als ω liegt: auf der Stufe der *kontinuierlichen Unendlichkeit*. Ferner besitzt eine Strecke relationstheoretisch ebenso viele Punkte wie der gewöhnliche Raum, und sogar ebenso viele wie ein Raum mit unendlich vielen Dimensionen (der kleinsten Unendlichkeitsstufe).[964] Der Vorrat an Urelementen ist jedoch so groß, dass man mit ihnen auch unendlichdimensionale Räume bilden kann, die relationstheoretisch größer sind als Strecken, und sogar größer als jede Menge.[965] Von den eigentlichen Punkten eines Anschauungsraums sind seine *uneigentlichen Punkte* zu unterscheiden, deren Klasse größer sein kann als die kontinuierlich unendliche Menge seiner eigentlichen Punkte. Um die Existenz dieser in unendlicher Ferne von den eigentlichen Punkten befindlichen oder auch in und zwischen den eigentlichen Punkten auszumachenden Punkte zu begründen, reichen allerdings die geometrischen Axiome nicht aus. Gewisse Gedankenexperimente lassen aber ihre Existenz als plausibel erscheinen.[966]

Aus den Axiomen der Mengenlehre folgt schließlich, dass es unendlich viele Unendlichkeitsstufen für Mengen gibt,[967] wobei bis heute nicht geklärt ist, ob die Kontinuumsstufe bereits unmittelbar über der Stufe der abzählbaren Unendlichkeit liegt oder nicht (Kontinuumsproblem).[968] Klar ist aber, dass es Klassen gibt, die größer als alle Mengen sind, und diese *Unmengen* liegen dann auf Unendlichkeitsstufen, die alle Unendlichkeitsstufen von Mengen überragen.[969] Der Bereich der Unmengen ist noch weitgehend unerforscht,[970] und die wichtigste Frage ist hier, ob die NEUMANNschen Vermutung zutrifft, dass es nur eine einzige Unmengenstufe gibt.[971] Diese Vermutung würde eine ganze Reihe weiterer offener Fragen beantworten.[972] Ich möchte der NEUMANNschen Vermutung allerdings die Vermutung entgegensetzen, dass es *unvorstellbar viele* Unmengenstufen gibt, obgleich ich hierfür kein Argument anzugeben weiß außer dem Gefühl, dass „einfach alles“ in dem von uns nicht mehr adäquat denkbaren Bereich der Unmengen unfassbar groß sein sollte.

Zu betonen ist, dass im realistischen Modell der Mengenlehre alle ermittelten Resultate über unendliche Klassen eine unmittelbare ontologische Bedeutung haben: Jene Klassen sind im Reich der Possibilien vorhandene Objekte, und unsere Theoreme geben daher über die dortigen Verhältnisse Auskunft. Hierbei besitzen sie genau den gleichen Grad an Zuverlässigkeit wie die Axiome, auf denen sie basieren.

---

963 Vgl. die Abbildungen auf S. 171, S. 226 und S. 284; vor allem Abbildung 5.28 S. 246. Zur Einführung der FREGEschen Zahlen bzw. Stufen siehe Abschnitt 5.12.

964 Vgl. Theorem 5.21.44 S. 281.

965 Vgl. Abschnitt 5.23.

966 Siehe S. 289–296.

967 Vgl. Theorem 5.15.17 S. 205, beruhend auf dem Satz von CANTOR 5.20.19 S. 262. Die wichtigsten quantitativen Unterscheidungen im Bereich des Unendlichen sind durch die Begriffe des abzählbar, überabzählbar, kontinuierlich, funktional, unerreichbar und inkonsistent Unendlichen gegeben (siehe S. 334).

968 Siehe S. 284–285.

969 Vgl. Satz 5.114 S. 206.

970 Einige Resultate über Unmengen habe ich auf S. 203–207 und S. 260–262 hergeleitet; siehe auch S. 287–288, Satz 5.218 S. 309, Fußnote 732 auf S. 295 und Lemma 1 auf S. 482. Ein wichtiges Mittel zur Erforschung von Unmengen sind die Unfunktionen, von denen einige wertebereichslos sei könnten (siehe S. 138–140). Um tiefer gehende Resultate auf diesem Gebiet zu erzielen, müsste man die erweiterte Mengenlehre ausbauen, deren Grundlagen in Abschnitt 5.7 beschrieben wurden.

971 Vgl. S. 171–172 und 5.15.11 S. 203.

972 Z. B. die Frage nach der allgemeinen Vergleichbarkeit von Klassen (vgl. S. 202) und die Frage nach der allgemeinen Gültigkeit des Wohlordnungssatzes und des ZORNschen Lemmas (vgl. S. 198–199).

6 Der logische Rahmen

In den vergangenen Abschnitten wurde ein realistisches Modell der Mengenlehre aufgestellt und plausibel gemacht, dass die Axiome der Mengenlehre in diesem Modell gültig sind. Dabei wurden die wesentlichen Teile der Mengenlehre selbst mit entwickelt, indem die Theoreme „aus den Axiomen logisch abgeleitet“ wurden. Es soll nun erörtert werden, was eine solche Ableitung (im Unterschied zu anschaulichen Argumenten) eigentlich ist und worauf ihre Plausibilität beruht. Zur vollständigen Begründung der Axiomatik fehlt also noch ein logischer Rahmen, den wir jetzt gleichsam noch um das fertige Bild legen müssen. Auch ergeben sich aus tieferen metalogischen Ergebnissen noch weitere für die Unendlichkeitsproblematik interessante Einsichten.

Die Logik ist seit Aristoteles eine Lehre, die beschreibt, wie man ausgehend von Voraussetzungen (Axiomen) zu Schlussfolgerungen gelangt, die notwendigerweise wahr sind, wenn die Voraussetzungen zutreffen. Gemäß einer von Leibniz geforderten und (unter anderem) von Frege, Peano, Peirce, Russell, Hilbert, Gödel und Carnap ausgeführten Präzisierung wird die mathematische Logik heute in Form von schriftlich fixierten Kunstsprachen betrieben, die von den Doppeldeutigkeiten der Alltagssprache befreit sind. In dieser Form kann die Logik letztlich als Disziplin der Lehre von den Zeichen („Semiotik“) aufgefasst werden.[1] Aufgrund der üblichen Dreiteilung der Semiotik in Syntaktik, Semantik und Pragmatik[2] würde ich die mathematische Logik einteilen in die Lehre vom Verhältnis der Zeichen untereinander (Syntaktik), die Lehre von der Bedeutung der Zeichen (Semantik) und die Lehre von ihrer Verwendung (Pragmatik). Vor diesen drei Lehrstücken ist noch zu klären, was Zeichen und Zeichenreihen überhaupt sind (Fundamental-Semiotik).

Gewöhnlich versteht man unter «Zeichen» Figuren auf dem Papier oder deren (von Ort und Zeit unabhängige) abstrakte Gestalten, und unter «Zeichenreihen» Zusammenstellungen dieser Figuren bzw. abstrakte Gestalten dieser Zusammenstellungen. Demgegenüber schlage ich vor, als Zeichenreihen *beliebige* n-Tupel $\langle\!\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle\!\rangle$ für n aus ω anzusehen[3] deren Komponenten $x_0, \ldots, x_{n-1}$ beliebige Objekte sein können, und „Zeichen“ mit 1-Tupeln $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ gleichzusetzen; Zeichen sind demnach Zeichenreihen mit nur einer einzigen Komponenten. Diese Festlegung hat den Vorteil, dass unser Zeichenvorrat so groß ist, dass wir nötigenfalls für *jedes* Objekt ein je eigenes Zeichen zur Verfügung haben; würde man dagegen als Zeichen nur ebene Figuren zulassen, wäre deren Anzahl nach oben hin durch die Kardinalzahl $\mathfrak{f}$ begrenzt. Außer Zeichen und Zeichenreihen benötigen wir noch Zeichenreihenstapel, worunter ich n-Tupel verstehe, deren Komponenten Zeichenreihen sind:

6.0.1 Erklärung *Zeichen* sind 1-Tupel, *Zeichenreihen* sind n-Tupel und *Zeichenreihenstapel* sind n-Tupel, deren Komponenten Zeichenreihen sind. Hierbei ist $n \in \omega$.[4]

Als Zeichenreihe und Zeichenreihenstapel soll auch das 0-Tupel $\langle\!\langle\rangle\!\rangle = \emptyset$ gelten, das wir diesem Zusammenhang die *leere Zeichenreihe* und der *leere Zeichenreihenstapel* nennen und mit Λ bezeichnen.

---

[1] Zur Semiotik vgl. Morris, *Theory of Signes*; Hermes, *Semiotik, Semiologie*; Asser, *Logik* Band 1 S. 172–176 und Menne, *Logik* S. 14. Einen axiomatischen Zugang zur Semiotik bietet Hermes, *Semiotik*.

[2] Diese Dreiteilung geht auf Morris zurück (vgl. Morris, *Theory of Signes* S. 8).

[3] Siehe Definition 5.18.4 S. 250. Zu Tupeln siehe auch die Ausführungen auf S. 146–147 und S. 249–251.

[4] Man könnte in einer verallgemeinerten Logik auch Zeichenreihen mit unendlich vielen Komponenten zulassen; dann sollte man unter diesen verallgemeinerten Zeichenreihen α-Tupel für Ordinalzahlen α verstehen. Gewöhnlich geht man aber davon aus, dass Zeichenreihen nur endlich viele Zeichen haben. Dem schließen wir uns hier an.

Die abstrakten Gestalten (und ihre Konkretionen auf dem Papier), die man im gewöhnlichen Sprachgebrauch Zeichen nennt, setzen wir nun als graphische Repräsentanten für gewisse ≪Zeichen≫ im Sinn von Erklärung 6.0.1 ein. So ist zu unterscheiden: (1) die konkrete Figur auf dem Papier, (2) deren abstrakte Gestalt, (3) das Zeichen, als dessen Repräsentant die Gestalt und daher auch die Figur dient, und (4) das Denotat: das bezeichnete Objekt. Meist wollen wir mit einer konkreten Figur das Denotat bezeichnen, zuweilen aber auch bloß das Zeichen oder die Gestalt. Um Eindeutigkeit zu schaffen, könnte man die möglichen Deutungen durch Verwendung verschiedener Anführungszeichen auseinander halten, aber dies erweist sich in der Praxis eher als verwirrend und meist als unnötig, weil aus dem Kontext heraus das Gemeinte fast immer eindeutig erfasst werden kann.

Notation. Wie auf S. 250 erklärt, ist $\leqslant x_0, \ldots, x_{n-1} \geqslant$ eine Abkürzung für $\langle {x_0 \atop 0} \ldots {x_{n-1} \atop n-1} \rangle$ und steht für die (auch als *n-Tupel* bezeichnete) verallgemeinerte Funktion, deren Definitionsbereich die NEUMANNsche Zahl $n = \{0, \ldots, n-1\}$ ist und die jedes k aus $\{0, \ldots, n-1\}$ auf x_k wirft. In der Logik vereinfachen wir nun die Notation $\leqslant x_0, \ldots, x_{n-1} \geqslant$ noch weiter, indem wir die Klammern und Kommata weglassen, also einfach $x_0 \ldots x_{n-1}$ schreiben. Mit x_0 kann demnach das Objekt x_0 oder aber die einkomponentige Zeichenreihe (d. h. das Zeichen) $\leqslant x_0 \geqslant$ gemeint sein.

Exemplare von Zeichenreihen. Während Zeichen 1-Tupel (d. h. $\{0\}$-Tupel) sind, verstehe ich unter einem *Zeichenexemplar* ein $\{n\}$-Tupel $\langle {z \atop n} \rangle$ für eine beliebige natürliche Zahl n, und zwar nenne ich dieses Zeichenexemplar ein *Exemplar* des Zeichens z (genauer: des Zeichens $\leqslant z \geqslant$, d. h. des Zeichens $\langle {z \atop 0} \rangle$). Und während Zeichenreihen n-Tupel (d. h. $[0, n-1]$-Tupel) sind, verstehe ich unter einem *Zeichenreihenexemplar* ein $[m, n]$-Tupel $\langle {x_m \atop m} \ldots {x_n \atop n} \rangle$ für beliebige natürliche Zahlen m und n mit $m \leq n$, und zwar nenne ich dieses Zeichenreihenexemplar ein *Exemplar* der Zeichenreihe $x_m \ldots x_n$ (genauer: der Zeichenreihe $\leqslant x_m \ldots x_n \geqslant$, d. h. $\langle {x_m \atop 0} \ldots {x_n \atop n-m} \rangle$). Alle Zeichen sind auch Zeichenreihen; diese und alle Zeichenexemplare sind auch Zeichenreihenexemplare, so dass der Begriff des Zeichenreihenexemplars hier der allgemeinste ist.

Teilstücke und Teilzeichenreihen. Sind A und B Zeichenreihenexemplare, sagen wir, dass A *ein Teilstück von* B ist, wenn A die Einschränkung von B auf den Definitionsbereich von A ist. Ist z. B. $A = \langle {a_m \atop m} \ldots {a_n \atop n} \rangle$ und $B = \langle {b_k \atop k} \ldots {b_\ell \atop \ell} \rangle$, so ist demnach A ein Teilstück von B, wenn $[m, n] \subseteq [k, \ell]$ und für alle i aus $[m, n]$ stets $a_i = b_i$ gilt. Von einem Zeichenreihenexemplar sagen wir, dass es in einem Zeichenreihenexemplar Z *steht*, wenn es ein Teilstück von Z ist, und von einer Zeichenreihe sagen wir, dass sie in Z *vorkommt*, wenn ein Exemplar dieser Zeichenreihe in Z steht. So *stehen* in der Zeichenreihe $\leqslant x_0, \ldots, x_n \geqslant$ die folgenden Zeichenexemplare: $\langle {x_0 \atop 0} \rangle, \ldots, \langle {x_n \atop n-1} \rangle$. Das sind genau n verschiedene Zeichenexemplare, denn jedes Exemplar $\langle {x_i \atop i} \rangle$ hat „seinen" je eigenen Index i. Demgegenüber sind die in dieser Zeichenreihe *vorkommenden* Zeichen folgende: $\langle {x_0 \atop 0} \rangle, \ldots, \langle {x_n \atop 0} \rangle$, und dies können weniger als n Zeichen sein, da $x_i = x_j$ für $i \neq j$ möglich ist. In diesem Fall stehen in der Zeichenreihe *verschiedene Exemplare ein und desselben Zeichens*. Zum Beispiel kommen in der Zeichenreihe $xxyx$, das ist $\langle {x \atop 0} {x \atop 1} {y \atop 2} {x \atop 3} \rangle$, nur zwei Zeichen x und y vor, aber es stehen in ihr vier Zeichenexemplare, und zwar drei Exemplare des Zeichens x und ein Exemplar des Zeichens y. Die in einem Zeichenreihenexemplar vorkommenden Zeichenreihen heißen auch *Teilzeichenreihen* von Z; diese sind von den in Z stehenden Teilstücken zu unterscheiden.[5] Zu den Teilstücken und Teilzeichenreihen von Z gehört stets Z selbst und die leere Zeichenreihe Λ.

Positionen in Exemplaren von Zeichenreihen. Wir sagen, dass ein Zeichenexemplar $\langle {x \atop i} \rangle$ eines Zeichenreihenexemplars $\langle x_m, \ldots x_n \rangle$ *rechts von* einem anderen Zeichenexemplar $\langle {y \atop j} \rangle$ desselben Zei-

[5] So hat die Zeichenreihe $Z := \leqslant x, y, y \geqslant$
(a) folgende *Teilstücke:* $\leqslant \geqslant, \leqslant x \geqslant, \leqslant x, y \geqslant, \leqslant x, y, y \geqslant, \langle {y \atop 1} \rangle, \langle {y \atop 1} {y \atop 2} \rangle$ und $\langle {y \atop 2} \rangle$.
(b) folgende *Teilzeichenreihen:* $\leqslant \geqslant, \leqslant x \geqslant, \leqslant x, y \geqslant, \leqslant x, y, z \geqslant, \leqslant y \geqslant$ und $\leqslant y, y \geqslant$.

chenreihenexemplars steht, und dieses *links von* jenem, falls $i < j$. Ferner heißt $\langle {x \atop i} \rangle$ *der Anfang* oder *das Ende* oder das *k-te Zeichenexemplar* des Zeichenreihenexemplars, wenn $i = m$ bzw. $i = n$ bzw. $i = m+k$ ist: $\langle {x_m \atop m} \rangle$ ist also Anfang und 0-tes Zeiten, $\langle {x_{m+1} \atop m+1} \rangle$ ist 1-tes Zeichen usw., und $\langle {x_n \atop n} \rangle$ ist Ende oder $n - m$-tes Zeichen. Von einem *Zeichen* z sagen wir, dass es in einem Zeichenreihenexemplar rechts bzw. links von einem Zeichen z^* vorkommt, wenn es Exemplare e von z und e^* von z^* gibt, so dass e in dem Zeichenreihenexemplar rechts bzw. links von e^* steht. Ferner heißt z *Anfangszeichen* bzw. *Endzeichen* bzw. *k-tes Zeichen* des Zeichenreihenexemplars, wenn sein Anfang bzw. sein Ende bzw. sein k-tes Zeichenexemplar ein Exemplar von z ist.[6]

Positionen in Exemplaren von Zeichenreihenstapeln. Zur Bezeichnung eines Zeichenreihenstapels $\leqslant Z_0, \ldots, Z_n \geqslant$ soll es auch erlaubt sein, Bezeichnungen für die Zeichenreihen $Z_0, \ldots, Z_n$ *untereinander* zu schreiben. Daher nennen wir Z_0, Z_1 usw. die *Zeilen* und $\langle {Z_0 \atop 0} \rangle$, $\langle {Z_1 \atop 1} \rangle$ usw. die *Zeilenexemplare* des Zeichenreihenstapels und sagen, dass ein Zeilenexemplar $\langle {Z \atop i} \rangle$ *oberhalb von* einem anderen Zeilenexemplar $\langle {Y \atop j} \rangle$ und dieses *unterhalb von* jenem steht, falls $i < j$ ist. $\langle {Z \atop i} \rangle$ heißt das *oberste* bzw. *unterste* Zeilenexemplar bzw. *k-te* Zeilenexemplar des Stapels, wenn $i = 0$ bzw. $i = n$ bzw. $i = k$ ist. Weiter sagen wir, dass eine Zeile Z *unterhalb* von einer Zeile Z^* und Z^* *oberhalb* von Z vorkommt, wenn es Exemplare E von Z und E^* von Z^* gibt, so dass E in dem Stapel unterhalb bzw. oberhalb von E^* steht. Schließlich heißt Z die *oberste Zeile* bzw. *unterste Zeile* bzw. k-te Zeile des Stapels, wenn das oberste bzw. unterste bzw. k-te Zeilenexemplar ein Exemplar von Z ist.

Ersetzungen. Wir sagen, dass in einer Zeichenreihe $Z = \leqslant z_0 \ldots z_{k-1} z_k \ldots z_\ell z_{\ell+1} \ldots z_{\ell+n} \geqslant$ das Teilstück $T = \langle {z_k \atop k} \ldots {z_\ell \atop \ell} \rangle$ durch eine Zeichenreihe $E = \leqslant e_0 \ldots e_m \geqslant$ ersetzt wird, wenn man von der Betrachtung von Z zur Betrachtung von $Z' := \langle {z_0 \atop 0} \cdots {z_{k-1} \atop k-1} {e_0 \atop k} \cdots {e_m \atop k+m} {z_{\ell+1} \atop (k+m)+1} \cdots {z_{\ell+n} \atop (k+m)+n} \rangle$ übergeht. Z' heißt das *Resultat* der Ersetzung. Unter dem Zeichenexemplar, in welches das in E stehende Zeichenexemplar $\langle {e_i \atop i} \rangle$ bei dieser Ersetzung *übergeht*, verstehen wir das in Z' stehende $\langle {e_i \atop k+i} \rangle$.

Konkatenation. In einer Beschreibung der logischen Sprache benutzen wir oft Zeichen und Zeichenreihen, um *andere* Zeichenreihen zu bezeichnen. Bezeichnet nun ein Zeichen A die Zeichenreihe $\leqslant x_0, \ldots, x_{n-1} \geqslant$ und ein anderes Zeichen B die Zeichenreihe $\leqslant y_0, \ldots, y_{m-1} \geqslant$, so bezeichnet die Zeichenreihe AB die Zeichenreihe $\leqslant x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots y_{m-1} \geqslant$, die man auch die *Konkatenation* der beiden Zeichenreihen A und B nennt. Ist Λ die leere Zeichenreihe (das 0-Tupel), bezeichnet natürlich $A\Lambda$ und ΛA dieselbe Zeichenreihe wie A, d. h. es gilt $A\Lambda = \Lambda A = A$. Eine *Teilzeichenreihe* einer Zeichenreihe Z kann man mit diesen Konventionen beschreiben als eine Zeichenreihe T mit der Eigenschaft, dass es (zulässigerweise leere) Zeichenreihen A und B gibt, so dass $Z = ATB$.

Nach diesen Ausführungen über Zeichen kommen wir zur eigentliche Logik mit ihren drei Hauptteilen Syntaktik, Semantik und Pragmatik. Man beachte dabei den folgenden

Hinweis. Viele der in den folgenden Abschnitten auf einem hohen Abstraktionsniveau zu besprechenden logischen Ideen wurden bereits in Abschnitt 5.8 in einer mehr inhaltsbestimmten Weise dargestellt und angewendet, als wir die „logische Ursprache“ eingeführt haben, welche den Rahmen unserer Mengentheorie bildete. Zu einem vertieften Verständnis der folgenden Ausführungen empfiehlt es sich daher, sie mit denen in Abschnitt 5.8 zu vergleichen. Man rekapituliere auch Abschnitt 4.4.3 über das logische Universum.

[6] Man beachte, dass z gleichzeitig Anfangs– und Endzeichen eines Zeichenreihenexemplars sein kann, und auch zugleich rechts und links von einem anderen Zeichen (oder auch von sich selbst) in einem Zeichenreihenexemplar vorkommen kann.

6.1 Syntaktik der Logik

Zur Syntaktik der Logik gehört die Wahl von Zeichen, welche als *Buchstaben* einer logischen Sprache dienen, und die Bestimmung, wie man diese Buchstaben zu gewissen Zeichenreihen zusammensetzt, welche als *Ausdrücken* der Sprache gelten. Außerdem gehört zur Syntaktik die Einteilung der Buchstaben und Ausdrücke in verschiedene Kategorien wie *Variablen*, *Konstanten*, *Formeln* und *Terme*.

Als **Variablen** sollen die unendlich vielen Zeichen $\mathtt{x}, \mathtt{x}\prime, \mathtt{x}\prime\prime$ usw. dienen.[7] Alle logischen Sprachen (die wir hier betrachten) haben also dieselben Variablen, aber sie können sich in ihrem Zeichenvorrat, den sie außer den Variablen noch haben, unterscheiden. Diese Nicht-Variablen heißen **Konstanten**. Konstanten teilen wir ein in *logische Konstanten* und *nichtlogische Konstanten*, und sowohl die logischen wie auch die nichtlogischen wieder in *Funktoren* und *Operatoren*:

	Konstanten	
Variablen	logische Funktoren	nichtlogische Funktoren
	logische Operatoren	nichtlogische Operatoren

Eine **logische Konstante** ist ein Zeichen, dessen Syntax und Semantik *sprachübergreifend* festgelegt wird, d. h. das Zeichen wird in jeder logischen Sprache, die es verwendet, in derselben Weise zu Ausdrücken zusammengestellt und gedeutet. Bei **nichtlogischen Konstanten** dagegen können Syntax und Bedeutung von Sprache zu Sprache variieren. Zur Bestimmung der Konstanten einer Sprache wählen wir zwei Klassen C_ℓ und C von Zeichen ohne gemeinsames Element, und bestimmen, dass C_ℓ die logischen Konstanten und C die nichtlogischen Konstanten der Sprache enthalten soll. Jedes in C_ℓ liegende Zeichen sollte entweder in der Logik bereits üblich sein oder mit einer neuen Bedeutung von grundsätzlicher logischer Relevanz versehen werden. Wir betrachten hier vor allem Sprachen, deren C_ℓ eine Teilklasse von $\{\top, \bot, \underline{\bot}, -, \neg, \wedge, |, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow, =, \in, \bigwedge, \bigvee, \dot{\bigvee}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}\}$ ist. Im Abschnitt 6.3 über Modallogik werden wir aber auch Sprachen betrachten, die noch weitere logische Konstanten enthalten, die wir „modallogische“ Konstanten nennen. Jede Konstante dient nun entweder als Funktor oder als Operator.

Ein **Funktor** ist eine Konstante, der man eine natürliche Zahl n als *Stellenzahl* zuordnet. Ein Funktor f mit Stellenzahl n heißt *n-stelliger Funktor*, und die Stellenzahl n zeigt an, dass dann und nur dann, wenn der Funktor mit genau n Ausdrücken $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der zu entwerfenden logischen Sprache zu einer Zeichenreihe $\ll \mathrm{f}\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \gg$ zusammengestellt wird, ein neuer Ausdruck dieser Sprache entstehen soll. Wir können demnach die Funktoren in 0-stellige, 1-stellige, 2-stellige usw. einteilen. Die 0-stelligen sind diejenigen, die schon allein für sich (also *ohne* dass sie mit anderen Zeichen zusammengestellt werden) ein Ausdruck der Sprache sind: Sie heißen auch **Namen**. Außer der Stellenzahl legen wir für Funktoren f noch eine *Kategorienzahl* fest, die 0 oder 1 sei, je nachdem ob die mit f zusammengestellten Ausdrücke $\ll \mathrm{f}\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \gg$ als *Formeln* oder als *Terme* gelten sollen, und je nachdem sprechen wir von einem *Formelfunktor* oder *Termfunktor*. Ist k die Kategorien– und n die Stellenzahl eines Funktors, so heißt $\langle\!\langle n, k \rangle\!\rangle$ seine *Signatur*.

Ein **Operator** ist eine Konstante, der man ein Zahlenpaar $\langle m, n \rangle$ zugeordnet, wobei m die *Stellenzahl der Variablen* und n die *Stellenzahl der Ausdrücke heißt*: Der Operator heißt dann *$\langle m, n \rangle$-stellig*. Bei einem $\langle m, n \rangle$-stelligen Operator o soll dann und nur dann, wenn o mit m (voneinander verschiedenen) Variablen $v_1, \ldots, v_m$ und mit n Ausdrücken $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zu einer Zeichenreihe $\ll \mathrm{o}\ v_1 \ldots v_m\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \gg$ zusammengestellt wird, ein Ausdruck entstehen (falls $m = 0$ ist, sprechen wir von einem *Modaloperator* und dann darf auch $n = 0$ sein; sonst ist stets $m \neq 0$ und $n \neq 0$). Jeder Operator erhält auch eine *Kategorienzahl* 0 oder 1, je nachdem, ob die mit ihm gebildeten

[7] Mit $\mathtt{x}\prime$ ist hier nicht die Zeichenreihe $\langle\!\langle \mathtt{x}, \prime \rangle\!\rangle$ $(= \langle {}^{\mathtt{x}}_{0}\ {}^{\prime}_{1} \rangle)$ gemeint (diese wäre kein einzelnes Zeichen), sondern das 1-Tupel, welches 0 auf $\langle\!\langle \langle {}^{\mathtt{x}}_{0}\ {}^{\prime}_{1} \rangle \rangle\!\rangle$ wirft, also das 1-Tupel $\langle \langle {}^{\mathtt{x}}_{0}\ {}^{\prime}_{1} \rangle_0 \rangle$. Entsprechend sind $\mathtt{x}\prime\prime$, $\mathtt{x}\prime\prime\prime$ usw. zu verstehen.

Ausdrücke stets *Formeln* oder *Terme* sein sollen; wir sprechen dann von einem *Formeloperator* bzw. *Termoperator*. Die Stellenzahlen m, n und die Kategorienzahl k des Operators fassen wir in dem 2-Tupel $\langle\langle m, n\rangle, k\rangle$ zusammen und nennen dieses Tupel seine *Signatur*.

So hat jede Konstante ihre Signatur, und an ihr lässt sich ablesen, ob sie ein Termfunktor, ein Formelfunktor, ein Termoperator oder ein Formeloperator ist und mit wie vielen Ausdrücken (und eventuell Variablen) sie zusammengesetzt werden muss, damit ein Ausdruck entsteht. Für die logischen Konstanten wird die Signatur sprachübergreifend festgelegt (wir geben sie für die von uns betrachteten logischen Konstanten unten an). Bei den nichtlogischen Konstanten kann sie von Sprache zu Sprache variieren. Wir müssen daher zur eindeutigen Festlegung der Sprache außer C_ℓ und C noch eine Funktion σ (die sog. *Signaturfunktion*) wählen, welche jeder Konstanten aus C ihre Signatur zuordnet. Eine **logische Sprache** $\mathfrak{L}$ können wir nun insgesamt mit einem Tupel $\ll C_\ell, C, \sigma\gg$ identifizieren, wobei die Klassen C_ℓ und C die logischen bzw. nichtlogischen Konstanten der Sprache enthalten und die Funktion σ jedem c aus C eine Signatur verleiht.

Die wichtigsten **logischen Funktoren** haben folgende Namen, Lesarten und Signaturen:

	Name	Lesart 1	Lesart 2	Signatur
$\top$	Verifikator	«das Verum»		$\langle 0, 0\rangle$
$\bot$	Falsifikator	«das Falsum»		$\langle 0, 0\rangle$
$\underline{\bot}$	Joker	«das Ersatzobjekt»		$\langle 0, 1\rangle$
$-$	Affirmator	«es gilt:»		$\langle 1, 0\rangle$
$\neg$	Negator	«es gilt nicht:»		$\langle 1, 0\rangle$
$\wedge$	Konjunktor,	«beides gilt:»	«und»	$\langle 2, 0\rangle$
$\mid$	Konjunktionsnegator	«nicht beides gilt:»	«schließt aus»	$\langle 2, 0\rangle$
$\vee$	inklusiver Disjunktor	«mindestens eines von beiden gilt:»	«oder auch»	$\langle 2, 0\rangle$
$\dot{\vee}$	exklusiver Disjunktor	«genau eines von beiden gilt:»	«oder aber»	$\langle 2, 0\rangle$
$\rightarrow$	Subjunktor	«wenn das Erste, so auch das Zweite:»	«nicht, wenn nicht auch»	$\langle 2, 0\rangle$
$\leftrightarrow$	Äquijunktor,	«denselben Wahrheitswert haben:»	«genau dann, wenn»	$\langle 2, 0\rangle$
$=$	Gleichheitszeichen	«es sind identisch:»	«ist identisch mit»	$\langle 2, 0\rangle$
$\in$	Elementzeichen	«das Erste ist Element des Zweiten:»	«ist Element von»	$\langle 2, 0\rangle$

Die Signaturangabe bedeutet nach dem oben Gesagten:

$\top, \bot$	sind 0-stellige Formelfunktoren,
$\underline{\bot}$	ist 0-stelliger Termfunktor,
$-, \neg$	sind 1-stellige Formelfunktoren,
$\wedge, \mid, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow, =, \in$	sind 2-stellige Formelfunktoren.

Um also einen Ausdruck zu erhalten, muss man die Zeichen $-$ und $\neg$ mit *einem* Ausdruck und die Zeichen $\wedge$, $\mid$, $\vee$, $\dot{\vee}$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$ und $\in$ mit *zwei* Ausdrücken α und β zusammenstellen. Dabei setzt man gewöhnlich α links und β rechts neben das Zeichen, während man in der sog. „polnischen" Schreibweise *beide* Ausdrücke rechts neben das Zeichen setzt. Z. B. schreibt man gewöhnlich «$\alpha = \beta$», nach polnischer Art aber «$= \alpha\beta$».[8] Unsere „offizielle" Syntax soll die polnische sein, praktisch verwenden wir aber meist die gewöhnliche. Die angegebene „Lesart 1" bezieht sich auf die polnische Notation und „Lesart 2" auf die gewöhnliche. Die obigen Funktoren werden (in der Semantik) die in der Lesart angedeutete Bedeutung bekommen:

- $\underline{\bot}$ soll den Joker, $\top$ den Wahrpunkt, $\bot$ den Falschpunkt repräsentieren.
- $-\alpha$ soll für geschlossene Ausdrücke α den Sachverhalt beschreiben, dass α wahr ist.[9]

[8] Dies hat den Vorteil, dass man bei komplizierten Ausdrücken ohne Klammern auskommt (siehe S. 113–114).

[9] $-\alpha$ ist also wahr, wenn α wahr ist, und falsch, wenn α entweder falsch oder gar keine Aussage ist.

- $\neg\alpha$ soll genau dann wahr sein, wenn $-\alpha$ falsch ist und falsch, wenn $-\alpha$ wahr ist.
- $\wedge\alpha\beta$ bzw. $\alpha \wedge \beta$ soll wahr sein, wenn α und β beide wahr sind; und sonst falsch.
- $\mid \alpha\beta$ bzw. $\alpha \mid \beta$ soll wahr sein, wenn α und β *nicht beides* wahr ist; und sonst falsch.
- $\vee\alpha\beta$ bzw. $\alpha \vee \beta$ soll wahr sein, wenn α oder β *oder beides* wahr ist; und sonst falsch.
- $\dot{\vee}\alpha\beta$ bzw. $\alpha \vee \beta$ soll wahr sein, wenn α oder β, *aber nicht beides* wahr ist; und sonst falsch.
- $\rightarrow \alpha\beta$ bzw. $\alpha \rightarrow \beta$ soll wahr sein, wenn immer dann, wenn α wahr ist, auch β wahr ist (präziser: wenn entweder α nicht wahr ist oder α und β beides wahr ist); und sonst falsch.
- $\leftrightarrow \alpha\beta$ bzw. $\alpha \leftrightarrow \beta$ soll wahr sein, wenn α und β entweder beides wahr ist, oder aber beides nicht wahr; und sonst falsch.
- $= \alpha\beta$ bzw. $\alpha = \beta$ soll wahr sein, wenn das durch α Bezeichnete mit dem durch β Bezeichneten identisch ist; und sonst falsch.
- $\in \alpha\beta$ bzw. $\alpha \in \beta$ soll schließlich wahr sein, wenn das durch α Bezeichnete ein Element des durch β Bezeichneten ist; und sonst falsch.

Nichtlogische Funktoren kann man in folgender Weise für alle ausgezeichneten Objekte, Klassen, Relationen, Funktionen und Operationen einführen, mit denen man arbeiten will:

- Für ein ausgezeichnetes Objekt `ob` kann man zunächst ein Zeichen a als direkte Bezeichnung einführen: Dies ist dann ein 0-stelliger Termfunktor.
- Ist `ob` eine Klasse, kann man auch ein Zeichen c als 1-stelligen Formelfunktor einführen, wobei ≪c α≫ genau dann wahr sein soll, wenn das durch α bezeichnete Objekt in `ob` liegt.
- Ist `ob` eine Relation, kann man auch einen 2-stelligen Formelfunktor R einführen, wobei ≪R α β≫ bzw. ≪α R β≫ genau dann wahr sein soll, wenn die Relation `ob` das mit α bezeichnete Objekt auf das mit β bezeichnete Objekt ausrichtet.
- Ist `ob` eine verallgemeinerte Funktion, kann man einen 1-stelligen Termfunktor f einführen, wobei ≪f α≫ bzw. ≪f(α)≫ das Objekt bezeichnen soll, auf welches `ob` das mit α bezeichnete Objekt wirft.
- Ist `ob` eine Operation, kann man einen 2-stelligen Termfunktor $*$ einführen, wobei ≪$*$ α β≫ bzw. ≪$\alpha * \beta$≫ das Objekt bezeichnen soll, auf welches `ob` das Paar $\langle\alpha, \beta\rangle$ wirft.

Zu bemerken ist, dass wenn ein Objekt `ob` zugleich Klasse, Funktion, Relation usw. ist, man für jede dieser „Rollen“, die `ob` spielen kann, eine je eigene Bezeichnung einführen muss.

Die wichtigsten **logischen Operatoren** haben folgende Namen und Lesarten:

	Name	Lesart[10]	Signatur
$\bigwedge$	Allquantor	„für jedes (oder: für alle) ... gilt:“	$\langle\langle 1, 1\rangle, 0\rangle$
$\bigvee$	einfacher Existenzquantor	„es gibt ein ..., so dass gilt:“	$\langle\langle 1, 1\rangle, 0\rangle$
$\dot{\bigvee}$	exakter Existenzquantor	„es gibt genau ein ..., so dass gilt:“	$\langle\langle 1, 1\rangle, 0\rangle$
$\imath$	Desktriptor	„dasjenige ..., für das gilt:“	$\langle\langle 1, 1\rangle, 1\rangle$
ε	Selektor	„ein bzw. das ausgewählte ..., für das gilt:“	$\langle\langle 1, 1\rangle, 1\rangle$
$\boldsymbol{\kappa}$	Abstraktor	„Klasse aller ..., für die gilt:“	$\langle\langle 1, 1\rangle, 1\rangle$

Diese Operatoren sind $\langle 1,1\rangle$-stellig, d. h. wenn v Variable und α Ausdruck und o einer dieser Operatoren ist, ist «o v α» ein Ausdruck. Die drei Quantoren sind Formeloperatoren und die übrigen drei Operatoren Termoperatoren. Die logischen Operatoren werden (in der Semantik) die in der Lesart angedeutete Bedeutung bekommen:

- $\bigwedge$ v α bzw. $\bigvee$ v α bzw. $\dot{\bigvee}$ v α soll für die Aussage stehen, dass für jedes bzw. für mindestens ein bzw. für genau ein Objekt `ob` des Objektbereichs von v der Ausdruck α in eine wahre Aussage übergeht, sobald man v als Bezeichnung für `ob` interpretiert.

- $\boldsymbol{\imath}$ v α soll im Fall, dass es *genau ein* Objekt `ob` des Objektbereichs von v gibt, für welches α in eine wahre Aussage übergeht, sobald man v als Bezeichnung für `ob` interpretiert, eine Bezeichnung für dieses Objekt sein – und andernfalls den Joker bezeichnen.

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ v α soll im Fall, dass es *mindestens ein* Objekt `ob` des Objektbereichs von v gibt, für welches α in eine wahre Aussage übergeht, sobald man v als Bezeichnung für `ob` interpretiert, ein solches Objekt bezeichnen – und andernfalls den Joker bezeichnen.

- $\boldsymbol{\kappa}$ v α soll die Klasse aller Individuen `ob` des Objektbereichs von v bezeichnen, für welche α in eine wahre Aussage übergeht, sobald man v als Bezeichnung für `ob` interpretiert: Dies ist also die Klasse, die in der Mathematik gewöhnlich mit «$\{v \mid \alpha\}$» bezeichnet wird.

Nichtlogische Operatoren werden meist durch Definitionen eingeführt. Ein $\langle 1,1\rangle$-stelliger Termoperator wäre zum Beispiel der Funktionsoperator $\boldsymbol{\lambda}$, für den «$\boldsymbol{\lambda}$ v α» die Bedeutung «die verallgemeinerte Funktion, die jedes v aus $\mathbb{D}$ auf α wirft» hat.[11] Wir haben einen allgemeineren Funktionsoperator $\boldsymbol{\Lambda}$ verwendet, der $\langle 1,2\rangle$-stellig ist und für den «$\boldsymbol{\Lambda}$ v τ_1 τ_2» als Denotat «die verallgemeinerte Funktion, die jedes v mit $v \in \tau_1$ auf τ_2 wirft» bekommt; hierfür haben wir $\langle v \in \tau_1 \mapsto \tau_2\rangle$ geschrieben. Als $\langle 1,2\rangle$-stellige Termoperatoren haben wir auch $\bigcup, \bigcap, \times$ verwendet (in Termen wie $\bigcup_{v\in\tau_1} \tau_2$).[12]

Für eine Sprache $\mathfrak{L} = \langle\!\langle C_\ell, C, \sigma\rangle\!\rangle$ ist nun festzulegen, welche Zeichenreihen die *Ausdrücke* von $\mathfrak{L}$ sind. Hierzu benutzen wir das Hilfsmittel einer **Ausdrucksableitung** (von $\mathfrak{L}$). Darunter verstehen wir einen nichtleeren Zeichenreihenstapel, so dass für jede seiner Zeilen Z eine der folgenden drei Möglichkeiten zutrifft:

(1) Z ist eine Variable oder ein Name.

(2) Z hat die Form «c $\alpha_1 \ldots \alpha_n$», wobei c ein k-stelliger Funktor mit $k \geq 1$ ist und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Zeichenreihen sind, die in dem Stapel oberhalb von Z vorkommen.

---

[10] Für «...» ist hier die jeweils dem Operator nachfolgende Variable zu setzen.

[11] Dies entspricht in etwa dem gleichnamigen Lambda-Operator von Church (siehe Fußnote 344 auf S. 141), wobei der Unterschied darin besteht, dass der Operator von Church die *gewöhnliche* Funktion beschreibt, die jedes x aus einem maximalen Definitionsbereich (der kleiner als $\mathbb{D}$ sein kann) auf α wirft.

[12] In der Mathematik verwendet man außerdem oft einen verallgemeinerten $\langle 1,2\rangle$-stelligen Klassenabstraktor K, für den «$\mathbf{K}$ v τ φ» die Bedeutung «die Klasse, deren Elemente die durch τ bezeichnete Individuen sind, wenn v die Elemente von $\{v \mid \varphi\}$ durchläuft» hat. Hierfür schreibt man gewöhnlich $\{\tau \mid \varphi\}$, wobei man wissen muss, welches die „Laufvariable“ v sein soll: Meist benutzt man $\{\tau \mid \varphi\}$ nur, wenn in τ *genau eine* Variable v frei vorkommt (siehe 6.1.2), welche dann als Laufvariable dient. Man kommt aber auch ohne diesen Operator aus, wenn man statt dessen einen Funktionsoperator verwendet; so konnten wir im mengentheoretischen Teil auf die Bezeichnung $\{\tau \mid \varphi\}$ (für Nichtvariablen τ) verzichten. Als Operator mit mehreren Variablenstellen könnte man etwa den $\langle 2,3\rangle$-stelligen Operator $\boldsymbol{\Lambda_2}$ benutzen, für den «$\boldsymbol{\Lambda_2}$ v w τ_1 τ_2 τ_3» die Bedeutung «die verallgemeinerte Operation, die jedes Paar $\langle v, w\rangle$ mit v aus τ_1 und w aus τ_2 auf τ_3 wirft» bekommt. In der Arithmetik führt man oft den $\langle 1,3\rangle$-stelligen Summenoperator $\sum$ ein: «$\sum$ v τ_1 τ_2 τ_3» bedeutet «Summe aller Terme τ_3, wenn v von τ_1 bis τ_2 läuft», wofür man gewöhnlich $\sum_{v=\tau_1}^{\tau_2} \tau_3$ schreibt.

(3) Z hat die Form «o $v_1 \dots v_m$ $\alpha_1 \dots \alpha_n$», wobei o ein $\langle m, n\rangle$-stelliger Operator ist, $v_1, \dots, v_m$ verschiedene Variablen sind, und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ Zeichenreihen sind, die in dem Stapel oberhalb von Z vorkommen.

Man kann (1) bis (3) als *Regeln* betrachten, wie man eine Ausdrucksableitung zeilenweise aufschreiben kann. Da für die oberste Zeile nur (1) angewendet werden kann, muss man als oberste Zeile einen Namen oder eine Variable hinschreiben; in jedem folgenden Schritt kann man dies ebenfalls tun, aber auch gemäß (2) oder (3) eine Zeichenreihe mit Funktoren oder Operatoren folgen lassen.

6.1.1 Erklärung Ein *Ausdruck* der Sprache $\mathfrak{L}$ ist eine Zeichenreihe, die als unterste Zeile in einer Ausdrucksableitung der Sprache $\mathfrak{L}$ vorkommt. Ist das Anfangszeichen eines Ausdrucks ein Funktor bzw. Operator, sprechen wir von einem *Funktorausdruck* bzw. *Operatorausdruck*. Ist das Anfangszeichen ein Formelfunktor oder Formeloperator, sprechen wir von einer *Formel*. Andernfalls ist das erste Zeichen ein Termfunktor oder Termoperator oder der ganze Ausdruck ist eine Variable, und wir sprechen von einem *Term*.

Eine Ausdrucksableitung $\mathfrak{A}$ nennen wir nun eine *Ableitung des Ausdrucks* α, wenn α die unterste Zeile von $\mathfrak{A}$ ist, und wir nennen α den *von* $\mathfrak{A}$ *abgeleiteten Ausdruck*. Beispielsweise ist

$$\begin{array}{l} \mathtt{x} \\ = \mathtt{x}\ \mathtt{x} \\ \bigwedge\ \mathtt{x}\ = \mathtt{x}\ \mathtt{x} \end{array}$$

eine Ausdrucksableitung. Daher ist der hier abgeleitete Ausdruck $\bigwedge \mathtt{x} = \mathtt{x}\ \mathtt{x}$ ein Ausdruck unserer Sprache, und zwar eine Formel, da $\bigwedge$ ein Formeloperator ist.[13]

Unter der *Länge* eines Ausdrucks versteht man die Anzahl der in ihm vorkommenden Zeichen, ausgenommen die Variablen und Namen (die demnach Ausdrücke der Länge 0 sind). Ausdrücke X der Länge n mit $n \geq 1$ haben nun entweder die Form c $\alpha_1 \dots \alpha_n$, wobei c ein Funktor mit Stellenzahl ≥ 1 ist, oder die Form o $v_1 \dots v_m$ $\alpha_1 \dots \alpha_n$, wobei o ein Operator ist. Wir nennen in beiden Fällen die Teilzeichenreihen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die *unmittelbaren Teilausdrücke* des Ausdrucks.

Als Vorbereitung zur Semantik der Variablen ist noch die Unterscheidung zwischen den «freien» und den «gebundenen» Variablenexemplaren in einer Zeichenreihe wichtig:

6.1.2 Erklärung Ein *Variablenexemplar* $\langle {}^{v}_{\ell} \rangle$, das in einem Ausdruck β steht, heißt in diesem Ausdruck entweder *gebunden* oder *frei*. Und zwar heißt $\langle {}^{v}_{\ell} \rangle$ in β *gebunden* genau dann, wenn

$\langle {}^{v}_{\ell} \rangle$ in einem Teilstück $\langle {}^{\circ}_{k}\ {}^{v}_{k+1} \cdots {}^{v}_{k+m}\ {}^{\alpha_1}_{k+m+1} \cdots {}^{\alpha_n}_{k+m+n} \rangle$ von β steht,

und dieses Teilstück ein Exemplar eines Operatorausdrucks ist,[14] und sonst heißt $\langle {}^{v}_{\ell} \rangle$ in β frei. Von einer *Variablen* sagen wir, dass sie in α frei bzw. gebunden vorkommt, wenn in α mindestens ein *Exemplar* der Variablen steht, das dort frei oder gebunden ist.

---

[13] Nach den angegebenen Lesarten wird dieser Ausdruck gelesen: «Für jedes x gilt: Beides ist identisch: x x», was (gemäß der noch zu behandelnden Semantik) eine wahre Aussage ist, die den Sachverhalt beschreibt, dass jedes Objekt mit sich selbst identisch ist.

[14] Ein in β gebundenes Variablenexemplar $\langle {}^{v}_{\ell} \rangle$ kann natürlich gleichzeitig in *mehreren* derartigen Teilstücken von β stehen. Der Anfang dieser Teilstücke ist dann jeweils ein Operatorexemplar, und unter diesen Operatorexemplaren muss für genau ein Exemplar $\langle {}^{\circ}_{k} \rangle$ die Differenz $\ell - k$ minimal sein: Dieses Operatorexemplar steht also anschaulich gesprochen dem Variablenexemplar $\langle {}^{v}_{\ell} \rangle$ „innerhalb von β am nächsten". Es heißt dann $\langle {}^{v}_{\ell} \rangle$ in β *durch den Operator* $\langle {}^{\circ}_{0} \rangle$ oder genauer *durch das Operatorexemplar* $\langle {}^{\circ}_{k} \rangle$ *gebunden*. Damit soll ausgedrückt werden, dass sich $\langle {}^{v}_{\ell} \rangle$ in β auf $\langle {}^{\circ}_{k} \rangle$ zurückbezieht. Ist ein *Exemplar* einer Variablen v durch einen Operator o gebunden, so sagen wir auch, dass die *Variable* v *selbst* in α durch o gebunden ist.

Ein *nach Interpretation der Variablen $x, y \ldots$ geschlossener Ausdruck* ist ein solcher, in dem keine Variable frei vorkommt, die von den angeführten Variablen $(x, y \ldots)$ verschieden ist. Schlechthin *geschlossen* heißen die Ausdrücke, in denen überhaupt keine Variable frei vorkommt, und die übrigen Ausdrücke heißen *offen*. Formeln ohne freie Variablen heißen *Aussagen*, Formeln mit freien Variablen heißen *Aussageformen*. Terme ohne freie Variablen heißen *Kennzeichnungen*, Terme mit freien Variablen heißen *Kennzeichnungsformen*. Unsere Einteilung der Ausdrücke ist also insgesamt folgende:

	geschlossen		
Formeln	Aussagen	Kennzeichnungen	Terme
	Aussageformen	Kennzeichnungsformen	
	offen		

Wir können nun rein syntaktisch die klassischen Formen der Logik unterscheiden:

Die *Aussagelogik*	verwendet keine Operatoren.
Die *Prädikatenlogik*	verwendet von den Operatoren nur die Quantoren.
Die *Kennzeichnungslogik*	verwendet außerdem den Deskriptor und eventuell den Selektor.
Die *Klassenlogik*	verwendet außerdem den Abstraktor.

Philosophisch interessant ist besonders die *Modallogik*, welche außerdem die sog. *Modaloperatoren*

$\Box$ («Es ist notwendig, dass:») und $\Diamond$ («Es ist möglich, dass:»)

verwendet (siehe hierzu Abschnitt 6.3).

Man unterscheidet schließlich **logische Sprachen erster und höherer Stufe**. Die hier dargestellte Syntax ist die einer sog. *Sprache der ersten Stufe*, und ihre Variablen und Funktoren heißen auch *Variablen erster Stufe* bzw. *Funktoren erster Stufe*. Bei *Sprachen der zweiten Stufe* kommen zu den Variablen erster Stufe sog. *Variablen zweiter Stufe* hinzu, das sind Variablen `X`, welche für n-stellige ($n \geq 1$) Funktoren erster Stufe stehen können; außerdem dürfen zu den gewöhnlichen Funktoren neuartige *Funktoren zweiter Stufe* hinzukommen, die sich mit Funktoren der ersten Stufe zu Ausdrücken zusammenstellen lassen. In Sprachen der dritten Stufe kommen *Variablen dritter Stufe* hinzu, die für Funktoren der zweiter Stufe stehen; außerdem eventuell *Funktoren dritter Stufe*, die sich mit Funktoren der zweiten Stufe zu Ausdrücken zusammenstellen lassen usw. ad infinitum. So eröffnet sich uns hier eine *sprachlogische Unendlichkeitsdimension*.[15] Da aber bereits Sprachen der ersten Stufe für die Mengenlehre und fast alle mathematischen Zwecke ausreichen, gehe ich auf höherstufige Sprachen hier nicht weiter ein.

[15] Manchmal sagt man, dass nur in Sprachen höherer Stufen Variablen für Klassen stehen können, aber dies können Variablen auch schon in Sprachen der ersten Stufe, solange sie syntaktisch nicht als Funktoren verwendet werden. Denn die Kollektion $\mathcal{O}$ der Objekte des „Grundbereichs“, über den eine Sprache der ersten Stufe redet, *ist ganz beliebig*, und es spricht nichts dagegen, als $\mathcal{O}$ die Kollektion aller Objekte überhaupt zu nehmen.

6.2 Semantik der Logik

Aufgabe der *Semantik* ist es, jedem Ausdruck eine präzise Bedeutung zu geben. Dazu ist vor allem ein Objekt festzulegen, auf das sich der Ausdruck „beziehen“ soll. Dieses Objekt heißt das *Denotat* des Ausdrucks. Zweitens sollte auch die Weise festgelegt werden, *wie* sich ein Ausdruck auf sein Objekt bezieht. Ist das Denotat eine Person, kann man sich z. B. auf diese beziehen, indem man sie „erwähnt“, aber auch indem man sie „ruft“. Ist das Denotat ein Sachverhalt, gibt es ebenfalls verschiedene Möglichkeiten, wie man sich auf diesen beziehen kann: so kann man

(1) ihn bloß *erwähnen*, ohne auf sein Bestehen oder Nichtbestehen hinzuweisen,

(2) ihn *aussagen*, d. h. auf sein Bestehen hinweisen, und zwar entweder (2a) auf die Tatsächlichkeit oder (2b) die Möglichkeit oder (2c) die Notwendigkeit seines Bestehens,

(3) sein (tatsächliches, mögliches oder notwendiges) Bestehen *behaupten*,

(4) sein (tatsächliches, mögliches oder notwendiges) Bestehen *in Frage stellen*,

(5) den *Glauben* einer Person an sein (tatsächliches, mögliches oder notwendiges) Bestehen ausdrücken,

(6) den *Wunsch* seines Eintretens anzeigen,

(7) den *Befehl* auszudrücken, ihn herbeizuführen,

(8) oder sein Zustandekommen *bewirken*.[16]

Die Weise, wie sich ein Ausdruck auf sein Denotat bezieht, heißt seine *Intension*. Die klassische Logik hat sich auf Ausdrücke ganz bestimmter Intension beschränkt: nämlich Ausdrücke mit der Intension des bloßen *Erwähnens* (diese Funktion übernehmen die Terme) und solche mit der Intension des *Aussagens* (diese Funktion übernehmen die Formeln). In der metasprachlichen Praxis (siehe Pragmatik) kam noch eine weitere Intension hinzu: die des *Behauptens* der Wahrheit von Ausdrücken. Logiken mit Ausdrücken, die ganz andere Intensionen haben (etwa die des *Ausrufens*, *Fragens*, *Befehlens* usw.) wurden als logisch irrelevant beiseitegelegt, was sich erst in neuester Zeit zu ändern beginnt. Auf die Versuche zum Aufbau einer sog. *intensionalen* Logik (epistemische Logik, dynamische Logik usw.) soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden.[17]

Eine radikale Vereinfachung wurde durch Frege eingeführt: Die Semantik verleiht bei Frege den Ausdrücken gar keine Intension mehr, sondern lediglich ein Denotat, so dass hier alle Ausdrücke gleich behandelt werden. Diese Logik heißt daher *Ausdruckslogik*, und in ihr allein ist das Prinzip der *reinen Extensionalität* (d. h. der Nichtbeachtung von Intensionen) vollständig verwirklicht. Als Formeln gelten hier die Ausdrücke, deren Denotat ein Wahrheitswert (oder Wahrheitswert-Repräsentant) ist. Doch bleibt dann die Frage, was eine solche Formel eigentlich aussagt: Es gibt nur zwei verschiedene Denotate für Formeln, also im Wesentlichen nur zwei Formeln. Diese unbefriedigende Situation wollte Frege dadurch beheben, dass er zwischen *Sinn* und *Bedeutung* unterschied:[18] Formeln mit *derselben Bedeutung* – die also dasselbe Denotat haben – sollen dennoch einen *verschiedenen Sinn* haben können. Es ist aber eine Schwäche der Fregeschen Philosophie, diesen Sinn

[16] Ich meine hier die von John Langshaw Austin in *How to do things with words* untersuchten sog. „performativen“ Sätze, die bewirken, was sie besagen, etwa: „ich nehme dich zur Frau“, „ich erhebe Einspruch“ usw.

[17] Vgl. hierzu z. B. Friedrichsdorf, *klassische und intensionale Logik*. Siehe auch Fußnote 19.

[18] Vgl. Frege, *Sinn und Bedeutung*.

nicht exakt definiert zu haben. Ich übernehme nun die Ausdruckslogik mit ihren Vorteilen,[19] und löse *die Frage nach dem Sinn* einer Formel (bzw. eines Ausdrucks) durch die folgende Erklärung:

6.2.1 Erklärung Der *Sinn* einer Formel (allgemeiner eines Ausdrucks) α ist der Sachverhalt, *dass als Denotat von α der Wahrpunkt-Repräsentant festgelegt wurde.* Dieser Sachverhalt ist natürlich genau dann wahr, wenn α tatsächlich den Wahrpunkt-Repräsentanten als Denotat hat.

So hat nun jeder Ausdruck einen Sachverhalt als „Sinn", und wir können ihn *je nach Kontext* zur Objektbezeichnung oder Sachverhaltsbeschreibung einsetzen.[20] Der Sachverhalt, den ein Ausdruck gemäß Erklärung 6.2.1 beschreibt, bezieht sich allerdings auf eine Festlegung des Logikers. Wird damit die Logik nicht zu einem sich selbst genügenden Spiel degradiert, in dem man, statt über die tatsächlichen Verhältnisse in der Welt zu reden, nur über die Akte des Logikers reflektiert? Nicht unbedingt: Es kommt darauf an, *wie* die Regeln zur Festsetzung des Denotats eines Ausdrucks getroffen werden. Man sollte sie so treffen, dass eine Formel dann und nur den „Wahrpunkt-Repräsentanten" als Denotat bekommt, wenn ein gewisser uns interessierender Sachverhalt S wahr ist. Dann kann man S als den eigentlichen hinter der Formel stehenden „Sinn" betrachten, für welchen der „Sinn" gemäß Erklärung 6.2.1 nur ein logisches Surrogat darstellt.

Nach diesen Vorüberlegungen müssen wir nun also jedem Ausdruck α ein Denotat zu verleihen. Wir legen das Denotat *relativ* zu einem gewissen interpretativen Hintergrund fest, so dass ein Ausdruck bezüglich verschiedener Hintergründe verschiedene Denotate haben kann. Das ist auch in der Alltagssprache so, wo der jeweilige interpretative Hintergrund sich durch den Zusammenhang erschließt.[21] Die interpretativen Hintergründe für logische Ausdrücke heißen *Bewertungsbasen* oder kurz *Basen.* Die Wahl einer Bewertungsbasis (für die Ausdrücke einer fest gewählten logischen Sprache $\mathcal{L}$) teilen wir ein in die Wahl eines *Grundbereichs*, einer *Struktur* und einer *Variablenbelegung*, wobei der Grundbereich durch die Struktur zu einem *semantischen Modell* erweitert wird, und dieses durch die Wahl einer *Variablenbelegung* zu einer *Bewertungsbasis.*[22]

Grundbereiche. Ein Grundbereich $\mathcal{G}$ ist ein 3-Tupel $\langle\!\langle \mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{E} \rangle\!\rangle$, wobei $\mathcal{O}$ eine Objektkollektion, $\mathcal{C}$ eine Teilkollektion von $\mathcal{O}$ (die also eine Auswahl von Objekten aus $\mathcal{O}$ enthält) und $\mathcal{E}$ eine (konzeptionelle oder kombinatorische) Relation in $\mathcal{O}$ ist. $\mathcal{O}$ heißt die *Objektkollektion* $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ von $\mathcal{G}$ und ihre Elemente hießen *$\mathcal{G}$-Objekte*, $\mathcal{C}$ heißt die *Klassenkollektion* $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ von $\mathcal{G}$ und ihre Elemente heißen $\mathcal{G}$-Klassen, und $\mathcal{E}$ heißt die *Elementrelation* $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ von $\mathcal{G}$. Gilt $X\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}}\ Y$, so heißt X ein *$\mathcal{G}$-Element* von y, und die zum Vorbereich von $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ gehörenden $\mathcal{G}$-Objekte heißen *$\mathcal{G}$-Individuen.* Drei Besonderheiten sind noch für verschiedene Sprachen zu beachten:

---

[19] Das ist zum einen der vollkommen liberale Gebrauch der Syntaxregeln (so können etwa in einer Formel wie $\langle\!\langle \wedge\ \alpha\ \beta \rangle\!\rangle$ für α und β in der klassischen Logik nur Formeln, hier aber beliebige Ausdrücke eingesetzt werden). Zum anderen hat man eine einfache Substitutionsregel: Die Bedeutung eines Ausdrucks ändert sich nicht, wenn man in ihm einen Teilausdruck durch einen äquivalenten ersetzt (und dabei die „Variablenkollision" vermeidet; siehe S. 375 mit Fußnote 46). Das muss übrigens in einer intensionalen Logik nicht immer richtig sein: Wenn Formeln α und β denselben Wahrheitswert haben, kann z. B. der intensionale Satz: ≪die Person P glaubt, dass α gilt≫ wahr sein, während ≪die Person P glaubt, dass β gilt≫ falsch sein kann, denn die Person P braucht ja nicht zu wissen, dass beide Ausdrücke denselben Wahrheitswert haben.

[20] Trotzdem ist jeder Ausdruck gemäß Definition 6.1.1 syntaktisch als Formel oder Term erkennbar, und je nach dem soll er normalerweise als Objektbezeichnung oder Sachverhaltsbeschreibung verwendet werden. Diese standardmäßige Festlegung kann aber durch den Kontext geändert werden; vgl. hierzu auch S. 106.

[21] Z. B. kann der Term ≪die Erde≫ je nach Zusammenhang unseren Planeten oder den Erdboden bezeichnen, und die Aussage ≪Logik ist einfach≫ kann je nachdem, was der Sprecher unter ≪Logik≫ und ≪einfach≫ versteht, verschiedene Wahrheitswerte haben.

[22] Es gibt keine ganz „kanonische" Semantik: Jeder Logiker hat eine eigene Art, sie genau zu erklären. Die hier dargestellte ist inspiriert von der klassenlogischen Semantik bei Oberschelp, *Logik für Philosophen* und Glubrecht et al., *Klassenlogik*, weicht von dieser aber dadurch ab, dass die Elementrelation des Grundbereichs (dort „Rahmen" genannt) stärker festgelegt ist.

1. Hat die Sprache den Funktor $\in$ nicht, so sind die Klassenkollektion und die Elementrelation überflüssig; man kann dann für $\mathcal{C}$ und $\mathcal{E}$ die leere Klasse nehmen oder $\mathcal{G}$ schlicht mit $\mathcal{O}_\mathcal{G}$ gleichsetzen.
2. Hat die Sprache Operatoren, soll $\mathcal{O}_\mathcal{G}$ der Objektbereich der Variablen und daher nicht leer sein.
3. Hat die Sprache schließlich den Funktor $\in$, sollen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{E}_\mathcal{G}$ noch folgende Eigenschaften aufweisen:

(G1) Zu jeder Auswahl von $\mathcal{G}$-Individuum gibt es genau eine $\mathcal{G}$-Klasse C, deren $\mathcal{E}_\mathcal{G}$-Elemente die ausgewählten $\mathcal{G}$-Individuen sind. Dieses C nennen wir daher «die» *$\mathcal{G}$-Klasse* mit diesen ausgewählten $\mathcal{G}$-Individuen als $\mathcal{G}$-Elementen.[23] Die $\mathcal{G}$-Klasse ohne $\mathcal{G}$-Elemente heißt leere $\mathcal{G}$-Klasse.[24]

(G2) Die leere $\mathcal{G}$-Klasse heißt der *$\mathcal{G}$-Falschpunkt* und ist ein $\mathcal{G}$-Individuum. Die $\mathcal{G}$-Klasse mit dem *$\mathcal{G}$-Falschpunkt* als einzigem $\mathcal{G}$-Element heißt der *$\mathcal{G}$-Wahrpunkt* und ist ebenfalls ein $\mathcal{G}$-Individuum. Diese beiden $\mathcal{G}$-Individuen heißen die *$\mathcal{G}$-Wahrheitswerte* und sollen Repräsentanten für den Wahrpunkt und Falschpunkt des logischen Universum sein (siehe Abschnitt 4.4.3).

(G3) Die $\mathcal{G}$-Klasse, deren Elemente alle $\mathcal{G}$-Individuen sind, ist *kein* $\mathcal{G}$-Individuum, heißt der *$\mathcal{G}$-Joker* und soll als Ersatzobjekt zur Vermeidung undefinierter Ausdrücke dienen (siehe S. 88).

(G4) Alle $\mathcal{G}$-Objekte, die keine $\mathcal{G}$-Individuen sind, und auch alle, die im Nachbereich von $\mathcal{E}$ liegen (also mindestens ein $\mathcal{G}$-Element haben), sind $\mathcal{G}$-Klassen.

So haben wir für die fundamentalsten Begriffe der Klassenlogik, nämlich «Objekt», «Individuum», «Element», «Klasse», «Wahrpunkt», «Falschpunkt» und «Joker» formale Surrogate gebildet, und zwar so, dass das Rahmen–, das Extensionalitäts–, das Komprehensions–, das Nullmengen– und das Auswahlaxiom gilt.[25]

Eine naheliegende Wahl eines derartigen Grundbereichs $\mathcal{G}$ ist die folgende. Ausgehend von einer *Grundklasse* im Sinn von Erklärung 5.8.7 S. 110: also einer $\in$-transitive Klassen, die 0 und 1 enthält, wählen wir als Objektkollektion $\mathcal{O}$ die Kollektion der Elemente und Teilklassen von $\mathbb{G}$, als Klassenkollektion $\mathcal{C}$ die Kollektion der Teilklassen von $\mathbb{G}$ und als Elementrelation $\mathcal{E}$ die natürliche Elementrelation zwischen den Objekten von $\mathcal{O}$, so dass $X\ \mathcal{E}_\mathcal{G}\ Y$ stets $X \in Y$ bedeutet. Dann ist $\mathcal{G} := \langle\!\langle \mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{E} \rangle\!\rangle$ ein Grundbereich für eine klassenlogische Sprache: Die Forderungen (G1) bis (G4) sind dann automatisch erfüllt, und zwar erhalten wir als $\mathcal{G}$-Individuen die Elemente von $\mathcal{G}$, als $\mathcal{G}$-Falschpunkt 0, als $\mathcal{G}$-Wahrpunkt 1 und als $\mathcal{G}$-Joker $\mathbb{G}$. Dieses $\mathcal{G}$ kann man den *durch die Grundklasse* $\mathbb{G}$ *induzierten Grundbereich* nennen. Einen solchen Grundbereich $\mathcal{G}$ nenne ich einen **realistischen Grundbereich** und alle übrigen **formalistischer Grundbereiche**. Zu diesen gehören insbesondere alle Grundbereiche, bei denen die Elementrelation $\mathcal{E}$ nichts mit der „ echten“ Elementrelation $\in$ zu tun hat, also z. B. Grundbereiche, deren Objektbereich $\mathcal{O}$ nur Urelemente enthält.

Für die weitere Beschreibung der Semantik benötigen wir neben der Objektkollektion $\mathcal{O}_\mathcal{G}$ auch die „Kollektion der $\mathcal{G}$-Wahrheitswerte“, welche genau diese beiden $\mathcal{G}$-Wahrheitswerte enthält: diese nennen wir $\mathcal{W}_\mathcal{G}$.[26]

---

[23] Diese $\mathcal{G}$-Klasse muss nicht die gewöhnliche Klasse sein, die diese $\mathcal{C}$ Individuen enthält (falls es sie gibt).

[24] Die nichtleeren $\mathcal{C}$-Klassen sind nach Forderung (G1) bereits durch die Elementrelation $\mathcal{E}$ festgelegt: Sie bilden den Nachbereich der Relation $\mathcal{E}$. Nur die Wahl der leeren $\mathcal{C}$-Klasse bleibt also offen, so dass wir einen Grundbereich auch hätten als 3-Tupel $\langle\!\langle \mathcal{O}, \mathcal{L}, \mathcal{E} \rangle\!\rangle$ definieren könnten, in dem die $\mathcal{L}$ die leere $\mathcal{G}$-Klasse sein soll.

[25] In einer Sprache, die den Selektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ benutzt, könnte man als weitere Komponente des Grundbereichs noch eine (kombinatorische oder konzeptionelle) „Auswahlfunktion“ $\mathcal{A}_\mathcal{G}$ wählen, die jede nichtleere Auswahl von $\mathcal{G}$-Objekten auf je eines der ausgewählten Objekte wirft. Doch dürfte eine solche Funktion für den Fall, dass $\mathcal{O}_\mathcal{G}$ die Kollektion aller Objekte überhaupt ist (den wir natürlich nicht ausschließen wollen), nicht als theoriefähiges Objekt existieren (siehe S. 155–156 mit Fußnote 383 auf S. 156). Wir umgehen dieses Problem, indem wir voraussetzen, dass für jede Auswahl von Objekten (also erst recht von $\mathcal{G}$-Objekten) bereits ein ausgewähltes Objekt existiert (siehe S. 155–156), und bei der Interpretation der $\boldsymbol{\varepsilon}$-Ausdrücke auf diese Voraussetzung zurückgreifen.

[26] Diese ist wie $\mathcal{O}_\mathcal{G}$ eine Kollektion im absoluten Sinn, sie muss also nicht mit der $\mathcal{G}$-Klasse übereinstimmen, deren $\mathcal{G}$-Elemente die beiden $\mathcal{G}$-Wahrheitswerte sind.

Strukturen, Modelle und Denotate für Konstanten. Haben wir einen Grundbereich $\mathcal{G}$ gewählt, soll mit Bezug auf $\mathcal{G}$ jeder Konstanten c unserer Sprache ein Objekt als Denotat zugeordnet werden. Zu beachten ist allerdings, dass alleinstehende n-stellige Konstanten für $n \geq 1$ *nicht* zu den Ausdrücken unserer Sprache gehören, so dass wir sie in der Praxis *nicht* als Bezeichnung für diese Denotate verwenden.[27] Die Denotate dieser Konstanten dienen uns statt dessen nur als *Hilfsmittel*, um damit später den mit c gebildeten *Ausdrücken* ein Denotat zuzuweisen. Das Denotat einer Konstanten c bezüglich eines Grundbereichs $\mathcal{G}$ soll nun stets ein Objekt der folgenden Art sein.[28]

(D1) Falls c ein 0-stelliger Formelfunktor ist, soll das Denotat von c ein $\mathcal{G}$-Wahrheitswert sein,

(D2) falls c ein 0-stellige Termfunktor ist: ein $\mathcal{G}$-Objekt,

(D3) falls c ein n-stelliger Formelfunktor (mit $n \geq 1$) ist: eine Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^n$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$,

(D4) falls c ein n-stelliger Termfunktor (mit $n \geq 1$) ist: eine Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^n$ in $\mathcal{O}_\mathcal{G}$,

(D5) falls c ein $\langle m, n\rangle$-stelliger Formeloperator ist: eine Funktion von $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_\mathcal{G}}^m, \mathcal{O}_\mathcal{G}))^n$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$.

(D6) falls c ein $\langle m, n\rangle$-stelliger Termoperator ist: eine Funktion von $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_\mathcal{G}}^m, \mathcal{O}_\mathcal{G}))^n$ in $\mathcal{O}_\mathcal{G}$.

In (D5) und (D6) ist $m \neq 0 \neq 0$, was in der hier betrachteten gewöhnlichen Logik stets der Fall ist.[29]

Die Denotate der *nichtlogischen* Konstanten c sind unter Beachtung der Vorgaben (D1) bis (D6) in jedem Grundbereich *frei wählbar*: die Wahl erfolgt durch eine (kombinatorische oder konzeptionelle) Funktion $\mathcal{S}$, die jede *nichtlogische* Konstante c aus C auf ein Denotat gemäß (D1) bis (D6) wirft, welches wir dann mit «$\mathrm{c}_\mathcal{S}$» bezeichnen. Ein solches $\mathcal{S}$ heißt eine *auf dem Grundbereich $\mathcal{G}$ aufbauende* **Struktur**. Für die *logischen* Konstanten bezeichnen wir das Denotat mit «$c_\mathcal{G}$» und setzen es abhängig vom Grundbereich $\mathcal{G}$ wie folgt fest.

Denotate der 0-stelligen Funktoren:

$\top_\mathcal{G}$ ist der $\mathcal{G}$-Wahrpunkt.
$\bot_\mathcal{G}$ ist der $\mathcal{G}$-Falschpunkt.
$\underline{\bot}_\mathcal{G}$ ist der $\mathcal{G}$-Joker.

Denotate der 1-stelligen logischen Formelfunktoren:

$-_\mathcal{G}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^1$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$, die ein 1-Tupel $\langle\!\langle x\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^1$ dann und nur dann auf $\top_\mathcal{G}$ wirft, wenn $x = \top_\mathcal{G}$.
$\neg_\mathcal{G}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^1$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$, die ein 1-Tupel $\langle\!\langle x\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^1$ dann und nur dann auf $\top_\mathcal{G}$ wirft, wenn $x \neq \top_\mathcal{G}$.

Denotate der 2-stelligen logischen Formelfunktoren:

$\wedge_\mathcal{G}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$, die ein 2-Tupel $\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ dann und nur dann auf $\top_\mathcal{G}$ wirft, wenn $x = \top_\mathcal{G} = y$.
$|_\mathcal{G}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$, die ein 2-Tupel $\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ dann und nur dann auf $\top_\mathcal{G}$ wirft, wenn $x \neq \top_\mathcal{G} \neq y$.
$\vee_\mathcal{G}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$, die ein 2-Tupel $\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ dann und nur dann auf $\top_\mathcal{G}$ wirft, wenn $x = \top_\mathcal{G}$ oder $y = \top_\mathcal{G}$ oder beides gilt.
$\dot{\vee}_\mathcal{G}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$, die ein 2-Tupel $\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ dann und nur dann auf $\top_\mathcal{G}$ wirft, wenn $x = \top_\mathcal{G}$ oder $y = \top_\mathcal{G}$, aber nicht beides gilt.
$\rightarrow_\mathcal{G}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$, die ein 2-Tupel $\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^2$ dann und nur dann auf $\top_\mathcal{G}$ wirft, wenn nicht zugleich $x \neq \top_\mathcal{G}$ und $y = \top_\mathcal{G}$ gilt.

---

[27] Dies wäre allerdings in einer Sprache der zweite Stufe (siehe S. 360) anders.

[28] Alle im Folgenden genannten «Funktionen» seien solche der verallgemeinerte Theorie, also kombinatorische oder konzeptionelle Funktionen. ${\mathcal{O}_\mathcal{G}}^n$ sei für Zahlen $n \geq 1$ die Kollektion der n-Tupel mit Komponenten aus $\mathcal{O}_\mathcal{G}$. Schließlich sei $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_\mathcal{G}}^m, \mathcal{O}_\mathcal{G}))^n$ die Kollektion der n-Tupel, deren Komponenten (kombinatorische oder konzeptionelle) Funktionen von ${\mathcal{O}_\mathcal{G}}^m$ in $\mathcal{O}_\mathcal{G}$ sind.

[29] Der Fall $m = 0$, in dem auch $n = 0$ sein darf, gehört zur Modallogik (siehe Abschnitt 6.3). Den Fall $m \neq 0 = n$ schließen wir schlechthin aus.

$\leftrightarrow_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein 2-Tupel $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft, wenn $x = \top_{\mathcal{G}} = y$ oder $x \neq \top_{\mathcal{G}} \neq y$ gilt.

$=_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein 2-Tupel $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft, wenn $x = y$ gilt.

$\in_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein 2-Tupel $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft, wenn $x \;\; \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \;\; y$ gilt.

Denotate der logischen Formeloperatoren:

$\bigwedge_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein 1-Tupel $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle$ aus $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft,
wenn f die Funktion ist, die *alle* $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ aus ${\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1$ auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft.

$\bigvee_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein 1-Tupel $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle$ aus $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft,
wenn f eine Funktion ist, die *mindestens ein* $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ aus ${\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1$ auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft.

$\dot{\bigvee}_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein 1-Tupel $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle$ aus $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft,
wenn f eine Funktion ist, die *genau ein* $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ aus ${\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1$ auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft.[30]

Denotate der logischen Termoperatoren:

$\boldsymbol{\imath}_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$, die ein 1-Tupel $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle$ aus $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$, falls f für genau ein $\mathcal{G}$-Objekt x das Tupel $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft, auf dieses Objekt x wirft; und andernfalls auf $\bot_{\mathcal{G}}$.

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$, die ein 1-Tupel $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle$ aus $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$, falls f für mindestens ein $\mathcal{G}$-Objekt x das Tupel $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft, auf das auserwählte dieser Objekte x wirft[31]; und andernfalls auf $\bot_{\mathcal{G}}$.

$\boldsymbol{\kappa}_{\mathcal{G}}$ ist die Funktion von $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$, die ein 1-Tupel $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle$ aus $(\mathtt{Func}({\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}))^1$, auf die $\mathcal{G}$-Klasse wirft, deren $\mathcal{G}$-Elemente die $\mathcal{G}$-Individuen x sind, für welche f das Tupel $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft.

Ein **Modell** $\mathcal{M}$ der zugrunde liegenden Sprache ist nun ein Paar $\langle \mathcal{G}, \mathcal{S} \rangle$, worin $\mathcal{G}$ ein Grundbereich und $\mathcal{S}$ eine darauf aufbauende Struktur ist. $\mathcal{G}$ heißt der *Grundbereich* und $\mathcal{S}$ die *Struktur* von $\mathcal{M}$. Alle Modelle mit Grundbereich $\mathcal{G}$ heißen *auf* $\mathcal{G}$ *aufbauend*. Ist nun $\mathcal{G}$ ein realistischer bzw. ein formalistischer Grundbereich, so sollen auch die darauf aufbauenden Modelle **realistische** bzw. **formalistische Modelle** heißen.

Man beachte, dass *wenn die Klasse C der nichtlogischen Konstanten leer ist* (wie es im mengentheoretischen Teil dieser Arbeit der Fall war), es nur eine einzige auf einem gegebenen Grundbereich $\mathcal{G}$ aufbauende Struktur gibt: die leere Funktion. Dann ist also alle Information über das Modell $\mathcal{M}$ bereits im Grundbereich $\mathcal{G}$ enthalten, und wenn das betrachtete Modell ein realistisches ist, auch bereits in der Grundklasse $\mathbb{G}$, welche $\mathcal{G}$ induziert. Wir können dann $\mathcal{M}$ *das durch die Grundklasse* $\mathbb{G}$ *induzierte realistische Modell* nennen.[32]

Ist $\mathcal{M}$ ein Modell mit Grundbereich $\mathcal{G}$ und Struktur $\mathcal{S}$, so wollen wir zur Vereinfachung der Notation

- unter den $\mathcal{M}$*-Objekten*, $\mathcal{M}$*-Wahrheitswerten*, $\mathcal{M}$*-Individuen*, $\mathcal{M}$*-Klassen* und $\mathcal{M}$*-Elementen* einer solchen Klasse die $\mathcal{G}$-Objekte bzw. $\mathcal{G}$-Wahrheitswerte bzw. $\mathcal{G}$-Individuen bzw. $\mathcal{G}$-Klassen bzw. $\mathcal{G}$-Elemente,

- für logische Konstanten c unter $\mathrm{c}_{\mathcal{M}}$ dasselbe wie $\mathrm{c}_{\mathcal{G}}$, und schließlich

- für nichtlogische Konstanten c unter $\mathrm{c}_{\mathcal{M}}$ dasselbe wie $\mathrm{c}_{\mathcal{S}}$ verstehen.

---

[31] Wie auf S. 155–156 erläutert, setzen wir voraus, dass für jede nichtleere Auswahl von Objekten je eines dieser Objekte ausgewählt ist; dieses bezeichnen wir daher metasprachlich als ≪das auserwählte≫ dieser Objekte.

[32] Aus diesem Grund konnten wir im mengentheoretischen Teil, wo wir nur realistische Modelle betrachten wollten, die Grundklassen unmittelbar als Modelle ansehen (vgl. Erklärung 5.8.7 S. 110).

Belegungen und Denotate der Variablen. Unter einer auf dem Grundbereich $\mathcal{G}$ (oder dem Modell $\mathcal{M}$ mit Grundbereich $\mathcal{G}$) aufbauenden **Belegung $\mathcal{B}$ der Variablen** verstehen wir eine Funktion, deren Argumente die Variablen sind, und die jede Variable v auf ein $\mathcal{G}$-Objekt (d. h. $\mathcal{M}$-Objekt) $v_{\mathcal{B}}$ wirft. Ist $\mathcal{B}$ eine Belegung, sind $v_1, \ldots v_m$ Variablen und sind $a_1, \ldots, a_m$ $\mathcal{G}$– bzw. $\mathcal{M}$-Objekte, so schreiben wir

$\mathcal{B}(v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_m \mapsto a_m)$ [Lesart: abgeänderte Belegung $\mathcal{B}$ mit v_1 für a_1, …, v_m für a_m]

für die Belegung der Variablen, welche die Variable v_1 auf a_1 und … und v_m auf a_m wirft, und mit allen übrigen Variablen dieselben Würfe durchführt wie $\mathcal{B}$.

Basen und Bewertungen. Ist nun $\mathcal{M}$ ein Modell und $\mathcal{B}$ eine auf $\mathcal{M}$ aufbauende Belegung, so heißt $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B} \rangle$ eine *auf $\mathcal{M}$ aufbauende semantische Bewertungsbasis* oder kurz **Basis**. Eine solche Basis ist nun unser **interpretativer Hintergrund**, vor dem wir jedem Ausdruck eine Bedeutung verleihen. Hierzu muss zu jeder Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B} \rangle$ eine Funktion $\mathtt{ob}_{\langle \mathcal{M}, \mathcal{B} \rangle}$ bestimmt werden, für die wir auch $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}$ schreiben und welche die (*von dieser Basis induzierte*) **Bewertung** heißt. Diese Funktion soll jeden Ausdruck α auf das Objekt werfen, welches das Denotat des Ausdrucks α bezüglich der gewählten Basis sein soll. Wenn α ein Term ist, soll der Funktionswert $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha)$ (also das Denotat von α) ein beliebiges $\mathcal{M}$-Objekt, und wenn α eine Formel ist, ein $\mathcal{M}$-Wahrheitswert sein. Formeln mit Denotat $\bot_{\mathcal{M}}$ bzw. $\top_{\mathcal{M}}$ nennen wir (bzgl. der entsprechenden Basis) *falsch* bzw. *wahr*, denn gemäß Erklärung 6.2.1 beschreiben sie tatsächlich einen wahren bzw. falschen Sachverhalt. Wir legen nun die Bewertung durch ein System von Forderungen der folgenden Art fest.

- Für jede Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B} \rangle$ und jeden Ausdruck α der Länge 0 (also jede Variable und jeden Namen) geben wir für $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha)$ direkt das $\mathcal{M}$-Objekt an, welches das Denotat von α sein soll.
- Bei Ausdrücken α der Länge > 0 dagegen treffen wir eine Bestimmung, welche die Funktionswerte $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha)$ *dann* eindeutig festgelegt, *wenn* bereits alle Funktionswerte $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{X}}(\beta)$ für Ausdrücke β mit *kleinerer Länge* als α und alle auf $\mathcal{M}$ aufbauenden Belegungen $\mathcal{X}$ feststehen.

Aufgrund des Prinzips 5.13.31 S. 185 der ordnungstheoretischen Rekursion, angewendet auf die Wohlordnung $\langle \omega, < \rangle$ der natürlichen Zahlen, ist sichergestellt, dass es für ein solches System von Forderungen tatsächlich zu jeder Basis genau eine Interpretationsfunktion gibt, die diesen Forderungen entspricht.[33] Konkret legen wir nun die Denotate $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha)$ für Ausdrücke α wie folgt fest:

Festlegung der Denotate für Ausdrücke bezüglich einer Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B} \rangle = \langle \langle\!\langle \mathcal{G}, \mathcal{S} \rangle\!\rangle, \mathcal{B} \rangle$.

(1) Für Variablen v sei $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(v)$ das $\mathcal{G}$-Objekt (d. h. $\mathcal{M}$-Objekt) $v_{\mathcal{B}}$.

(2) Für Namen (0-stellige Konstanten) c sei $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\mathrm{c})$ das $\mathcal{G}$-Objekt (d. h. $\mathcal{M}$-Objekt) $\mathrm{c}_{\mathcal{M}}$.
Dabei ist $\mathrm{c}_{\mathcal{M}}$ für *nichtlogische Konstanten* stets das $\mathcal{G}$-Objekt $\mathrm{c}_{\mathcal{S}}$, und für *logische* das $\mathcal{G}$-Objekt $\mathrm{c}_{\mathcal{G}}$.
Im Einzelnen ist also
$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\top)$ der $\mathcal{G}$-Wahrpunkt $\top_{\mathcal{G}}$ (d. h. $\top_{\mathcal{M}}$),
$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\bot)$ der $\mathcal{G}$-Falschpunkt $\bot_{\mathcal{G}}$ (d. h. $\bot_{\mathcal{M}}$),
$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\underline{\bot})$ der $\mathcal{G}$-Joker $\underline{\bot}_{\mathcal{G}}$ (d. h. $\underline{\bot}_{\mathcal{M}}$).

(3) Für n-stellige Funktoren c (mit Stellenzahl $n \geq 1$) und Ausdrücke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sei
$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(c\ \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ stets das $\mathcal{G}$-Objekt (d. h. $\mathcal{M}$-Objekt) $\mathrm{c}_{\mathcal{G}}\big(\langle\!\langle \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha_1), \ldots, \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha_n) \rangle\!\rangle\big)$,
auf welches die Funktion $c_{\mathcal{G}} (= c_{\mathcal{M}})$ das n-Tupel $\langle\!\langle \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha_1), \ldots, \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha_n) \rangle\!\rangle$ wirft.

Ist c ein Termfunktor, so ist dieses Denotat also ein von den Denotaten von α_1 bis α_n abhängiges $\mathcal{G}$-Objekt. Ist c aber ein Formelfunktor, ist es ein von denselben Denotaten abhängiger $\mathcal{G}$-Wahrheitswert, und je nachdem, ob dieser $\top_{\mathcal{G}}$ oder $\bot_{\mathcal{G}}$ ist, betrachten wir die Formel $c\ \alpha_1 \ldots \alpha_n$ als wahr oder falsch.

[33] Wir können nämlich aufgrund von 5.13.31 S. 185 rekursiv eine Funktion f definieren, die jede natürliche Zahl n auf eine Funktion f_n wirft, die ihrerseits jedes Paar $\langle \mathcal{X}, \alpha \rangle$ (für auf $\mathcal{M}$ aufbauende Belegungen $\mathcal{X}$ und Ausdrücke α der Länge n) auf ein $\mathcal{M}$-Objekt wirft, und zwar so, dass wenn man $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{X}}(\alpha) := f_n(\langle \mathcal{X}, \alpha \rangle)$ setzt (wobei n die Länge von α ist), unsere Forderungen erfüllt sind.

Ist c einer unserer 1- bzw. 2-stelligen logischen Funktoren ($-$, $\neg$, $\wedge, |, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$, $=$, $\in$), so haben wir die entsprechende Funktion $c_{\mathcal{G}}$ auf S. 364–365 gerade so gewählt, dass die mit dem Funktor c gebildeten Ausdrücke «$c\ \alpha_1$» bzw. «$c\ \alpha_1\alpha_2$» die erwünschte (auf S. 356–357 beschriebene) Bedeutung erhalten.

(4) Für $\langle m, n\rangle$-stellige Operatoren c, verschiedene Variablen $v_1, \ldots, v_m$ und Ausdrücke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sei $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\mathrm{c}\ v_1 \ldots v_m\ \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ stets das $\mathcal{G}$-Objekt (d. h. $\mathcal{M}$-Objekt) $c_{\mathcal{G}}(\leqslant f_1, \ldots, f_n \geqslant)$,
auf welches die Funktion $c_{\mathcal{G}}(= c_{\mathcal{M}})$ das n-Tupel $\leqslant f_1, \ldots, f_n \geqslant$ wirft,
wobei f_i für jedes i aus $\{1, \ldots, n\}$ die Funktion von $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^m$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ sei,
die jedes $\leqslant x_1, \ldots, x_m \geqslant$ aus $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^m$ auf $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}(v_1 \mapsto x_1, \ldots, v_m \mapsto x_m)}(\alpha_i)$ wirft.

Ist c ein Termoperator, so ist dieses Denotat also ein von den Denotaten, die α_1 bis α_n bei allen möglichen Belegungen (also nicht nur bei der aktuellen Belegung $\mathcal{B}$) der Variablen v_1 bis v_m erhalten können, abhängiges $\mathcal{M}$-Objekt. Ist c aber ein Formeloperator, ist es ein von denselben Denotaten abhängiger $\mathcal{M}$-Wahrheitswert.

Ist c einer unserer logischen $\langle 1, 1\rangle$-stelligen Formel– oder Termoperatoren ($\bigwedge, \bigvee, \dot{\bigvee}, \boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa},$), so bekommt der Ausdruck «c $v\ \alpha$» also für Variablen v und Ausdrücke α als Denotat das $\mathcal{G}$-Objekt $\mathrm{c}_{\mathcal{G}}(\leqslant f \geqslant)$, auf welches die Funktion $\mathrm{c}_{\mathcal{G}}$ das Objekt $\leqslant f \geqslant$ wirft, wobei f die Funktion ist, die jedes $\leqslant x \geqslant$ aus $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ auf $\mathtt{ob}_{v \mapsto x}(\alpha)$ wirft. Für diese logischen Operatoren c haben wir die entsprechende Funktion $c_{\mathcal{G}}$ auf S. 365 gerade so gewählt, dass die mit dem Funktor c gebildeten Ausdrücke «c $v\ \alpha$» die erwünschte (auf S. 358 beschriebene) Bedeutung erhalten.

So bekommt z. B. der Ausdruck $\bigwedge v\alpha$ das Denotat $\top_{\mathcal{G}}$ (d. h. er ist wahr), wenn die Funktion f, die jedes $\leqslant x \geqslant$ aus ${\mathcal{O}_{\mathcal{G}}}^1$ auf $\mathtt{ob}_{v \mapsto x}(\alpha)$ wirft, *alle* $\leqslant x \geqslant$ auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft, d. h. wenn $\mathtt{ob}_{v \mapsto x}(\alpha)$ stets $\top_{\mathcal{G}}$ ist, oder anders gesagt: wenn α bei jeder Belegung der Variable x wahr ist.

Zur „höheren“ Semantik der Logik, die schon zur Pragmatik überleitet, gehören schließlich die folgenden semantischen Begriffe. Ist ein Ausdruck α bezüglich einer Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ wahr, sagen wir:

Die *Basis* $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ macht α gültig, oder α *ist gültig in der Basis* $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$.

Ist α für *jede* auf dem Modell $\mathcal{M}$ aufbauende Belegung $\mathcal{X}$ in der Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{X}\rangle$ gültig, so sagen wir:

Das *Modell* $\mathcal{M}$ macht α gültig, oder α *ist gültig im Modell* $\mathcal{M}$.

Ist α schließlich in *jedem* Modell $\mathcal{M}$ gültig, so sagen wir:

α ist *allgemeingültig* oder *eine Tautologie*.

Synonym zu «Gültigkeit» spricht man von «Erfülltsein». Davon zu unterscheiden ist aber die Erfüll*barkeit*: Gibt es für ein Modell $\mathcal{M}$ mindestens eine Belegung $\mathcal{B}$, so dass α in $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ gültig ist, so sagen wir:

α ist *im Modell* $\mathcal{M}$ *erfüllbar*,

und gibt es mindestens ein Modell, in dem α erfüllbar ist, so sagen wir:

α *ist* (schlechthin) *erfüllbar*.

Ein *Axiomensystem* ist eine Klasse $\mathbb{A}$ von Formeln, den *Axiomen* des Systems. Ein Modell $\mathcal{M}$ heißt

ein Modell für das Axiomensystem $\mathbb{A}$,

wenn jedes in $\mathbb{A}$ enthaltende Axiom im Modell $\mathcal{M}$ gültig ist, also in jeder Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ gilt. Ist $\mathbb{A} = \emptyset$, so trifft dies per Leerklassen-Lemma 5.9.3 S. 117 zu, also ist *jedes Modell ein Modell für das leere Axiomensystem*. Ein Axiomensystem $\mathbb{A}$ heißt *unerfüllbar* bzw. *erfüllbar* bzw. *eindeutig erfüllbar* oder *kategorisch*, wenn es *kein* bzw. *mindestens ein* bzw. „im Wesentlichen“ *genau ein* Modell von

$\mathbb{A}$ gibt.[34] Im Licht dieser Erklärungen kann man sagen: in Kap. 5 haben wir ein Axiomensystem (für die Mengenlehre) aufgestellt, dessen Erfüllbarkeit dadurch sichergestellt ist, dass das durch Grundklasse $\mathbb{D}$ induzierte realistische Modell sich uns als ein Modell für dieses Axiomensystem erwiesen hat. Wir sagen, dass eine Formel φ aus einem Axiomensystem $\mathbb{A}$ *logisch folgt* oder dass $\mathbb{A}$ die Formel φ *impliziert*, wenn *jedes Modell des Axiomensystems auch ein Modell von* $\{\varphi\}$ ist. Wir schreiben dann

$$\mathbb{A} \;\Mapsto\; \varphi \quad \text{[Lesart: Formelklasse } \mathbb{A} \text{ impliziert } \varphi\text{].}$$

Offensichtlich gilt nun $\emptyset \Mapsto \varphi$ genau dann, wenn φ in jedem Modell gilt, also allgemeingültig ist: Denn $\emptyset \Mapsto \varphi$ bedeutet ja, dass jedes Modell des leeren Axiomensystems (d. h. jedes Modell schlechthin) auch ein solches von $\{\varphi\}$ ist, also φ in jedem Modell gilt. Für $\emptyset \Mapsto \varphi$ schreiben wir auch $\Mapsto \varphi$, und somit ist

$$\Mapsto \; \varphi$$

eine Bezeichnung dafür, das φ allgemeingültig ist. Ist nun φ_0 irgendeine Formel, so schreibt man auch

$$\varphi_0 \;\Rightarrow\; \varphi \quad \text{[Lesart: Formel } \varphi_0 \text{ impliziert } \varphi\text{].}$$

abkürzend für $V \cup \{\varphi_0\} \Mapsto \varphi$, wobei V im jeweiligen Kontext die Klasse der „Voraussetzungen“ ist: V enthält also die Axiome, die man generell voraussetzt (in einer präzisen Abhandlung sind dies alle zuvor in der Abhandlung erwähnten) zuzüglich der gegebenenfalls unmittelbar zuvor explizit als Voraussetzung angeführten Formeln. Schließlich heißen Formeln φ_1, φ_2 (in einem bestimmten Kontext) *logisch äquivalent*, wenn sowohl $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ als auch $\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1$ gilt, also in jedem Modell, in dem alle Formeln der (im Kontext stillschweigend oder explizit vorausgesetzten) Formelklasse V gültig sind, die beiden Formeln φ_1 und φ_2 entweder beide gültig oder beide nicht gültig sind. Hierfür schreibt man

$$\varphi_1 \;\Leftrightarrow\; \varphi_2, \quad \text{[Lesart: } \varphi_1 \text{ ist äquivalent mit } \varphi_2\text{].}$$

Allgemeiner schreiben wir für Ausdrücke α_1 und α_2, dass $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ [Lesart: φ_1 ist äquinotant mit φ_2] wenn in jedem Modell, in dem alle Formeln von V gültig sind, $\alpha_1 = \alpha_2$ gültig ist, also α_1 und α_2 in jeder auf dem Modell aufbauenden Basis dasselbe Denotat haben.[35]

Die Zeichen $\Mapsto$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und $\equiv$ gehören ebenso wie das später (in der Pragmatik) zu besprechende Ableitungszeichen $\vdash$ zur *Metasprache*, in der sich die Logiker über die logischen Sprachen unterhalten und Logik „betreiben“. Bevor wir nun zur Pragmatik kommen, soll noch ein Blick auf die philosophisch und theologisch wichtige Modallogik geworfen werden, für welche wir noch weitergehende syntaktische und semantische Konzepte betrachten müssen.

---

[34] Letzteres soll heißen, dass verschiedene Modelle $\mathcal{M}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ von $\mathbb{A}$ in folgendem Sinn gleichartig („isomorph“) sind. Ist $\mathcal{O}$ die Klasse der $\mathcal{M}$-Objekte und $\overline{\mathcal{O}}$ jene der $\overline{\mathcal{M}}$-Objekte, so gibt es eine Bijektion f von $\mathcal{O}$ in $\overline{\mathcal{O}}$ (die dann ein *Modell-Isomorphismus* von $\mathcal{M}$ in $\overline{\mathcal{M}}$ heißt), so dass Folgendes gilt.
1. Für 0-stellige Funktoren c ist $f(c_{\mathcal{M}}) = c_{\overline{\mathcal{M}}}$.
2. für $n(>0)$-stellige Formelfunktoren c ist $\leqslant x_1, \ldots, x_n \geqslant \in c_{\mathcal{M}}$ mit $\leqslant f(x_1), \ldots, f(x_n) \geqslant \in c_{\overline{\mathcal{M}}}$ äquivalent.
3. Für $n(>0)$-stellige Termfunktoren c ist $c_{\mathcal{M}}(\leqslant x_1, \ldots, x_n \geqslant) = x$ mit $c_{\overline{\mathcal{M}}}(\leqslant f(x_1), \ldots f(x_n) \geqslant) = f(x)$ äquivalent.
Sei F die Funktion, die jedes $\leqslant x_1, \ldots x_m \geqslant$ aus $\mathcal{O}^m$ auf $\leqslant f(x_1), \ldots f(x_m) \geqslant$ aus $\overline{\mathcal{O}}^{\,m}$ wirft. Dann gilt weiter:
4. Für $\langle m, n \rangle$-stellige Formeloperatoren c ist $\leqslant g_1, \ldots, g_n \geqslant \in c_{\mathcal{M}}$
mit $\leqslant F^{\rightarrow} \looparrowright g_1 \looparrowright f, \ldots, F^{\rightarrow} \looparrowright g_n \looparrowright f \geqslant \in c_{\overline{\mathcal{M}}}$ äquivalent.
5. Für $\langle m, n \rangle$-stellige Termoperatoren c ist $c_{\mathcal{M}}(\leqslant g_1, \ldots, g_n \geqslant) = x$
mit $c_{\overline{\mathcal{M}}}(\leqslant F^{\rightarrow} \looparrowright g_1 \looparrowright f, \ldots, F^{\rightarrow} \looparrowright g_n \looparrowright f) \geqslant) = f(x)$ äquivalent.

[35] Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 5.8 S. 106–107.

6.3 Exkurs: Modallogik

Um die mit den „Modaloperatoren“ $\Box$ (≪Es ist notwendig, dass:≫) und $\Diamond$ (≪Es ist möglich, dass:≫) gebildeten Ausdrücke deuten zu können, bestimmt man nach einem Vorschlag von Saul Kripke (1963)[36] eine die aktuale Welt umfassende Klasse *möglicher Welten*, eine *Zugänglichkeitsrelation* und eventuell eine *Wirklichkeitsrelation*. Es empfiehlt sich, im Zusammenhang hiermit neben $\Box$ und $\Diamond$ noch weitere Konstanten einzuführen: Namen für die Klasse aller Welten und für die aktuale Welt, einen Zugänglichkeits– und einen Wirklichkeitsfunktor sowie einen Denotatsoperator.

Mögliche Welten. Wir wählen zu einem Grundbereich $\mathcal{G}$ eine $\mathcal{G}$-Klasse $\mathcal{We}$ $(= \mathcal{We}_{\mathcal{G}})$ von $\mathcal{G}$-Individuen aus, deren Elemente wir ($\mathcal{G}$-) *Welten* nennen; im Standardfall, wo $\mathcal{G}$ der durch die Grundklasse $\mathbb{D}$ induzierte Grundbereich sein soll, nehmen wir als $\mathcal{We}$ die Kollektion der in der philosophischen Ontologie näher beschriebenen möglichen Welten (siehe S. 45).[37] Als neue Konstante führen wir außerdem den Namen `W` ein, dessen Denotat die $\mathcal{G}$-Klasse $\mathcal{We}$ sein soll.

Aktuale Welt. Wir wählen eine Welt $\mathcal{Ak}(= \mathcal{Ak}_{\mathcal{G}})$ aus $\mathcal{We}$ und nennen sie die *aktuale $\mathcal{G}$-Welt*. Im Standardfall ist $\mathcal{Ak}$ tatsächlich die aktuale Welt. Als Namen für $\mathcal{Ak}$ verwenden wir das Zeichen $\oplus$.

Zugänglichkeitsrelation und Zugänglichkeitsfunktor. In der Semantik der modernen Modallogik berücksichtigt man auch Situationen, wo die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Welt w davon abhängt, welche Welt v man als verwirklicht betrachtet. Deutet man etwa ≪Welten≫ als zeitliche Ereignisse, so werden bei Eintritt eines Ereignisses v gewisse zuvor mögliche Alternativen w nun unmöglich. Diejenigen Welten, die möglich sind, falls v wirklich ist, nennt man ≪von v aus zugänglich≫. Man wählt daher eine Relation $\mathcal{Zu}(= \mathcal{Zu}_{\mathcal{G}})$ aus, welche jede $\mathcal{G}$-Welt auf alle von dieser Welt aus in einem bestimmten Sinn ≪zugänglichen≫ $\mathcal{G}$-Welten ausrichtet. $\mathcal{Zu}(= \mathcal{Zu}_{\mathcal{G}})$ heißt die ($\mathcal{G}$)-*Zugänglichkeitsrelation*. Um ausdrücken, dass von der mit α bezeichneten Welt aus die mit β bezeichnete zugänglich ist, also $\alpha\ \mathcal{Zu}_{\mathcal{G}}\ \beta$ gilt, schreiben wir $\preccurlyeq \alpha\,\beta$ [Lesart: von α aus ist β ($\mathcal{G}$-)zugänglich], benutzen also $\preccurlyeq$ als einen 2-stelligen Formelfunktor, den wir den *Zugänglichkeitsfunktor* nennen. Je nachdem, welche zusätzlichen Forderungen man an die Zugänglichkeitsrelation stellt, erhält man nun verschiedene Systeme der Modallogik.[38] Verlangt man, dass die Zugänglichkeitsrelation *reflexiv* und *transitiv* sein soll (so dass, wenn w_2 von w_1 und w_3 von w_2, so auch von w_3 aus w_1 aus zugänglich ist), so spricht man vom **System $\boldsymbol{S_4}$**. Fordert man zusätzlich, dass Zugänglichkeit *symmetrisch* ist (so dass, wenn w_2 von w_1, so auch w_1 von w_2 aus zugänglich ist), erhält man das **System $\boldsymbol{S_5}$**, das den modallogischen Gottesbeweisen zugrunde liegt (siehe Abschnitt 9.4.11 und 9.4.12, besonders S. 759–760). Wie ist aber die „wirkliche“ Zugänglichkeitsrelation beschaffen? Da mögliche Welten nicht Zeitpunkte oder Ausschnitte aus einem Weltganzen, sondern (wie auf S. 45 beschrieben) alternative Modelle der Gesamtwirklichkeit sind, beeinflusst keine mögliche Welten die Möglichkeit einer anderen, weshalb jede Welt von jeder aus zugänglich ist. Als Relation $\mathcal{Zu}$ wählen wir daher im Standardfall die sog. *totale Zugänglichkeitsrelation*, die jede Welt mit jeder in Beziehung setzt. Diese ist reflexiv, transitiv und symmetrisch, so dass hier das System $\boldsymbol{S_5}$ vorliegt.

Wirklichkeitsrelation und Wirklichkeitsfunktor. Da nicht alle Individuen in jeder möglichen Welt w existieren (d. h. zu den Dingen gehören, die verwirklicht wären, wäre w verwirklicht), wählen wir eine *Wirklichkeitsrelation* $\mathcal{E}x(= \mathcal{E}x_{\mathcal{G}})$, welche jedes Individuum auf die Welten ausrichtet, wo es existiert, und mit dem 2-stelligen Formelfunktor $\checkmark$, dem *Wirklichkeitsfunktor*, soll $\checkmark\alpha\,\beta$ aussagen, dass α in der Welt β existiert, also $\mathcal{E}x$ das Denotat von α auf jenes von β ausrichtet. So bedeutet $\checkmark\alpha\oplus$ im Standardmodell, dass α in der aktualen Welt (zu irgendeinem Zeitpunkt) verwirklicht ist.

---

[36] Vgl. Kripke, *Semantical Considerations*.

[37] Da diese Welten anscheinend Urelemente sind, ist dieses $\mathcal{We}$ eine gewöhnliche Klasse des Standardmodells.

[38] Vgl. Hughes und Cresswell, *Modal Logic*.

Modaloperatoren, Notwendigkeits- und Möglichkeitsoperator. Die Grundidee der Modallogik ist es, jedem Ausdruck in jeder Welt ein eigenes Denotat zu verleihen. Man kann dann bei der Festlegung der Bedeutung explizit auf die Welten Bezug nehmen. Diejenigen Konstanten, bei denen dies der Fall ist, heißen *Modaloperatoren* oder *modale Operatoren*. Man verwendet hierfür $\langle 0, n\rangle$-stellige Operatoren c (diese nennt man auch einfach n-stellig), welche wie Funktoren mit n Ausdrücken $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zu einem Ausdruck $\ll c\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n\gg$ zusammenzustellen sind, ohne dass Variablen involviert sein müssen. Zulässig sind auch 0-stellige (d. h. $\langle 0, 0\rangle$-stellige) Modaloperatoren, die wir *Modalnamen* nennen. Konstanten, die keine Modaloperatoren sind, fassen wir jetzt als *gewöhnliche Konstanten* zusammen. Die Hauptrolle spielen in der Modallogik nun die beiden 1-stelligen modalen Formeloperatoren $\Box$ und $\Diamond$. Die mit diesem *Notwendigkeits–* bzw. *Möglichkeitsoperator* zusammengestellten Formeln $\Box\,\alpha$ und $\Diamond\,\alpha$ drücken aus, dass α notwendig bzw. möglich (d. h. in allen bzw. in mindestens einer zugänglichen Welt wahr) ist.

Denotatsoperator. Um das Denotat eines Ausdrucks in einer anderen Welt ansprechen zu können, schlage ich das Zeichen $\triangle$ als 2-stelligen modalen Termoperator vor. Für diesen *Denotatsoperator* soll $\ll\triangle\,\alpha\,\beta\gg$ die Bedeutung «das Denotat von α in der Welt $\beta\gg$ haben. Bezeichnet w eine Welt, so bezeichnet also $\triangle\,\alpha\,w$ in der aktuellen Welt dasselbe Objekt, das α in der Welt w bezeichnet, und ist φ eine Formel, so drückt die Formel $\ll\triangle\,\varphi\,w = \top\gg$ (oder in offizieller, polnischer Notation: $\ll= \triangle\,\varphi\,w\,\top\gg$) aus, dass die Formel φ in der Welt w wahr ist.

Die sieben neuen Konstanten $\mathtt{W}$, $\oplus$, $\preccurlyeq$, $\checkmark$, $\Box$, $\Diamond$, $\triangle$, betrachten wir als neue logische Konstanten und fügen sie in die Menge C_ℓ der nun betrachteten modallogischen Sprache ein. Sie heißen auch **modallogische Konstanten**, wenngleich die ersten vier gewöhnliche Konstanten und nur die letzten drei Modaloperatoren sind, die nun **logische Modaloperatoren** heißen. Ferner lassen wir nun zu, dass die Signatur σ unserer Sprache $\lessdot C_\ell, C, \sigma\gtrdot$ einer Konstanten c aus C auch die Signatur $\langle 0, n\rangle$ eines Modaloperators verleiht. Ein solches c heißt dann ein **nichtlogischer Modaloperator**.

Ist $\mathcal{G}$ ein Grundbereich, so ist ein *auf $\mathcal{G}$ aufbauender* **modallogischer Grundbereich** ein Tupel $\lessdot\mathcal{G}, \mathcal{We}, \mathcal{Ak}, \mathcal{Zu}, \mathcal{Ex}\gtrdot$, wobei $\mathcal{We}(= \mathcal{We}_\mathcal{G})$, $\mathcal{Ak}(= \mathcal{Ak}_\mathcal{G})$, $\mathcal{Zu}(= \mathcal{Zu}_\mathcal{G})$, und $\mathcal{Ex}(= \mathcal{Ex}_\mathcal{G})$ gemäß der obigen Beschreibung passend zu $\mathcal{G}$ gewählt sind. Um nun jedem Ausdruck in jeder $\mathcal{G}$-Welt ein eigenes Denotat zu verleihen, müssen wir als Hilfsmittel hierzu zunächst jeder Konstanten c in jeder $\mathcal{G}$-Welt ein Denotat zuschreiben. Das Denotat einer gewöhnlichen Konstanten soll in jeder Welt dasselbe sein, und zwar, wie bereits auf S. 364 beschrieben, je nach Signatur von c ein $\mathcal{G}$-Objekt oder eine Funktion von $(\mathcal{O}_\mathcal{G})^n$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$ usw. Die Denotate von Modaloperatoren hingegen dürfen (aber müssen nicht) von Welt zu Welt variieren. Um zunächst die Art der Denotate von Modaloperatoren c festzulegen, ergänzen wir die Denotatsbestimmungen (D1) bis (D6) auf S. 364 durch folgende.

(D 7) Falls c ein $\langle 0, 0\rangle$-stelliger Formeloperator ist, soll das Denotat von c ein $\mathcal{G}$-Wahrheitswert sein,

(D 8) falls c ein $\langle 0, 0\rangle$-stelliger Termoperator ist: ein $\mathcal{G}$-Objekt,[39]

(D 9) falls c ein $\langle 0, n\rangle$-stelliger Formeloperator (mit $n \geq 1$) ist: eine Funktion von $(\mathtt{Func}(\mathcal{We}_\mathcal{G}, \mathcal{O}_\mathcal{G}))^n$ in $\mathcal{W}_\mathcal{G}$,

(D10) falls c ein $\langle 0, n\rangle$-stelliger Termoperator (mit $n \geq 1$) ist: eine Funktion von $(\mathtt{Func}(\mathcal{We}_\mathcal{G}, \mathcal{O}_\mathcal{G}))^n$ in $\mathcal{O}_\mathcal{G}$.

Das Nähere regelt nun für nichtlogische Konstanten wie in der gewöhnlichen Logik eine Struktur: Eine auf $\lessdot\mathcal{G}, \mathcal{We}, \mathcal{Ak}, \mathcal{Zu}, \mathcal{Ex}\gtrdot$ **modallogische Struktur** $\mathcal{S}$ ist eine Funktionen, die zunächst jeder *gewöhnlichen Konstanten* c aus C ein Denotat $c_\mathcal{S}$ zuordnet, welches wir für jede $\mathcal{G}$-Welt w nachträglich auch mit $c_{\mathcal{S},w}$ bezeichnen und als *das Denotat von c in der Welt w* deuten (das demnach in jeder Welt dasselbe ist). Des weiteren ordnet $\mathcal{S}$ jedem Modaloperator aus C direkt eine Denotat $c_{\mathcal{S},w}$ für jede Welt w zu, nimmt also explizit auf jede Welt Bezug (was das semantische Kennzeichnen der Modaloperatoren ist).

[39] Ein 0-stelliger modaler Termoperator, dessen Denotat von Welt zu Welt variiert, wäre zum Beispiel ein Zeichen H mit der Bedeutung „hier in dieser Welt“, was in jeder Welt W die Welt W bezeichnen würde.

Das Denotat jeder logischen Konstanten c, die in der gewöhnlichen Logik verwendet wird, haben wir bereits auf S. 364–365 in Abhängigkeit von $\mathcal{G}$ festgelegt und als $c_{\mathcal{G}}$ bezeichnet; wir bezeichnen dasselbe jetzt auch mit $c_{\mathcal{G},w}$ und betrachten es als Denotat von c in jeder $\mathcal{G}$-Welt w. Auch für die vier neuen gewöhnlichen Konstanten setzt wir nun ein Denotat $c_{\mathcal{G}}(= c_{\mathcal{G},w})$ fest:

$\mathtt{W}_{\mathcal{G}}(= \mathtt{W}_{\mathcal{G},w})$ ist die Klasse $\mathcal{W}e_{\mathcal{G}}$ der $\mathcal{G}$-Welten,

$\oplus_{\mathcal{G}} = (\oplus_{\mathcal{G},w})$ ist die aktuale $\mathcal{G}$-Welt $\mathcal{A}k_{\mathcal{G}}$,

$\preccurlyeq_{\mathcal{G}}$ $(=\preccurlyeq_{\mathcal{G},w})$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein $\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft, wenn x eine $\mathcal{G}$-Welt und y eine von x aus zugängliche $\mathcal{G}$-Welt ist.

$\checkmark_{\mathcal{G}}(= \checkmark_{\mathcal{G},w})$ ist die Funktion von $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein $\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle$ aus $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft, wenn y eine $\mathcal{G}$-Welt ist, in der x existiert.

Für die drei logischen Modaloperatoren c verzichten wir auf ein weltunabhängig definiertes Denotat $c_{\mathcal{G}}$ und legen unmittelbar für jede $\mathcal{G}$-Welt w das dortige Denotat $c_{\mathcal{G},w}$ wie folgt fest:

$\Box_{\mathcal{G},w}$ ist die Funktion von $\mathtt{Func}(\mathcal{W}e, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})^1$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein $\langle\!\langle f\rangle\!\rangle$ aus $\mathtt{Func}(\mathcal{W}e, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})^1$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft,
wenn f eine Funktion ist, die *jede* von w aus $\mathcal{G}$-zugängliche $\mathcal{G}$-Welt auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft.

$\Diamond_{\mathcal{G},w}$ ist die Funktion von $\mathtt{Func}(\mathcal{W}e, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})^1$ in $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, die ein $\langle\!\langle f\rangle\!\rangle$ aus $\mathtt{Func}(\mathcal{W}e, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})^1$ dann und nur dann auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft,
wenn f eine Funktion ist, die *mindestens eine* von w aus $\mathcal{G}$-zugängliche $\mathcal{G}$-Welt auf $\top_{\mathcal{G}}$ wirft.

$\triangle_{\mathcal{G},w}$ ist die Funktion von $\mathtt{Func}(\mathcal{W}e, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$, die jedes $\langle\!\langle f_1, f_2\rangle\!\rangle$ aus $\mathtt{Func}(\mathcal{W}e, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})^2$ auf $f_1(f_2(w))$ wirft, falls $f_2(w)$ eine $\mathcal{G}$-Welt ist, und andernfalls auf $\bot_{\mathcal{G}}$.

Ist nun $\mathcal{S}$ eine auf dem modallogischen Grundbereich $\langle\!\langle \mathcal{G}, \mathcal{W}e_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}k_{\mathcal{G}}, \mathcal{Z}u_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}x_{\mathcal{G}}\rangle\!\rangle$ aufbauende modallogische Struktur, so heißt $\mathcal{M} := \langle\!\langle \mathcal{G}, \mathcal{W}e_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}k_{\mathcal{G}}, \mathcal{Z}u_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}x_{\mathcal{G}}, \mathcal{S}\rangle\!\rangle$ ein **modallogisches Modell**. Ist ein solches Modell $\mathcal{M}$ gegeben, nennen wir die $\mathcal{G}$-Objekte, $\mathcal{G}$-Welten usw. auch $\mathcal{M}$-Objekte bzw. $\mathcal{M}$-Welten usw. und schreiben für $\mathcal{W}e_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}k_{\mathcal{G}}$ usw. auch $\mathcal{W}e_{\mathcal{M}}, \mathcal{A}k_{\mathcal{M}}$ usw. Gilt $v\ \mathcal{Z}u_{\mathcal{G}}\ w$, nennen wir w von v aus $\mathcal{M}$-zugänglich, und gilt $x\ \mathcal{E}x_{\mathcal{G}}\ w$, nennen wir x in der Welt w $\mathcal{M}$-verwirklicht. Ist w eine $\mathcal{G}$-Welt und c eine nichtlogische Konstante, schreiben wir $c_{\mathcal{M},w}$ für $c_{\mathcal{S},w}$, und für logische Konstanten c setzen wir $c_{\mathcal{M},w}$ mit $c_{\mathcal{G},w}$ gleich.

Eine auf dem modallogischen Grundbereich $\langle\!\langle \mathcal{G}, \mathcal{W}e_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}k_{\mathcal{G}}, \mathcal{Z}u_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}x_{\mathcal{G}}\rangle\!\rangle$ (oder einem Modell $\mathcal{M}$ mit diesem Grundbereich) aufbauende **modallogische Belegung** $\mathcal{B}$ ist eine Funktion, die jedes Paar $\langle v, w\rangle$, wobei v Variable und w eine $\mathcal{G}$-Welt ist, auf ein $\mathcal{G}$-Objekt wirft. Wir sehen dieses Objekt als das Denotat an, welches die Belegung $\mathcal{B}$ der Variablen v in der Welt w verleiht.

Für eine Belegung $\mathcal{B}$, Variablen $v_1, \ldots v_m$, Welten $w_1, \ldots w_m$ und $\mathcal{G}$-Objekte $a_1, \ldots, a_m$ versteht man unter der *abgeänderten modallogischen Belegung* $\mathcal{B}(\langle v_1, w_1\rangle \mapsto a_1, \ldots, \langle v_m, w_m\rangle \mapsto a_m)$ die modallogische Belegung, welche v_1 in der Welt w_1 das Denotat a_1 und … und v_m in der Welt w_m das Denotat a_m verleiht, und sonst dieselben Würfe durchführt wie $\mathcal{B}$.

Ist $\mathcal{B}$ eine auf $\mathcal{M} = \langle\!\langle \mathcal{G}, \mathcal{W}e_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}k_{\mathcal{G}}, \mathcal{Z}u_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}x_{\mathcal{G}}, \mathcal{S}\rangle\!\rangle$ aufbauende modallogische Belegung, so heißt $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ eine **modallogische** (Bewertungs-)**Basis**, und wir können induktiv eine **modallogische Bewertung** definieren, die für jeden Ausdruck α, jede modallogische Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ und jede $\mathcal{M}$-Welt w ein Denotat $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\alpha)$ festlegt, welches *das Denotat von α bezüglich Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ in der Welt w* sein soll. Die Festlegung von $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\alpha)$ erfolgt für den Fall, dass das Anfangszeichen von α eine gewöhnliche Konstante ist, genau gemäß der Beschreibung auf S. 366–367, abgesehen davon, dass wir überall zu den Indizes noch den Index w hinzusetzen und für Operatoren statt der abgeänderten Belegung $\mathcal{B}(v_1 \mapsto x_1, \ldots, v_m \mapsto x_m)$ die modallogische Version $\mathcal{B}(\langle v_1, w\rangle \mapsto x_1, \ldots, \langle v_m, w\rangle \mapsto x_m)$ nehmen müssen. Zu ergänzen sind nun die Bestimmungen (1) bis (4) auf S. 366–367 nur noch durch folgende Festlegung des Denotats für Ausdrücke mit Modaloperatoren:

(5) Für $\langle 0, 0\rangle$-stellige Operatoren, also 0-stellige Modaloperatoren c sei $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(c)$ das $\mathcal{G}$-Objekt (d. h. das $\mathcal{M}$-Objekt) $c_{\mathcal{M},w}$.

(6) Für $\langle 0, n\rangle$-stellige Operatoren, also n-stellige Modaloperatoren c (für $n \geq 1$) sei

$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(c\,\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ gleich dem $\mathcal{G}$-Objekt ($\mathcal{M}$-Objekt) $c_{\mathcal{G}}(\ll f_1, \ldots, f_n \gg)$,
auf welches die Funktion $c_{\mathcal{G},w}(= c_{\mathcal{M},w})$ das n-Tupel $\ll f_1, \ldots, f_n \gg$ wirft,
wobei f_i für jedes i aus $\{1, \ldots, n\}$ die Funktion von $\mathcal{W}e_{\mathcal{G}}$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ ist,
die jede $\mathcal{G}$-Welt ($\mathcal{G}$-Welt) v auf $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},v}(\alpha_i)$ wirft.

Für die Semantik der modallogischen Konstanten ergibt sich nun folgende einfache Beschreibung:

$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\Phi)$ ist $\mathcal{A}k_{\mathcal{M}}$ (die aktuelle $\mathcal{M}$-Welt),

$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\mathtt{W})$ ist $\mathcal{W}e_{\mathcal{M}}$ (die Klasse der $\mathcal{M}$-Welten),

$$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\preccurlyeq \alpha\,\beta) \text{ ist } \begin{cases} \top_{\mathcal{M}} & \text{falls } \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\alpha)\ \mathcal{Z}u_{\mathcal{M}}\ \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\beta), \\ \bot_{\mathcal{M}} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\checkmark \alpha\,\beta) \text{ ist } \begin{cases} \top_{\mathcal{M}} & \text{falls } \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\beta) \text{ eine } \mathcal{M}\text{-Welt ist} \\ & \text{und } \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\alpha) \text{ ein dort } \mathcal{M}\text{-verwirklichtes } \mathcal{M}\text{-Individuum ist,} \\ \bot_{\mathcal{M}} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\Box\,\alpha) \text{ ist } \begin{cases} \top_{\mathcal{M}} & \text{falls } \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},u}(\alpha) = \top_{\mathcal{M}} \text{ für alle von } w \text{ aus } \mathcal{M}\text{-zugänglichen Welten } u, \\ \bot_{\mathcal{M}} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\Diamond\,\alpha) \text{ ist } \begin{cases} \top_{\mathcal{M}} & \text{falls } \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},u}(\alpha) = \top_{\mathcal{M}} \text{ für mindestens eine von } w \text{ aus } \mathcal{M}\text{-zugängliche Welt } u, \\ \bot_{\mathcal{M}} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\vartriangle\,\alpha\,\beta) \text{ ist } \begin{cases} \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},v}(\alpha) & \text{mit } v := \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\beta), \text{ falls } \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},w}(\beta) \text{ eine } \mathcal{M}\text{-Welt ist} \\ \bot_{\mathcal{M}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\alpha)$, dem *Denotat von α bzgl. Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ schlechthin*, verstehen wir schließlich $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B},\mathcal{A}k_{\mathcal{M}}}(\alpha)$, also das Denotat von α bezüglich Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}\rangle$ in der *aktualen* ($\mathcal{M}$-)Welt.

Die im den letzten beiden Abschnitten entwickelte Logik ist nun stark genug, um **die drei logischen Modaloperatoren durch gewöhnliche Konstanten zu ersetzen**, so dass wir eine einfache Modallogik auch ohne die komplizierte modallogische Semantik betreiben können.

Hierzu muss zunächst der Denotatsoperator $\vartriangle$ in einen gewöhnlichen Funktor verwandelt werden, der den Ausdrücken $\vartriangle\,\alpha\beta$ ein weltunabhängiges Denotat verleiht. Mit diesem Funktor kann dann das Denotat von α in einer beliebigen Welt w einfach durch $\vartriangle\,\alpha\,w$ *definiert* werden. Dies vorausgesetzt, können wir $\Box$ und $\Diamond$ bedeutungsgleich *durch Ausdrücke ersetzen, die mit den Operatoren $\bigwedge$ und $\bigvee$ gebildet werden*. Man kann nämlich die Modalformel $\Box\,\alpha$ bzw. $\Diamond\,\alpha$ einfach als Abkürzung für die folgende gleichwertige Operatorformel auffassen, die ausdrückt, dass α in jeder bzw. in mindestens einer von der aktuellen Welt aus zugänglichen Welt gilt:

«für jedes w: Wenn $w \in \mathtt{W}$ und w von der aktuellen Welt aus zugänglich ist, so gilt α in w»[40] bzw. «es gibt ein w, so dass $w \in \mathtt{W}$ und w von der aktuellen Welt aus zugänglich ist und α in w gilt».[41]

Ist die Zugänglichkeitsrelation total, also jede Welt von jeder aus zugänglich (wie im Standardfall), so lassen sich $\Box\,\alpha$ bzw. $\Diamond\,\alpha$ durch noch einfachere Formeln ersetzen, und zwar durch

«in jeder Welt w gilt α»[42] bzw. «in mindestens einer Welt w gilt α».[43]

---

[40] Formal: $\bigwedge w\ \rightarrow \wedge \in w\,\mathtt{W} \preccurlyeq \Phi\, w = \vartriangle\,\alpha\,w\ \top$, in gewöhnlicher Notation $\bigwedge_w((w \in \mathtt{W} \wedge\ \preccurlyeq \Phi\, w)\ \rightarrow\ (\vartriangle\,\alpha\,w = \top))$.

[41] Formal: $\bigvee w\ \ \wedge\ \wedge \in w\,\mathtt{W} \preccurlyeq \Phi\, w = \vartriangle\,\alpha\,w\ \top$, in gewöhnlicher Notation $\bigvee_w(w \in \mathtt{W} \wedge\ \preccurlyeq \Phi\, w\ \wedge\ (\vartriangle\,\alpha\,w = \top))$.

[42] Formal: $\bigwedge w\ \rightarrow \in w\,\mathtt{W} = \vartriangle\,\alpha\,w\,\top$, in gewöhnlicher Notation $\bigwedge_{w \in \mathtt{W}}(\vartriangle\,\alpha\,w = \top)$.

[43] Formal: $\bigvee w\ \wedge\ \in w\,\mathtt{W} = \vartriangle\ \alpha\,w\,\top$, in gewöhnlicher Notation $\bigvee_{w \in \mathtt{W}}(\vartriangle\,\alpha\,w = \top)$.

6.4 Pragmatik der Logik

Die Pragmatik soll nach Morris die Beziehung zwischen den Zeichen und ihren Interpreten betrachten,[44] nach Carnap treten dabei die „die psychologischen und soziologischen Beziehungen zwischen den Personen, welche die Sprache verwenden, und den Ausdrücken“ in den Blick.[45] Das ist bei der Logik aber nur Nebensache. Ich würde daher unter ≪Pragmatik der Logik≫ nicht die Analyse psychologischer oder soziologischer Phänomene, sondern die Analyse des logischen Umgangs mit den fertig vorliegenden, semantisch schon bewerteten Ausdrücken verstehen. Im Wesentlichen gehören hierzu die folgenden beiden Tätigkeiten: (a) die Tätigkeit des *Definierens* und sodann (b) die Tätigkeit des *Schlussfolgerns* oder *Beweisens*.

Wenn man die Logik konkret anwendet, arbeitet man meist mit *zwei* logischen Sprachen: einer ≪Ursprache≫ und einer ≪entfalteten≫ oder besser ≪sich ständig entfaltenden≫ Sprache. Diese Sprachen haben einen gegensätzlichen Charakter. Die Ursprache hat nur wenige Zeichen und man benutzt nur ein Minimum von Regeln zur Formulierung und wahrheitserhaltenden Umformulierung von Ausdrücken. Wegen dieses reduktionistischen Charakters sind sowohl die Ausdrücke als auch die Beweisketten in dieser Sprache oft unübersichtlich lang. Die entfaltete Sprache ist dagegen möglichst reich an Ausdrucksmöglichkeiten und Schlussregeln, so dass sowohl die Ausdrücke als auch die mit ihnen durchgeführten Beweise prägnant, übersichtlich und kurz sind. Ein weiterer Unterschied ist, dass die Ursprache ein für allemal abgeschlossen ist, die sich entfaltende Sprache dagegen „dynamisch“ und offen: es werden ihr durch Definitionen immer neue Zeichen und Ausdrücke hinzugefügt und auch ihre Schlussregeln werden durch Beweise laufend erweitert.

Der Zusammenhang zwischen beiden Sprachen besteht darin, dass *alles, was in der entfalteten Sprache ausgedrückt und logisch abgeleitet werden kann, ebenso auch in der Ursprache formulierbar und ableitbar ist*, weil alle Ausdrücke und Ableitungen der entfalteten Sprache durch eine Kette von Definitionen und Beweisen auf entsprechende Ausdrücke und Ableitungsregeln der Ursprache zurückgeführt werden können. Die Ursprache dient also als Ausgangsbasis für eine gewissermaßen unendliche Suche nach Wahrheiten und angemessenen Formulierungen von Wahrheiten, die in der sich entfaltenden Sprache formuliert werden. Das erstaunliche ist, dass die „ausdrucksarme“ Ursprache potentiell schon alles enthalten muss, was in der sich entfaltenden Sprache jemals formulierbar sein wird. Kant würde sagen, dass die entfaltete Sprache bloß die analytisch–apriorischen Urteile ausspricht, die in den von der Ursprache formulierten Begriffen schon bereit liegen. Die Ursprache ist also der logische Keim, aus dem durch eine zweispurige logische Evolution (nämlich durch das zweifache logische Handeln des Definierens und Beweisens) die entfaltete Sprache hervorgeht.

Die *Definitionstätigkeit* wurde bereits auf S. 108–110 beschrieben: Man legt fest, dass eine „neue“ Zeichenreihe N (bezüglich jeder Bewertungsbasis) dasselbe Denotat haben soll wie ein „alter“ Ausdruck α. Wir schreiben hierzu $N :\equiv \alpha$, und wenn α eine Formel ist, auch $N :\Leftrightarrow \alpha$. Bloß schreibtechnische, nicht spracherweiternde Definitionen führen wir verbal ein. Die Kette der Definitionen geht stets von Ausdrücken der Ursprache aus und hat kein Ende, solange die Forschung weitergeht. Die Mengenlehre lässt sich in einer Ursprache formulieren, welche die Funktoren $\top$, $\top$, $\underline{\perp}$, $-$, $\neg$, $\wedge$, $|$, $\vee$, $\dot{\vee}$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$, $\in$ und die Operatoren $\bigwedge, \bigvee, \dot{\bigvee}, \imath, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}$ hat. Mit diesen Konstanten lassen sich nämlich alle Bezeichnungen definieren, die in der Mengenlehre verwendet werden. Ich fasse nun die wichtigsten dieser Definitionen zusammen, und benutze die definierten Ausdrücke anschließend zu einer präzisen Formulierung der Axiome.

[44] Vgl. Morris, *Theory of Signes* S. 6 („relation of signs to interpreters“).

[45] Carnap, *Logische Syntax* Vorwort zur zweiten Auflage S. VII. Ähnlich sagt Morris a.a.O. S. 30: Die Pragmatik behandelt „all psychological, biological, and sociological phenomena wich occur in the functioning of signs.“

Schreibtechnische Definitionen:

Für Ausdrücke $\mathrm{c}\,\alpha\,\beta$ mit einem 2-stelligen Funktor c schreiben wir auch $\alpha\,\mathrm{c}\,\beta$, z. B. für $=\alpha\,\beta$ auch $\alpha=\beta$. Hierdurch bedingt muss man mehrdeutige Schreibweisen vermeiden; dies tun wir durch *Klammern* und *Abstände* (siehe S. 113–114). Wir erlauben bei $\bigwedge, \bigvee$ und $\dot{\bigvee}$, die Variable auch unter den Quantor zu schreiben, und übernehmen sodann die auf S. 115 eingeführten schreibtechnischen Definitionen über Operatoren mit mehreren Variablen, Ausdrucksketten und durchgestrichene Funktoren. Schließlich führen wir die eingeschränkten Operatorausdrücke $\bigwedge_{v\in\alpha}\beta$ für $\bigwedge v(v\in\alpha \;\to\; v\in\beta)$, $\bigvee_{v\in\alpha}\beta$ für $\bigvee v(v\in\alpha \;\wedge\; \beta)$ und $\dot{\bigvee}_{v\in\alpha}\beta$ für $\dot{\bigvee}(v\in\alpha \;\wedge\; \beta)$ ein (vgl. S. 116–117). In den folgenden Definitionen seien α,β,γ immer Ausdrücke und v,i,j,k,n Variablen, die in α, β und γ nicht frei vorkommen sollen.

Klassen:

α Objekt $:\Leftrightarrow\; \bigvee_v\; \alpha=v.\quad \{v\,|\,\alpha\}:\equiv \boldsymbol{\kappa}\; v\;\alpha.\quad \emptyset:\equiv\{v\,|\,v\neq v\}.\quad \mathbb{D}:\equiv\{v\,|\,v=v\}.$

$\{\alpha\}:\equiv\{v\,|\,v=\alpha\}.\quad \{\alpha,\beta\}:\equiv\{v\,|\,v=\alpha \;\vee\; v=\beta\}.$

α Klasse $:\Leftrightarrow\; \alpha=\{v\,|\,v\in\alpha\}.\quad \alpha$ Individuum $:\Leftrightarrow\; \alpha\in\mathbb{D}.\quad \alpha$ Unmenge $:\Leftrightarrow\; \alpha\notin\mathbb{D}.$

α Menge $:\Leftrightarrow\; \alpha$ Individuum $\wedge\; \alpha$ Klasse. $\quad \alpha$ Urelement $:\Leftrightarrow\; \alpha$ Individuum $\wedge\; \neg\,(\alpha$ Klasse$)$.

$\alpha\subseteq\beta \;:\Leftrightarrow\; \alpha$ Klasse $\wedge\; \beta$ Klasse $\wedge\; \bigwedge_v(v\in\alpha \;\to\; v\in\beta).$

$\alpha\subset\beta \;:\Leftrightarrow\; \alpha\subseteq\beta \;\wedge\; \alpha\neq\beta.\quad \mathcal{P}(\alpha) \;:\equiv\; \{v\,|\,v\subseteq\alpha\}.$

$\alpha\cup\beta \;:\equiv\; \{v\,|\,v\in\alpha \;\vee\; v\in\beta\}.\quad \alpha\cap\beta \;:\equiv\; \{v\,|\,v\in\alpha \;\wedge\; v\in\beta\}.\quad \alpha\setminus\beta \;:\equiv\; \{v\,|\,v\in\alpha \;\wedge\; v\notin\beta\}.$

$\bigcup\alpha \;:\equiv\; \{i\,|\,\bigvee_{j\in\alpha} i\in j\}.\quad \bigcap\alpha \;:\equiv\; \{i\,|\,\bigwedge_{j\in\alpha} i\in j\}.\quad \alpha' \;:\equiv \alpha\cup\{\alpha\}$

$\mathbb{M}:\equiv\{v\,|\,v$ Menge$\}.\quad \mathbb{U}:\equiv\{v\,|\,v$ Urelement$\}.\quad \alpha$ Mengenmenge $:\Leftrightarrow\; \alpha\in\mathbb{M} \;\wedge\; \alpha\subseteq\mathbb{M}.$

α disjunkte Mengenmenge $:\Leftrightarrow\; \alpha$ Mengenmenge $\wedge\; \bigwedge_{ij}(i\in\alpha \;\wedge\; j\in\alpha \;\to\; i\cap j \;=\; \emptyset).$

Paare, Relationen und Funktionen:

$\langle\alpha,\beta\rangle_{\imath\imath} \;:\equiv\; \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}.$

$\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathtt{uu}} \;:\equiv\; \{v\,|\,\bigvee_{ij}\; (i\in\alpha \;\wedge\; j\in\beta \;\wedge\; v=\langle i,j\rangle_{\imath\imath})\}.$

$\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathtt{u}\imath} \;:\equiv\; \{v\,|\,\bigvee_{i}\; (i\in\alpha \;\wedge\; v=\langle i,\beta\rangle_{\imath\imath})\}.$

$\langle\alpha,\beta\rangle_{\imath\mathtt{u}} \;:\equiv\; \{v\,|\,\bigvee_{j}\; (j\in\beta \;\wedge\; v=\langle\alpha,j\rangle_{\imath\imath})\}.$

$$\begin{aligned}\langle\alpha,\beta\rangle \;:\equiv\; \boldsymbol{\imath}\; v\Big(\;&\big(\alpha\in\mathbb{D} \;\wedge\; \beta\in\mathbb{D} \;\wedge\; v=\langle\alpha,\beta\rangle_{\imath\imath}\big) \;\vee\; \big(\alpha\notin\mathbb{D} \;\wedge\; \beta\notin\mathbb{D} \;\wedge\; v=\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathtt{uu}}\big)\\ &\vee\; \big(\alpha\notin\mathbb{D} \;\wedge\; \beta\in\mathbb{D} \;\wedge\; v=\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathtt{u}\imath}\big) \;\vee\; \big(\alpha\in\mathbb{D} \;\wedge\; \beta\notin\mathbb{D} \;\wedge\; v=\langle\alpha,\beta\rangle_{\imath\mathtt{u}}\big)\;\Big).\end{aligned}$$

$\alpha\times\beta \;:\equiv\; \{v\,|\,\bigvee_{i\in\alpha}\bigvee_{j\in\beta} v=\langle i,j\rangle\}.\quad \alpha$ Relation $:\Leftrightarrow\; \alpha\subseteq(\mathbb{D}\times\mathbb{D}).$

α Funktion $:\Leftrightarrow\; \alpha$ Relation $\wedge\; \neg\bigvee_{ijk}\; \big(\langle i,j\rangle\in\alpha \;\wedge\; \langle i,k\rangle\in\alpha \;\wedge\; j\neq k\big).$

α Injektion $:\Leftrightarrow\; \alpha$ Funktion $\wedge\; \neg\bigvee_{ijk}\; \big(\langle i,k\rangle\in\alpha \;\wedge\; \langle j,k\rangle\in\alpha \;\wedge\; i\neq j\big).$

$\mathtt{Db}(\alpha) \;:\equiv\; \{i\,|\,\bigvee_j\langle i,j\rangle\in\alpha\}.\quad \mathtt{Wb}(\alpha) \;:\equiv\; \{j\,|\,\bigvee_i\langle i,j\rangle\in\alpha\}.$

$\alpha:\beta\longrightarrow\gamma \;:\Leftrightarrow\; \alpha$ Funktion $\wedge\; \mathtt{Db}(\alpha)=\beta \;\wedge\; \mathtt{Wb}(\alpha)\subseteq\gamma.$

$\alpha\sim\beta \;:\equiv\; \bigvee_i\; (i$ Injektion $\wedge\; \mathtt{Db}(i)=\alpha \;\wedge\; \mathtt{Wb}(i)=\beta).$

α Unfunktion $:\Leftrightarrow\; \alpha$ Relation $\wedge\; \neg\,\alpha$ Funktion $\wedge\; \bigwedge_{i\in\mathtt{Db}(\alpha)}\Big(\{j\,|\,\langle i,j\rangle\in\alpha\}\notin\mathbb{D} \;\vee\; \dot{\bigvee}_j\langle i,j\rangle\in\alpha\Big).$

α Familie $:\Leftrightarrow\; \alpha$ Funktion $\vee\,\alpha$ Unfunktion. $\quad \alpha$ β-Tupel $:\Leftrightarrow\; \alpha$ Familie $\wedge\,\mathtt{Db}(\alpha)=\beta.$

$\alpha(\beta) \;:\equiv\; \alpha_\beta \;:\equiv\; \boldsymbol{\imath}\; v\;\Big(\dot{\bigvee}_i\big(\langle\beta,i\rangle\in\alpha \;\wedge\; v=i\big) \;\vee\; \big(\{i\,|\,\langle\beta,i\rangle\in\alpha\}\notin\mathbb{D} \;\wedge\; v=\{i\,|\,\langle\beta,i\rangle\in\alpha\}\big)\Big).$

Unendlichkeit und $\in$-Ketten:

α vor-induktiv $:\Leftrightarrow\; \emptyset\in\alpha \;\wedge\; \bigwedge_v(v\in\alpha \;\to\; v'\in\alpha).$

$\omega \;:\equiv\; \bigcap\{v\,|\,v$ ist vor-induktiv$\}.\quad 0:\equiv\emptyset.\quad 1:\equiv\{\emptyset\}.\quad \alpha-1:\equiv\boldsymbol{\imath}\; v\;(v'=\alpha).$

α unendlich $:\Leftrightarrow \bigvee_i (\alpha \sim i \subset \alpha)$.

α unendliche $\in$-Kette $:\Leftrightarrow \alpha\ \omega$-Tupel $\wedge \bigwedge_i \big(i \in \omega \setminus \{0\} \rightarrow \alpha(i) \in \alpha(i-1)\big)$.

α geschlossene Mengenkette $:\Leftrightarrow \bigvee_{n \in \omega \setminus \{0,1\}} \Big(\alpha\colon n \longrightarrow \mathbb{M} \wedge \bigwedge_{i \in n \setminus \{0\}} \big(\alpha(i) \in \alpha(i-1)\big) \wedge \alpha(0) = \alpha(n-1)\Big)$.

Universen:

a $\in$-transitiv $:\Leftrightarrow a$ Klasse $\wedge \bigwedge_{ij} (i \in j \in a \rightarrow i \in a)$.

a $\mathcal{P}$-treu $:\Leftrightarrow a$ Klasse $\wedge \bigwedge_{i \in \mathbb{M}} (i \in a \rightarrow \mathcal{P}(i) \in a)$.

a $\bigcup$-treu $:\Leftrightarrow a$ Klasse $\wedge \bigwedge_{i \in \mathbb{M}} (i \subseteq \mathbb{M} \wedge i \in a \rightarrow \bigcup i \in a)$.

a funktionstreu $:\Leftrightarrow a$ Klasse $\wedge \bigwedge_i (i$ Funktion $\wedge\ \mathtt{Db}(i) \in a \wedge \mathtt{Wb}(i) \subseteq a \rightarrow \mathtt{Wb}(i) \in a)$.

a Universum $:\Leftrightarrow \omega \in a \wedge a$ transitiv $\wedge\ a$ $\mathcal{P}$-treu $\wedge\ a$ $\bigcup$-treu $\wedge\ a$ funktionstreu.

Einsetzung für Variablen (metasprachliche Definition):

Für Ausdrücke α, β und Variablen v soll $\alpha(\frac{\beta}{v})$ einen bestimmten Ausdruck bezeichnen, den wir «das Resultat der *Einsetzung* von β für v in α» nennen, und dessen Bedeutung stets die Bedeutung ist, die α bekommt, *sobald man v als Bezeichnung für das durch β bezeichnete Objekt interpretiert.*[46]

Mit diesen Definitionen lassen sich die **Axiome der Mengenlehre** wie folgt logisch exakt formulieren:

Rahmenaxiom

$$\emptyset = \bot \in \mathbb{D} \quad \wedge \quad \bot \neq \top = \{\emptyset\} \in \mathbb{D} \quad \wedge \quad \mathbb{D} = \underline{\bot} \notin \mathbb{D}$$
$$\wedge \bigwedge_U (U \notin \mathbb{D} \rightarrow U \text{ Klasse}) \quad \wedge \quad \bigwedge_{xy} (x \in y \rightarrow x \in \mathbb{D} \wedge y \text{ Klasse})$$

Extensionalitätsaxiom

$$\bigwedge_{AB} \Big(\Big(A \text{ Klasse} \wedge B \text{ Klasse} \wedge \bigwedge_x (x \in A \leftrightarrow x \in B)\Big) \rightarrow A = B\Big)$$

Komprehensionsaxiom

$$\{x \mid \varphi\} \text{ Klasse} \wedge \bigwedge_{a \in \mathbb{D}} (a \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi(\tfrac{a}{x}))$$

Auswahlaxiom

$$(\bigvee_x \varphi) \rightarrow \varphi(\tfrac{\varepsilon\, x\, \varphi}{x})$$

Axiom für Urelemente

$$\mathbb{U} \sim \mathbb{D}$$

---

[46] Genauer heißt dies: $\alpha(\frac{\beta}{v})$ soll ein Ausdruck sein, der in jeder Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B} \rangle$ dieselbe Bedeutung hat wie α in $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}(v \mapsto \mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}}(\beta)) \rangle$. Man kann meist einen solchen Ausdruck dadurch erhalten, dass man in α *alle freien Exemplare der Variablen v durch β ersetzt.* Ist etwa α der Ausdruck $\bigvee \mathtt{x}(\mathtt{x} \in v)$ mit der Bedeutung «es gibt ein Element von v» und ist β ein Name, kann man als $\alpha(\frac{\beta}{v})$ den Ausdruck $\bigvee \mathtt{x}(\mathtt{x} \in \beta)$ nehmen: Dieser hat ja die Bedeutung «es gibt ein Element von β», die auch $\bigvee \mathtt{x}(\mathtt{x} \in v)$ bekommt, wenn man v als Bezeichnung für das interpretiert, was β bezüglich der gerade betrachteten Basis bezeichnet. Besitzt jedoch β freie Variablen, so könnten in dem resultierenden Ausdruck gewisse in β freie Variablenexemplare durch Quantoren von α gebunden werden, wodurch sich der Sinn radikal ändern kann („Variablenkollision"). Ist etwa β die Variable $\mathtt{x}$, so erhielten wir $\bigvee \mathtt{x}(\mathtt{x} \in \mathtt{x})$ mit der Bedeutung «es gibt ein Objekt, das Element von sich selbst ist», was *nicht* die Bedeutung ist, die $\bigvee \mathtt{x}(\mathtt{x} \in v)$ bekommt, wenn man v als Bezeichnung für das Objekt interpretiert, was $\mathtt{x}$ bezüglich der gerade betrachteten Basis bezeichnet. Um so etwas zu vermeiden, *ersetzen wir die gebundenen Variablenexemplare von α zunächst durch solche, die in β nicht vorkommen* (sog. *gebundene Umbenennung* der Variablen)*, und ersetzen dann in dem resultierenden Ausdruck α^* die freien Exemplare von v durch β.* Beim Übergang von α zu α^* sind die Variablenexemplare, die man für die gebundenen Variablenexemplare von α einsetzt, so zu wählen, dass dabei die *Bindungsstrukturen erhalten bleiben*: das soll heißen, dass (1) wann immer das i-te mit dem j-ten Zeichen von α identisch war, dies auch für das i-te und j-te Zeichen des entstehenden neuen Ausdrucks α^* gilt, und dass (2) wann immer in α das i-te Zeichenexemplar ein Operatorexemplar war, und es sich bei dem j-ten Zeichenexemplar um ein von diesem gebundenes Variablenexemplar handelte (vgl. Fußnote 14 auf S. 359), dasselbe auch für das i-te und j-te Zeichenexemplar von α^* zutrifft. Unter diesen Voraussetzungen hat nämlich α^* dieselbe Bedeutung wie α. Ersetzen wir dann die freien Exemplare von v in α^* durch β, so hat der resultierende Ausdruck α^{**} offenbar die gewünschten Eigenschaften. Wir nennen solch ein α^{**} daher «das Resultat *einer* Einsetzung von β für v in α». Aus der Menge aller derartigen Einsetzungs-Resultate denken wir uns eines fest ausgewählt, nennen es «das Resultat *der* Einsetzung von β für v in α» und bezeichnen es als $\alpha(\frac{\beta}{v})$.

Nullmengenaxiom $\emptyset \in \mathbb{M}$

Antizirkularitätsaxiom $\neg \bigvee_x x$ geschlossene Mengenkette

Teilmengenaxiom $\bigwedge_{xy} (y \in \mathbb{M} \wedge x \subseteq y \rightarrow x \in \mathbb{M})$

Ersetzungsaxiom $\bigwedge_f (f \text{ Funktion} \wedge \mathtt{Db}(f) \in \mathbb{M} \rightarrow \mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{M})$

Paarmengenaxiom $\bigwedge_{x \in \mathbb{D}} \bigwedge_{y \in \mathbb{D}} \{x, y\} \in \mathbb{M}$

Potenzmengenaxiom $\bigwedge_x (x \in \mathbb{M} \rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathbb{M})$

Vereinigungsmengenaxiom $\bigwedge_x (x \in \mathbb{M} \wedge x \subseteq \mathbb{M} \rightarrow \bigcup(x) \in \mathbb{M})$

Unendlichkeitsaxiom $\bigvee_x (x \in \mathbb{M} \wedge x \text{ unendlich})$

Universenaxiom $\bigwedge_x \bigvee_U (x \in U \wedge U \in \mathbb{M} \wedge U \text{ Universum})$

Für die Buchstaben A, B, U, a, x, y, f sind hier beliebige Variablen zu setzen, wobei allerdings für verschiedene dieser Buchstaben auch verschiedene Variablen gesetzt werden sollen; für φ ist ein Ausdruck zu setzen, der nach Interpretation der für x eingesetzten Variablen geschlossen ist.[47]
Um aus diesem Axiomensystem das System der klassischen „NBG-Mengenlehre“ zu erhalten, streiche man das Universenaxiom und ersetze das Antizirkularitätsaxiom durch das *Fundierungsaxiom* (5.19.4 S. 254),[48] das obige Auswahlaxiom durch das *klassische* (5.11.2 S. 152)[49] oder das *globale* (5.11.6 S. 154),[50] und schließlich das Axiom für Urelemente durch die Forderung $\mathbb{U} = \emptyset$ (*Reinheitsaxiom*).

Nun bleibt noch die *Beweistätigkeit* bzw. das *Schlussfolgern* zu beschreiben. Dabei möchte man

(1) *entscheiden*, ob eine *vorgegebene* Formel allgemeingültig ist oder aus Axiomen folgt,
(2) Formeln *auffinden*, die allgemeingültig sind oder aus vorgegebenen Axiomen folgen.

Beides soll *formal* geschehen, d. h. durch Ablesen von Zeichenreihen, die *nach rein syntaktischen Kriterien* gebildet werden. Ziel (1) lässt sich erreichen, wenn die vorgegebene Formel eine sog. *reine Junktorformel* ist, d. h. eine Formel, in der außer Variablen und Namen nur sog. *Junktoren* vorkommen. Ein Junktor ist ein Formelfunktor c mit der Eigenschaft, dass die Wahrheit oder Falschheit der mit ihm gebildeten Ausdrücke $\ll \mathrm{c}\, a_1 \ldots a_n \gg$ allein davon abhängt, welcher der Teilausdrücke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wahr ist (also den Wahrpunkt-Repräsentanten 1 bezeichnet), und welcher nicht (also irgend ein von 1 verschiedenes Objekt als Denotat hat, für das wir symbolisch $\neq$ schreiben). Von den Funktoren unserer Ursprache sind alle bis auf $=$ und $\in$ Junktoren. Hat man eine reine Junktorformel, so kann man ihren Wahrheitswert ausgehend von den Denotaten ihrer Variablen und Namen stets in endlich vielen Schritten ermitteln, und es lässt sich anhand einer so genannten „Wahrheitswertetabelle“ ablesen, ob sie allgemeingültig ist: Man listet dabei einfach alle möglichen Fälle auf.

---

47 Für jede derartige Einsetzung entsteht je ein Axiom. Somit handelt es sich hier (außer beim Axiom für Urelemente und beim Nullmengenaxiom) eigentlich um sog. *Axiomen-Schemata*, zu denen jeweils unendlich viele Axiome gehören. Unverzichtbar sind diese Schemata nur beim Komprehensions– und Auswahlaxiom, bei den anderen könnte man statt dessen auch einzelne Axiome mit ganz bestimmten Variablen setzen.

48 $\neg \bigvee_x$ (x ist unendliche $\in$-Kette).

49 $\bigwedge_{\mathfrak{M}} \Big(\mathfrak{M} \text{ disjunkte Mengenmenge} \wedge \emptyset \notin \mathfrak{M} \rightarrow \bigvee_{A \in \mathbb{M}} \bigwedge_{M \in \mathfrak{M}} \dot{\bigvee}_{m \in M} (m \in A)\Big)$.

50 $\bigvee_f (f \text{ Funktion} \wedge \mathtt{Db}(f) = \mathbb{M} \setminus \emptyset \wedge \bigwedge_{M \in \mathtt{Db}(f)} f(M) \in M)$.

Dass z. B. die Formel $\varphi := ((\neg\alpha) \vee \beta) \leftrightarrow (\alpha \to \beta)$ für beliebige Ausdrücke α und β allgemeingültig ist, zeigt die folgende Wahrheitswertetabelle:

	α	β	$(\neg\alpha)$	$(\neg\alpha) \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	φ
1. Fall	1	1	0	1	1	1
2. Fall	1	⊣	0	0	0	1
3. Fall	⊣	1	1	1	1	1
4. Fall	⊣	⊣	1	1	1	1

Da in der Spalte ganz rechts nur 1 vorkommt, hat die Formel in jedem Fall das Denotat 1 und ist also allgemeingültig. Ein solches Entscheidungsverfahren ist im Allgemeinen nicht möglich, wenn Nicht-Junktoren involviert sind. Z. B. hängt bei einer Formel wie $\bigwedge v\alpha$ der Wahrheitswert von den Werten $\mathtt{ob}_{\mathcal{M},\mathcal{B}(v\mapsto x)}(\alpha)$ für alle x aus der Objektkollektion des Grundbereichs ab, so dass man eventuell unendlich viele Fälle betrachten muss, was eine direkte Abfrage aller Möglichkeiten unmöglich macht. Präzise hat Alonzo Church 1936 die sog. „Unentscheidbarkeit“ der Prädikatenlogik bewiesen:[51]

6.4.1 Unentscheidbarkeitssatz *Mit einem formalen Verfahren lässt sich nicht in endlich vielen Schritten für jede vorgegebene prädikatenlogische Formel entscheiden, ob sie allgemeingültig ist.*

So ist in der Prädikatenlogik (und erst recht in der Klassen– und Modallogik) das Entscheidungsproblem nicht in jedem Fall formal lösbar. Man kann hier jedoch das zweite Ziel der Beweistätigkeit weiterverfolgen: das Auffinden gültiger Formeln. Dies geschieht mit Hilfe der so genannten *Beweiskalküle*. Allgemein ist ein mit einem Beweiskalkül vollzogener Beweis ein nichtleerer Zeichenreihenstapel, der zeilenweise nach gewissen Regeln hingeschrieben werden kann, wobei die unterste Zeile als durch den Kalkül «abgeleitet» oder «bewiesen» gilt. Es gibt verschiedene Arten solcher Kalküle. Ich lege mich für die weitere Diskussion hier auf die folgende einfache Form fest:

6.4.2 Erklärung Ein *Beweiskalkül* ist ein Tupel $\langle\!\langle \mathbb{L}, R_1, \ldots, R_n \rangle\!\rangle$, wobei $\mathbb{L}$ eine nichtleere Klasse von allgemeingültigen Formeln (Tautologien) ist (diese Tautologien heißen die *logischen Axiome* oder *Anfangsregeln* des Kalküls) und $R_1, \ldots, R_n$ Relationen sind, die Klassen von Ausdrücken auf Ausdrücke ausrichten (diese Relationen heißen die *Regeln* des Kalküls).
Richtet die Regel R des Kalküls die Klasse $V := \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ von Ausdrücken auf α aus, so sagen wir, dass in dem Kalkül *gemäß Regel R aus der Klasse V* (oder aus den *Voraussetzungen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$) *auf α geschlossen* oder dass gemäß dieser Regel aus dieser Klasse *die Folgerung α gezogen wird.*

Eine Regel R nennt man *korrekt*, falls sie aus gültigen Voraussetzungen nur gültige Schlussfolgerungen zu ziehen gestattet. Genauer muss man die folgenden Begriffe auseinander halten:

> Eine Regel R heißt *korrekt* (im gewöhnlichen Sinn), wenn für die Voraussetzungsklasse V, aus der gemäß R eine Folgerung φ gezogen werden kann, $V \Rightarrow \varphi$ gilt, also *jedes Modell*, welches die Formeln von V alle gültig macht,[52] auch φ gültig macht.
>
> Eine Regel R heißt *strikt wahrheitserhaltend*, wenn sogar *jede Basis*, welche die Voraussetzungen alle gültig macht,[53] auch φ gültig macht.

[51] Vgl. Church, *Entscheidungsproblem.*

Es ist klar, dass strikt wahrheitserhaltende Regeln auch korrekt im gewöhnlichen Sinn sind, aber das Umgekehrte muss nicht der Fall sein, wie wir gleich am Beispiel der Generalisierung sehen werden. Die vier folgenden berühmten Schlussregeln werden in vielen Beweiskalkülen verwendet:

Regel 1: Modus Ponens. Diese Regel richtet jede Klasse $\{\alpha, \alpha \to \beta\}$ (worin α, β Ausdrücke sind) auf den Ausdruck β aus. Man darf also gemäß dieser Regel aus α und $\alpha \to \beta$ auf β schließen.

Regel 2: Einsetzungsregel. Diese Regel richtet jede einelementige Klasse $\{\bigwedge v\alpha\}$ (worin v eine Variable und α ein Ausdruck ist) auf alle Ausdrücke $\alpha(^{\tau}_{v})$ aus, die durch Einsetzung eines Ausdrucks τ für v in α resultieren.[54] Man darf gemäß dieser Regel also von $\bigwedge \mathtt{x}(\mathtt{x} = \mathtt{x})$ auf $0 = 0$ schließen.

Regel 3: Umbenennungsregel. Diese Regel richtet jede einelementige Klasse $\{\alpha\}$ (für einen beliebigen Ausdruck α) auf alle Ausdrücke α^* aus, die aus α dadurch entstehen, dass man in α gebundene Variablenexemplare durch eine andere Variablen ersetzt, und zwar so, dass die Bindungsstrukturen erhalten bleiben.[55] Den Übergang von α zu einem solchen α^* bezeichnet man als (gebundene) *Umbenennung*. Gemäß dieser Regel darf man z. B. von $\bigwedge \mathtt{x}(\mathtt{x} = \mathtt{x})$ auf $\bigwedge \mathtt{x\prime}(\mathtt{x\prime} = \mathtt{x\prime})$ schließen.

Regel 4: Generalisierung. Diese Regel richtet jede einelementige Klasse $\{\alpha\}$ (für einen beliebigen Ausdruck α) auf jede Formel $\bigwedge v\alpha$ aus (wobei v eine beliebige Variable ist). Gemäß dieser Regel darf man z. B. von $\mathtt{x} = \mathtt{x}$ auf $\bigwedge \mathtt{x}(\mathtt{x} = \mathtt{x})$ schließen.

Die Regeln 1 bis 3 sind strikt wahrheitserhaltend: Gilt α und $\alpha \to \beta$, so auch β (*Modus Ponens*), gilt α für alle v, so auch für jedes τ (*Einsetzungsregel*), und gebundene (also rein syntaktisch gebrauchte) Variablen sind austauschbar, solange die Bindungsstrukturen erhalten bleiben (*Umbenennungsregel*). Aber die *Generalisierungsregel* ist *nicht* strikt wahrheitserhaltend: Gilt α in einer *Basis*, muss dort $\forall v\alpha$ nicht gelten, denn was für *ein* Objekt gilt, muss nicht *für alle* gelten. Trotzdem ist die Regel im gewöhnlichen Sinn korrekt: Gilt α in einem *Modell* $\mathcal{M}$, so ist α für *jede* auf $\mathcal{M}$ aufbauende Belegung $\mathcal{B}$ in $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B} \rangle$ gültig, also auch in der Basis $\langle \mathcal{M}, \mathcal{B}(v \mapsto x) \rangle$ für jedes x, und das heißt, dass $\bigwedge v\alpha$ in $\mathcal{M}$ gilt. Mit Hilfe von Kalkülen können wir nun den Begriff des formalen Beweises erklären:

6.4.3 Erklärung Sei $\mathfrak{K} = \langle\!\langle \mathbb{L}, R_1, \ldots R_n \rangle\!\rangle$ ein Beweiskalkül und $\mathbb{A}$ ein Axiomensystem. Eine *formale Ableitung* aus $\mathbb{A}$ (mittels $\mathfrak{K}$) oder ein (mit $\mathfrak{K}$ vollzogener) von $\mathbb{A}$ ausgehender *formaler Beweis* ist ein nichtleerer Zeichenreihenstapel, bei dem für jedes Zeilenexemplar Z gilt:

1. Entweder ist Z Exemplar eines Axioms aus $\mathbb{A}$ oder eines logischen Axioms aus $\mathbb{L}$.
2. Oder es gibt eine Regel R des Kalküls und eine Klasse V von Formeln, so dass aus den Formeln von V gemäß R auf Z geschlossen werden darf, und es zu jeder Formel aus V mindestens ein Exemplar gibt, das in dem Stapel oberhalb von Z steht.

Ist φ die unterste Zeile einer solchen Ableitung, sagt man, dass diese Ableitung eine *Ableitung von* φ oder ein *formaler Beweis von* φ (aus den Axiomensystem $\mathbb{A}$ mittels Kalkül $\mathfrak{K}$) ist. Existiert eine solche Ableitung, so heißt φ (aus $\mathbb{A}$ mittels $\mathfrak{K}$) *ableitbar* und man schreibt hierfür

$$\mathbb{A} \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \quad \text{oder kurz} \quad \mathbb{A} \vdash \varphi \qquad \text{[Lesart: aus } \mathbb{A} \text{ ist } \varphi \text{ ableitbar].}$$

Ist das vorausgesetzte Axiomensystem $\mathbb{A}$ die leere Klasse, so nennt man φ auch „schlechthin“ mittels des Kalküls $\mathfrak{K}$ ableitbar oder mittels $\mathfrak{K}$ *beweisbar* und schreibt hierfür auch

$$\vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \quad \text{oder kurz} \quad \vdash \varphi \qquad \text{[Lesart: } \varphi \text{ ist beweisbar].}$$

---

[52] Vgl. oben S. 367.

[53] Vgl. oben S. 367.

[54] Siehe Fußnote 46 auf S. 375.

[55] Was dies bedeutet, wurde in Fußnote 46 auf S. 375 erklärt.

Ist der Kalkül $\mathfrak{K}$ im gewöhnlichen Sinn korrekt (bzw. ist er sogar *strikt wahrheitserhaltend*) und gelten alle Axiome des Systems $\mathbb{A}$ in einem *Modell* (bzw. in einer *Basis*), so gelten alle Zeilen einer Ableitung aus $\mathbb{A}$ mittels $\mathfrak{K}$ ebenfalls *in diesem Modell* (bzw. *in dieser Basis*). Ist daher φ aus $\mathbb{A}$ mittels eines korrekten Kalküls ableitbar, so gilt auch, dass φ aus $\mathbb{A}$ logisch folgt (siehe S. 368): Wenn $\mathbb{A} \vdash \varphi$ gilt, muss auch $\mathbb{A} \Mapsto \varphi$ gelten. Ebenso müssen alle Formeln, die mit dem Kalkül beweisbar (also aus $\emptyset$ ableitbar) sind, schlechthin in jedem Modell gelten und daher allgemeingültig sein:

6.4.4 Metatheorem *Sei $\mathfrak{K}$ korrekt, φ eine Formel, $\mathbb{A}$ ein Axiomensystem. Dann gilt:*

Aus $\mathbb{A} \vdash \varphi$ (Ableitbarkeit von φ aus $\mathbb{A}$) *folgt* $\mathbb{A} \Mapsto \varphi$ (logische Implikation von φ durch $\mathbb{A}$) *und*
aus $\vdash \varphi$ (Beweisbarkeit von φ) *folgt* $\Mapsto \varphi$ (Allgemeingültigkeit von φ).

Hat man mit einem korrekten Ur-Kalkül $\mathfrak{K} = \langle\!\langle \mathbb{L}, R_1, \ldots, R_n \rangle\!\rangle$ eine Formel φ bewiesen, so ist diese gemäß 6.4.4 allgemeingültig, und so kann man φ unter die logischen Axiome aufnehmen, d. h. zu einem erweiterten Kalkül $\mathfrak{K}' = \langle\!\langle \mathbb{L}', R_1, \ldots, R_n \rangle\!\rangle$ übergehen, dessen logisches Axiomensystem $\mathbb{L}'$ außer den Axiomen von $\mathbb{L}$ auch φ enthält. Hat man außerdem aus einem Axiomensystem $\mathbb{A}$ mittels $\mathfrak{K}$ eine Formel φ abgeleitet, so ist die Regel, welche die Klasse $\mathbb{A}$ auf φ ausrichtet, wieder korrekt bzw. strikt wahrheitserhaltend, wenn die in der Ableitung benutzten Regeln dies waren. Daher kann man diese Regel als neue Regel R_{n+1} dem Kalkül hinzufügen, also zu einem erweiterten Kalkül $\mathfrak{K}' = \langle\!\langle \mathbb{L}, R_1, \ldots, R_n, R_{n+1} \rangle\!\rangle$ übergehen. So kann man den Ur-Kalkül immer mehr ausweiten, wodurch zukünftige Beweise und Ableitungen kürzer werden, indem sie auf den schon erarbeiteten Beweisen aufbauen. *Die ständige Erweiterung des Kalküls ist es nun, die zusammen mit der Erweiterung der sich entfaltenden Sprache durch immer neue Definitionen die Pragmatik der Logik ausmacht.*
Der Ur-Kalkül $\mathfrak{K}$, mit dem diese Entwicklung anfängt, sollte mit einfach durchschaubaren Axiomen und Regeln ausgestattet sein. Er ist neben die Ursprache zu stellen und stellt gewissermaßen eine Gebrauchsanleitung dar, wie die Ausdrücke dieser Sprache zweckdienlich zu verwenden sind. Erste theoretische Versuche, einen derart grundlegenden Kalkül aufzustellen, wurden von Frege in seiner *Begriffsschrift* (1879) und seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* (1893) unternommen. Ein Kalkül, der auch praktisch eingesetzt wurde, um große Teile der Mathematik daraus abzuleiten, war sodann der von Russell und Whitehead im ersten Band der *Principia Mathematica* (1910) eingeführte; doch haben Russell und Whitehead noch nicht explizit alle Regeln aufgestellt, die sie tatsächlich benutzt haben, und andererseits enthielt ihr System neben Axiomen für die (kennzeichnungs– und klassenlogisch erweiterte) Prädikatenlogik erster Stufe auch solche für so genannte Prädikatenlogiken „höherer Stufen“, die für die Mathematik kaum Bedeutung haben (siehe S. 360). Als erster von diesen Mängeln freier Grundkalkül der klassischen Prädikatenlogik kann der 1928 von Hilbert und Ackermann vorgestellte und 1929 von Gödel modifizierte Kalkül gelten,[56] der sich eng an die Regeln der *Principia Mathematica* anlehnte. Vereinfacht man den Gödelschen Kalkül noch etwas, erhält man schließlich den folgenden Kalkül, der sich hervorragend als Ur-Kalkül eignet:[57]

[56] Vgl. Hilbert und Ackermann, *Logik* S. 53f. Zur historischen Einordnung des Werkes vgl. Church, *Mathematical Logic* S. 62. Gödel fügte vor allem noch zwei Gleichheitsaxiome hinzu (vgl. Gödel, *Vollständigkeit des Logikkalküls*, Werke Band 1 S. 66).

[57] Bei den Vereinfachungen folge ich zum Teil Albert Harold Lightstone. Der wesentliche Unterschied zum Gödelschen Originalsystem ist, dass Gödel drei weitere Axiomenschemata hat: $(\bigwedge vF(x)) \rightarrow F(y)$, was durch die Einsetzungsregel überflüssig ist, $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$, was man mit Hilfe der übrigen Axiome ableiten kann (vgl. Lightstone, *Logic* Lemma 7 S. 42 im Kontext von S. 37–2: Lightstone leitet dies allein mit Hilfe der ersten drei Schemata ab), und $(\bigwedge v(\xi \vee \alpha)) \rightarrow (\xi \vee \bigwedge v\alpha)$, wobei ξ eine Aussage ist, also v in ξ nicht frei vorkommt. Dieses dritte Schema kann man ebenfalls aus den anderen Axiomen ableiten (vgl. Lightstone, *Logic* Exercise 6 S. 169), wobei man im System von Lightstone (siehe ebd. S. 159) hierzu die (korrekte, aber nicht streng wahrheitserhaltende) Regel braucht, die von $A \rightarrow B$ auf $A \rightarrow \bigwedge vB$ schließen lässt. Diese lässt sich aber durch die von mir bevorzugte Generalisierungsregel ersetzen. Von Lightstones System unterscheidet sich meines darin, dass Lightstone statt der Generalisierung die genannte Regel nimmt, statt der Einsetzungsregel (wie Gödel) ein entsprechendes Axiom aufstellt und die Umbenennungsregel weglässt (siehe hierzu unten, Fußnote 61).

Als Regeln hat dieser Kalkül die vier oben besprochenen (Modus Ponens, Einsetzungsregel, Umbenennungsregel und Generalisierung), und seine logischen Axiome sind die folgenden:[58]

Axiomen-Schema 1:	Jede Formel	$(\alpha \vee \alpha) \;\rightarrow\; \alpha$	(Tautologie-Prinzip),
Axiomen-Schema 2:	Jede Formel	$\alpha \;\rightarrow\; (\alpha \vee \beta)$	(Additions-Prinzip),
Axiomen-Schema 3:	Jede Formel	$(\alpha \rightarrow \beta) \;\rightarrow\; \big((\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\beta \vee \gamma)\big)$	(Summations-Prinzip),
Axiomen-Schema 4:	Jede Formel	$x = x$	(Reflexivität der Gleichheit),
Axiomen-Schema 5:	Jede Formel	$(x = y) \;\rightarrow\; (\mathrm{f}(x) \rightarrow \mathrm{f}(y))$	(Einsetzungsregel).

Hierbei sind α, β, γ Formeln, x, y Terme, $\mathrm{f}(x)$ eine Funktorformel «f $\ldots x \ldots$», zu deren unmittelbaren Teilausdrücken x gehört, und $\mathrm{f}(y)$ ist das Resultat «f $\ldots y \ldots$» der Ersetzung des angeführten Exemplars von x in «f $\ldots x \ldots$» durch y.

Dass die Axiome aus (1) bis (3) allgemeingültig sind, ist leicht einzusehen und kann mit einer Wahrheitswertetabelle sofort nachgeprüft werden, und die Gültigkeit der Gleichheitsaxiome (4) und (5) ist jedem unmittelbar einsichtig, der den Identitätsbegriff kennt. Zum Verständnis des Gödelschen Kalküls ist noch zu beachten, dass Gödel zu den ursprünglichen Zeichen mit vorgegebener Bedeutung nur $\neg, \vee, \bigwedge$ und $=$ rechnet; daneben rechnet er mit frei wählbaren Formelfunktoren („Funktionsvariablen“) wie z. B. $\in$ sowie mit 0-stelligen Formel– und Termfunktoren („Objektvariablen“ und „Aussagevariablen“) wie z. B. $\top\bot, \underline{\bot}$. Schließlich können weitere Funktoren und auch Operatoren mittels der genannten Zeichen definiert werden: So definiert Gödel die in den Axiomen vorkommenden Ausdrücke der Form $X \rightarrow Y$ durch die gleichwertige Formel $(\neg X) \vee Y$, setzt also $X \rightarrow Y :\Leftrightarrow (\neg X) \vee Y$. Parallel zu jeder solchen Definition $N :\equiv A$ oder $N :\Leftrightarrow A$ muss man sich jeweils eine neue **definitorische Regel** zum Kalkül hinzugefügt denken, welche für jeden Ausdruck α die einelementige Klasse $\{\alpha\}$ auf jeden Ausdruck α^* ausrichtet, der dadurch entsteht, dass man in α Exemplare von N durch solche von A oder umgekehrt solche von A durch solche von N ersetzt. Mit diesem genannten Kalkül ist nun zum Beispiel die Tautologie $\varphi \vee \neg\varphi$ (für beliebige Formeln φ), also der logische Ausdruck für den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, wie folgt ableitbar:

1.	$(\varphi \vee \varphi) \rightarrow \varphi$	[Tautologie-Prinzip]
2.	$\Big((\varphi \vee \varphi) \rightarrow \varphi\Big) \;\rightarrow\; \Big(\big(\neg\varphi \vee (\varphi \vee \varphi)\big) \rightarrow \big(\varphi \vee \neg\varphi\big)\Big)$	[Summations-Prinzip]
3.	$\big(\neg\varphi \vee (\varphi \vee \varphi)\big) \;\rightarrow\; (\varphi \vee \neg\varphi)$	[Modus Ponens im Blick auf Zeilen 1 und 2]
4.	$\big(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \varphi)\big) \;\rightarrow\; (\varphi \vee \neg\varphi)$	[Definitorische Regel für $\rightarrow$ im Blick auf Zeile 3]
5.	$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \varphi)$	[Additions-Prinzip]
6.	$\varphi \vee \neg\varphi$	[Modus Ponens im Blick auf Zeilen 4 und 5]

So haben wir die Tautologie $\varphi \vee \neg\varphi$ aus unseren logischen Axiomen hergeleitet.[59] Nun gilt der erstaunliche Satz, dass man überhaupt *alle* Tautologien schlechthin derartig ableiten kann. Unser Kalkül hat nämlich die Eigenschaft, nicht nur korrekt, sondern auch *vollständig* zu sein:

6.4.5 Erklärung Ein Kalkül heißt in Bezug auf eine logische Sprache *vollständig*, wenn *jede* allgemeingültige Aussage dieser Sprache mit ihm formal beweisbar und *jede* aus einem in dieser Sprache formulierbaren Axiomensystem $\mathbb{A}$ folgende Formel mit ihm formal aus $\mathbb{A}$ ableitbar ist. Eine logische Sprache selbst (etwa die Prädikatenlogik) heißt vollständig,[60] wenn es einen in Bezug auf sie vollständigen Kalkül gibt.

---

[58] Die Bezeichnungen der ersten drei Schemata als „principle of tautology“, „principle of addition“ und „principle of summation“ stammen aus Russell und Whitehead, *Principia Mathematica* Band 1 S. 96f (*1.2, *1.3 und *1.6), die letzten beiden gehen auf Leibniz zurück: „[C]e qui est le même, est egal“, und: „Mettant des choses egales à la place, l'egalité demeure“ (Leibniz, *Nouveaux essais* Buch 4 Kap. 7 § 10, Schriften Band 3/2 S. 374).

[59] Dies heißt nicht, dass $\varphi \vee \neg\varphi$ (der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*) eine unseren logischen Axiomen nachgeordnete Tautologie wäre. Denn dieser Satz, der sich mit dem Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ zum Kontradiktionsprinzip ergänzt (siehe 34 auf S. 43) muss bereits bei der Festlegung der Semantik als gültig anerkannt werden (siehe die philosophische Analyse auf S. 43–44). Daher bleibt die traditionelle Vorrangstellung des Kontradiktionsprinzips vor anderen Tautologien *auf metalogischem Gebiet* unangetastet.

[60] Genauer müsste man nicht die *Sprache* allein, sondern das „logische System“ vollständig nennen, das eine Sprache und eine zugehörige Semantik (nebst Modellbegriff) umfasst.

Für einen korrekten *und* vollständigen Kalkül $\mathfrak{K}$ gilt also mit Blick auf Metatheorem 6.4.4, dass die semantisch definierten Begriffe der *Allgemeingültigkeit* und *Folgerung aus* $\mathbb{A}$ mit den rein syntaktisch definierten der *Beweisbarkeit* bzw. der *Ableitbarkeit aus* $\mathbb{A}$ genau umfangsgleich sind, und insofern eine „vollständige" rein syntaktische („formale") Beschreibung der Semantik möglich ist:

6.4.6 Metatheorem Sei $\mathfrak{K}$ korrekt und vollständig, φ Formel und $\mathbb{A}$ Axiomensystem. *Dann gilt:* $\vdash \varphi$ *genau dann, wenn* $\Vdash \varphi$, *und* $\mathbb{A} \vdash \varphi$ *genau dann, wenn* $\mathbb{A} \Vdash \varphi$.

Die Vollständigkeit ist nun bei einem Kalkül wie dem GÖDELschen deshalb so erstaunlich, weil hier aus einem übersichtlich gestalteten Satz von Axiomen und Regeln *wirklich alle* (beliebig kompliziert aufgebauten) Tautologien und Folgerungsbeziehungen hergeleitet werden können. Man hat hier das Gefühl, dass die Unendlichkeit mit „endlichen" Mitteln erobert wird, nämlich mit nur fünf Axiomen-Schemata und vier Regeln.[61] Zwar ist die Anzahl der einzelnen Axiome unendlich, aber wir haben es nur mit einer endlichen Anzahl von „Axiomen-Gestalten" zu tun, mit welcher die „unendlich vielgestaltige" Klasse der Tautologien und Folgerungen vollständig beschrieben werden kann.[62] So war es einer der Höhepunkte in der Entwicklung der Logik seit ARISTOTELES, als GÖDEL 1929 in seiner Dissertation erstmals die Vollständigkeit eines Kalküls der Prädikatenlogik beweisen konnte:[63]

6.4.7 Gödelscher Vollständigkeitssatz *Die gewöhnliche prädikatenlogische Sprache* (d. h. diejenige der ersten Stufe) *ist „vollständig" in dem Sinn, dass es einen korrekten und endlich gestalteten Kalkül gibt, mit dem sämtliche allgemeingültigen Formeln dieser Logik bewiesen und sämtliche Folgerungen aus beliebigen in dieser Sprache formulierbaren Axiomen abgeleitet werden können.*

Inzwischen ist die Vollständigkeit weiterer konkreter Kalküle bewiesen worden. Vollständig sind die von Gerhard GENTZEN aufgestellten „Kalküle des natürlichen Schließens"[64] ebenso wie die von GLUBRECHT, TODT und OBERSCHELP entwickelten Kalküle der mehrsortigen Prädikatenlogik sowie der Klassen– und Ausdruckslogik,[65] und schließlich auch modallogische Kalküle.[66] Gibt es auch für unsere logische Ursprache einen vollständigen Kalkül? Diesbezüglich gilt:

6.4.8 Metatheorem *Für die Sprache mit den Konstanten* $\top$, $\top$, $\underline{\perp}$, $-$, $\neg$, $\wedge$, $|$, $\vee$, $\dot{\vee}$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$, $\in$, $\bigwedge, \bigvee, \dot{\bigvee}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}$ (aber *ohne* den Selektor $\boldsymbol{\varepsilon}$) *gibt es einen endlich gestalteten vollständigen Kalkül.*

Beweis. Ich zeige im Beweisanhang auf S. 486–487, dass zu jeder Formel φ dieser Sprache eine äquivalente, in Abhängigkeit von φ angebbare Formel φ^* existiert (so dass also $\varphi \Leftrightarrow \varphi^*$), *in der*

---

[61] Man kann hier kaum noch wesentliche Reduktionen vornehmen. LIGHTSTONE konnte zwar dank seiner besonderen Definition von Einsetzung und Variablenvertauschung die Umbenennungsregel weglassen (vgl. LIGHTSTONE, *Logic* Theorem 1 S. 169f), aber ich halte diese Regel für eine natürliche Ergänzung der Einsetzungsregel, also des Schlusses von $\bigwedge x\varphi$ auf $\varphi(^{\tau}_{v})$: Denn man wird Einsetzungen in der Praxis häufig in Kombination mit einer Umbenennung durchführen, um Variablenkollision zu vermeiden (vgl. Fußnote 46). Eine andere Reduktion geht auf Jean-Pierre NICOD (1893–1924) zurück: NICOD hat gezeigt, wie man die drei ersten Axiomen-Schemata durch ein einziges ersetzen kann, in dem nur noch der Funktor $|$ vorkommt: Wenn man den Modus Ponens durch den Schluss von p und $p|(r|q)$ auf q ersetzt, lassen sich jene drei aus dem Axiomen-Schema $\Big((p|(q|r)\Big) \mid \Big(t|(t|t)) \mid \big((s|q)|((p|s)|(p|s))\big)\Big)$ ableiten (vgl. NICOD, *Reduction*). Offensichtlich ist aber dieses Schema aufgrund seiner Komplexität nicht wesentlich einfacher die genannten drei, die man dadurch einsparen kann.

[62] Man kann dies mit Begriffen aus der Computerprogrammierung präzisieren: Der Kalkül ist derart, dass man ein Programm schreiben könnte, das *jede einzelne ableitbare Formel* φ *irgendwann nach endlich vielen Schritten ausgeben würde*, wenngleich die Ausgabe *aller* Formeln, weil es unendlich viele sind, nie zum Abschluss käme.

[63] Vgl. GÖDEL, *Vollständigkeit des Logikkalküls* und GÖDEL, *Vollständigkeit des Funktionenkalküls.*

[64] Vgl. GENTZEN, *Logisches Schließen.*

[65] Vgl. GLUBRECHT et al., *Klassenlogik.*

[66] Vgl. FRIEDRICHSDORF, *klassische und intensionale Logik* S. 263–272.

außer Variablen nur noch die Zeichen $\underline{\perp}, \neg, \vee, =, \in, \bigwedge$ *vorkommen.*[67] Wir nennen nun φ^* die *Reduktion* von φ und φ eine *Erweiterung* von φ^* und nehmen zu unserem auf S. 379–380 beschriebenen vollständigen Kalkül zwei *zusätzliche Regeln* hinzu, die uns von jeder Formel φ auf ihre Reduktion φ^* und von φ^* auf alle ihre Erweiterungen φ (es könnte mehrere Formeln geben, deren gemeinsame Reduktion φ^* ist) zu schließen gestatten. Wegen $\varphi \Leftrightarrow \varphi^*$ ist der so erweiterte Kalkül korrekt, und wir können mit ihm aus jedem (in unserer Sprache ohne $\boldsymbol{\varepsilon}$ formulierbaren) Axiomensystem $\mathbb{A}$, für das $\mathbb{A} \Mapsto \varphi$ gilt, φ ableiten. Denn: Sei $\mathbb{A}^*$ das Axiomensystem, das aus $\mathbb{A}$ resultiert, wenn man jedes Axiom α von $\mathbb{A}$ durch seine Reduktion α^* ersetzt. Wegen $\mathbb{A} \Mapsto \varphi$ und der Äquivalenz jeder Formel mit ihrer Reduktion gilt dann auch $\mathbb{A}^* \Mapsto \varphi^*$, also ist φ^* mit Gödels (und daher auch mit unserem hierzu gleichwertigen) Kalkül aus $\mathbb{A}^*$ ableitbar.[68] Nehmen wir nun eine Ableitung von φ^* aus $\mathbb{A}^*$ her, fügen unter die unterste Zeile der Ableitung ein Exemplar von φ ein, und setzen über jedes in der Ableitung vorkommende Axiom α^* aus $\mathbb{A}^*$ eine Erweiterung α von α^*, so erhalten wir wegen der zusätzlichen Regeln eine Ableitung von φ aus $\mathbb{A}$. □

Bei Hinzunahme des Selektors $\boldsymbol{\varepsilon}$ trifft man allerdings auf die Schwierigkeit, dass sich nun nicht mehr alle Formeln gleichwertig durch solche ersetzen lassen, in denen $\boldsymbol{\varepsilon}$ nicht vorkommt. So muss es offen bleiben, ob auch hier ein endlich gestalteter vollständiger Kalkül existiert. Ungeachtet dessen können wir aber den auf S. 379–380 beschriebenen Kalkül verwenden, um aus dem $\boldsymbol{\varepsilon}$-Axiom (Auswahlaxiom) gültige Formeln ableiten, die dann auch $\boldsymbol{\varepsilon}$-Terme enthalten. Darüber hinaus können wir, wenn wir diesen Kalkül durch die entsprechenden definitorischen Regeln erweitern,[69] offenbar *alle* Beweise für die in Kap. 5 entwickelten Theoreme der Mengenlehre mit einem solchen Kalkül durchführen und dadurch „formalisieren“. *Damit ist gewährleistet, dass unsere Schlussfolgerungen auf nichts anderem basieren als auf den Axiomen der Mengenlehre und zusätzlich den logischen Axiomen und Regeln unseres Kalküls.* Auf die Plausibilität dieser Axiome und Regeln kommt also alles an: hierauf **beruht die Plausibilität aller unser Ergebnisse**. Die eben geäußerte Behauptung der Formalisierbarkeit aller hier präsentierten Beweise müsste man natürlich streng genommen dadurch belegen, dass man die Beweise nochmals durchgeht und die angewendeten Axiome und Regeln jeweils am Rand vermerkt. Der Leser, der die bis hierher erklärte Logik verstanden und die Beweise des mengentheoretischen Teils durchgearbeitet hat, dürfte nun aber (wie ich hoffe) auch ohne tatsächliche Durchführung einer solchen Formalisierung bereits davon überzeugt sein, dass diese *möglich wäre*, [70] und allein das ist es ja eigentlich, worauf es hier ankommt.

Ich möchte abschließend noch auf zwei wichtige metalogische Theoreme eingehen, von denen das erste auf den ersten Blick zu unseren Ergebnissen über die Unendlichkeit in scharfem Widerspruch steht, und das zweite den wichtigen Stellenwert beleuchtet, den unser realistischer Ansatz für die

---

[67] Zusätzlich kann, wie ich dort ebenfalls zeige, jeder *Term* gleichwertig durch einen solchen ersetzt werden, in dem außer diesen Zeichen höchstens noch $\imath$ (und zwar als Anfangszeichen) vorkommt. Auch kann man den Zeichenvorrat noch reduzieren, indem man Formeln mit $\neg$ und $\vee$ durch solche mit $\ll|\gg$ ersetzt (siehe Fußnote 49 auf S. 487). Die Entdeckung, dass man $\neg$ und $\vee$ durch ein einziges Zeichen ersetzen kann, geht auf Sheffer, *Logical Constants* (1913) zurück, weshalb $\ll|\gg$ der *Sheffersche Strich* heißt. Henri Maurice Sheffer gab dem Strich folgende Bedeutung: $\alpha|\beta$ steht für ≪weder α noch β≫. Diese Bedeutung gibt man heute dem sog. *nor*-Funktor (not or), für den man häufig $\downarrow$ schreibt. Demgegenüber gab Nicod (siehe Fußnote 61) dem Zeichen $|$ die Bedeutung von ≪α und β schließen sich aus≫, die es heute noch hat. Man spricht vom *nand*-Funktor (not and) und schreibt dafür manchmal auch $\uparrow$. Sowohl mit nor als auch mit nand kann man alle logischen Funktoren außer $\underline{\perp}$, $=$ und $\in$ gleichwertig ersetzen, aber mit nand lässt sich $\alpha \rightarrow \beta$ einfacher ausdrücken als mit nor.

[68] Denn wie auf S. 380 erläutert, ist Gödels Kalkül auf Ausdrücke wie φ^*, die nur aus Objektvariablen und den Zeichen $\underline{\perp}, \neg, \vee, \bigwedge, =, \in$ aufgebaut sind, anwendbar.

[69] Wir benötigen je eine definitorische Regel für jede in den Axiomen-Schemata nicht vorkommende Grundkonstante sowie für jede Definition, in der eine neue Konstante eingeführt wurde.

[70] Es ist dürfte relativ leicht einzusehen sein, dass in unseren Beweisen außer den Axiomen nur logische Tautologien vorausgesetzt wurden, und dass aus diesen Voraussetzungen alle unsere Theoreme durch Gedankengänge hervorgingen, die sich als Anwendungen korrekter Regeln formalisieren ließen.

Begründung der Mengenlehre besitzt. Das erste ist das Theorem (oder, wie es manchmal heißt: das Paradoxon) von LÖWENHEIM und SKOLEM, das auf Arbeiten von Leopold LÖWENHEIM und Thoralf SKOLEM aus den Jahren 1915 bzw. 1920 zurückgeht.[71] In verallgemeinerter Form besagt es:

6.4.9 Theorem oder Paradoxon von Löwenheim-Skolem *Jedes widerspruchsfreie Axiomensystem mit höchstens abzählbar unendlich vielen Ausdrücken* (einer Logik, für die ein endlich gestalteter vollständiger Kalkül existiert) *besitzt ein Modell, dessen Objektbereich eine höchstens abzählbar unendliche Menge ist.*

Da es für unsere Sprache ohne ε-Terme einen endlich gestalteten vollständigen Kalkül gibt, und wir ohne Benutzung von ε-Termen alle Sätze der klassischen Mengenlehre herleiten konnten,[72] besagt das LÖWENHEIM-SKOLEM-Theorem, dass es für diese Mengenlehre ein Modell gibt, *in dem der Objektbereich nur abzählbar viele Objekte umfasst.* Im scheinbaren Widerspruch hierzu erzwingen aber die Axiome der Mengenlehre, dass der Objektbereich eines Modells, in dem diese Axiome gelten, überabzählbar unendlich sein muss.[73] So kann es *im scheinbaren Widerspruch zu dem eben Gesagten kein Modell für die Axiome der Mengenlehre geben, das nur abzählbar unendlich ist.*

Offenbart somit das LÖWENHEIM-SKOLEM-Theorem am Ende, dass die Mengenlehre widersprüchlich ist und die vielen Stufen der Unendlichkeit gar nicht existieren? Wichtig zum Verständnis der Sachlage ist es hier, dass sich das Theorem auf den *allgemeinen Modellbegriff* bezieht, der neben realistischen auch formalistische Modelle umfasst (siehe S. 365), so dass die Objekte des Modells eine *beliebige* Kollektion bilden können und ≪∈≫ als ein *beliebig* interpretierbarer Funktor betrachtet wird. Demgegenüber haben wir im mengentheoretischen Teil nur „realistische“ Modelle benutzt, bei denen zu den Objekten immer die Elemente und Teilklassen einer Grundklasse dazugehören, und bei denen vor allem ∈ einen *inhaltlich festgelegten Sinn* hatte: eben den, dass ∈ die tatsächliche Elementrelation im Sinn der realistischen Mengenlehre beschrieb. Dieser realistische Modellbegriff steht aber zu dem formalistischen in dem Verhältnis, dass zwar jedes realistische Modell auch ein formalistisches ist, aber nicht umgekehrt: es gibt *mehr* formalistische als realistische Modelle.

Wenn es also gemäß dem LÖWENHEIM-SKOLEM-Theorem *ein* abzählbar unendliches Modell der Mengenlehre gibt, so heißt dies nicht, dass *alle* Modelle (und schon gar nicht, dass *realistische* Modelle) abzählbar unendlich sein müssen. So ist das Theorem kein Hindernis für die Existenz „inhaltlich angemessener“ Modelle der Mengenlehre, solange es *daneben* wenigstens *ein* rein formalistisches Modell mit höchstens abzählbar unendlich vielen Objekten gibt. Formal würde zwar auch in einem solchen Modell der Satz gelten, dass es ≪überabzählbar viele Mengen gibt≫, aber hier muss weder der Ausdruck ≪Menge≫ noch der Ausdruck ≪überabzählbar≫ den Sinn haben, den wir im Modell $\mathbb{D}$ der realistischen Mengenlehre damit verbinden: Als Mengen könnten hier realistisch betrachtet Urelemente fungieren, und Überabzählbarkeit könnte irgendeine Eigenschaft dieser Urelemente sein, die mit der realen Elementrelation gar nichts zu tun hat.[74]

Als Letztes bleibt noch das Gegenstück zum GÖDELschen *Vollständigkeitssatz* von 1929/30 zu besprechen: die GÖDELschen *Unvollständigkeitssätze* aus dem Jahre 1931.[75] Diese zeigen die Grenzen

[71] Vgl. SKOLEM, *Erfüllbarkeit*, LÖWENHEIM, *Relativkalkül* und EBBINGHAUS et al., *Logik* S. 93f.

[72] Abgesehen vom Beweis von Lemma 5.17.23 (wo man jedoch den ε-Term problemlos durch eine Auswahlfunktion ersetzen kann, sofern man nur Mengen betrachten will) haben wir ε-Terme nur im Beweis von den Sätzen 5.13.32 und 5.15.12 über Unmengen gebraucht, von denen 5.94, 5.105, 5.114, 5.15.10, und 5.31.16 (vgl. Fußnote 855) abhängen. Vgl. auch Beispiel 5.17.2 und den Text vor Definitionen 5.23.3 und 5.30.8.

[73] Zum Beispiel durch den Cantor'schen Satz (Theorem 5.20.19 S. 262).

[74] Auch wenn wir nur realistische Modelle betrachten, begegnen wir ja dem Phänomen, dass die Begriffe in einem Modell nicht dieselbe Bedeutung haben müssen wir im der „absoluten Mengenlehre“ des Standardmodells. So ist z. B. nach Satz 5.10 S. 116 eine ≪Unmenge≫ in einem Modell $\mathbb{G}$ eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, die kein Element von $\mathbb{G}$ ist. Eine solche Teilklasse ist z. B. $\mathbb{G}$ selbst, auch wenn $\mathbb{G}$ im absoluten Sinn eine Menge ist.

[75] Vgl. GÖDEL, *Unentscheidbare Sätze* und GÖDEL, *Diskussion zur Grundlegung.*

der formalen Logik auf und sind „vielleicht die wichtigsten logischen Resultate überhaupt“.[76] Sieht man sich verschiedene populärwissenschaftliche, aber auch von Logikern verfasste Bemerkungen zu den „Gödelschen Unvollständigkeitssätzen“ an, so hinterlässt dies meist eine gewisse Ratlosigkeit. Manche sprechen von *einem* Satz, manche von *zwei* Unvollständigkeitssätzen, manchmal bezieht man die Unvollständigkeit nur auf die Prädikatenlogik höherer Stufen, während die Prädikatenlogik der ersten Stufe vollständig sein soll, manchmal aber wird die Unvollständigkeit auch auf Sprachen der Prädikatenlogik der ersten Stufe bezogen. Schließlich wird auch behauptet, es gäbe nach Gödel Sätze, die weder wahr noch falsch, sondern unentscheidbar sein sollen. So ist es notwendig, sich die Arbeiten von Gödel im Original anzusehen.

Der oft zitierte Satz, dass es für die Prädikatenlogik höherer Stufen (siehe S. 360) keinen vollständigen Kalkül gibt, so dass ihre allgemeingültigen Formeln grundsätzlich nicht durch ein endlos laufendes Computerprogramm ausgegeben werden können,[77] geht zwar auf Gödels Untersuchungen zur Unvollständigkeit zurück, ist aber jedenfalls nicht der *zentrale* Teil der Unvollständigkeits-Ergebnisse. In seiner diesbezüglichen Arbeit von 1931 spricht nämlich Gödel von einer Unvollständigkeit, die „*allen* formalen Systemen der Mathematik anhaftet,“[78] wozu er ausdrücklich „das Zermelo-Fraenkelsche und das Neumannsche Axiomensystem der Mengenlehre“ zählt,[79] die ja in der *gewöhnlichen* (und somit vollständigen!) Prädikatenlogik formulierbar sind. Die einzigen Anforderungen, die Gödel an die „formalen Systeme“ stellt, kann man dahingehend zusammenfassen, dass (a) ein dem Peanoschen Axiomensystem der Arithmetik gleichwertiges Axiomensystem darin enthalten oder daraus ableitbar ist,[80] dass es (b) widerspruchsfrei ist[81] und dass (c) durch ein Verfahren in endlich vielen Schritten festgestellt werden kann, ob eine Formel dazu gehört oder nicht.[82] All dies ist für Systeme, die den Namen „mathematisch“ verdienen, selbstverständlich der Fall; wir wollen solche Systeme daher ≪für die Mathematik geeignet≫ nennen. Denkt man sich nun ein solches Axiomensystem mit einem korrekten endlich gestalteten Kalkül ausgestattet, so behauptet Gödel, dass es stets ≪unentscheidbare≫ Formeln gibt, „für die weder Allgemeingültigkeit noch die Existenz eines Gegenbeispiels beweisbar“ ist“.[83] Ist $\mathbb{A}$ das zugrunde liegende Axiomensystem, so handelt es sich bei den unentscheidbaren Formeln um Aussagen φ, für die weder $\mathbb{A} \Vdash \varphi$ noch $\mathbb{A} \Vdash \neg\varphi$ gilt.[84] Hierzu muss der Kalkül keineswegs unvollständig sein. Auch mit einem vollständigen Kalkül lässt sich manchmal weder φ noch $\neg\varphi$ aus $\mathbb{A}$ ableiten: nämlich dann, wenn φ *in einigen Modellen von* $\mathbb{A}$ *gilt und in anderen nicht.* Ungeachtet dessen ist eine Aussage φ natürlich dennoch *in jedem einzelnen* Modell *entweder* wahr *oder* falsch.

Gödels Ausführungen zerstörten die Illusion, man könne alle (bezüglich einer fest gewählten Basis) wahren Formeln einer für die Mathematik geeigneten Sprache mittels eines korrekten endlich gestalteten Kalküls formal ableiten. Er widerlegte diese Annahme dadurch, dass er für einen solchen Kalkül explizit eine *wahre* Aussage konstruierte, die in dem Kalkül *nicht ableitbar* ist. Hierzu stellte

---

76 Oberschelp, *Logik für Philosophen.*

77 Vgl. Ebbinghaus et al., *Logik* Nr. 5.5. und 5.6 S. 186f, der dies so ausdrückt, dass die Menge der allgemeingültigen Formeln dieser höheren Prädikatenlogik nicht „register-aufzählbar“ sind.

78 Gödel, *Unentscheidbare Sätze* S. 191 Fußnote 48a, Werke Band 1 S. 180, Hervorhebung von mir.

79 Gödel, *Unentscheidbare Sätze* S. 191, Werke Band 1 S. 180.

80 Explizit fordert Gödel (in Gödel, *Unentscheidbare Sätze* S. 190, Werke Band 1 S. 180) die rekursive Definierbarkeit der Axiome und Schlussregeln und die Definierbarkeit rekursiver Relationen.

81 Gödel fordert die sog. ≪ω-Widerspruchsfreiheit≫ (definiert in Gödel, *Unentscheidbare Sätze* S. 187, Werke Band 1 S. 172). Wie Barkley Rosser 1936 gezeigt hat, kann man den etwas künstlichen Begriff der ≪ω-Widerspruchsfreiheit≫ durch die einfache Widerspruchsfreiheit ersetzen (Rosser, *Extensions* Theorem IB S. 89), die besagt, dass für keine Formel φ zugleich φ und $\neg\varphi$ ableitbar ist.

82 In Gödels Terminologie muss das System „entscheidungsdefinit“ (Gödel, *Unentscheidbare Sätze* S. 189, Werke Band 1 S. 176) sein.

83 Gödel, *Unentscheidbare Sätze* S. 193, Werke Band 1 S. 186.

84 Vgl. Gödel, *Diskussion zur Grundlegung* Nachtrag S. 149, Werke Band 1 S. 202.

er eine Formel φ auf, die denselben Wahrheitswert hat wie «φ ist nicht aus den Axiomen beweisbar». Auf die Verwandtschaft dieser Formel mit dem Satz «ich lüge» des Lügner-Paradoxon hat GÖDEL selbst hingewiesen.[85] ANGENOMMEN nun, dieses φ wäre falsch, dann wäre es falsch, dass φ nicht beweisbar ist; also wäre φ beweisbar und darum wahr, im Widerspruch zur ANNAHME. Also kann φ nicht falsch sein, ist also tatsächlich wahr. Doch bedeutet nun die Wahrheit von φ, dass es stimmt, dass φ *nicht* beweisbar ist. Und so ist φ *ein Beispiel für eine Aussage, die zwar wahr, aber nicht beweisbar ist.*[86] Diese Unvollständigkeit der Beweisbarkeitseigenschaft ist unheilbar. Man kann zwar φ „beweisbar machen", indem man das zugrunde liegende Axiomensystem $\mathbb{A}$ zu einem größeren Axiomensystem $\mathbb{A}'$ erweitert (am einfachsten dadurch, dass man φ direkt unter die Axiome aufnimmt). Jedoch kann man auf diese neue Situation dann ebenfalls die Gödelsche Argumentation anwenden und erhält eine neue Aussage φ', die äquivalent ist mit «φ' ist nicht aus den Axiomen von $\mathbb{A}'$ beweisbar» . So kann man also *grundsätzlich niemals* den ganzen Reichtum der aus den Axiomen folgenden Sätzen mit einem endlich gestalteten Kalkül beweisen. Das Hauptresultat von GÖDEL ist somit das folgende Metatheorem:

6.4.10 Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz Es liege ein für die Mathematik geeignetes Axiomensystem $\mathbb{A}$ mit einem korrekten und endlich gestalteten Kalkül $\mathfrak{K}$ vor, und die Axiome seien in einem Modell $\mathcal{M}$ wahr. *Dann ist es unmöglich, mittels* $\mathfrak{K}$ alle *im Modell* $\mathcal{M}$ *wahren Sätze aus* $\mathbb{A}$ *formal abzuleiten.*

Dass GÖDEL *dies* beweisen konnte, ist für die Philosophie des Geistes bedeutsam: Es zeigt, dass der menschliche Geist die Grenzen von Computer-Algorithmen als solche erkennen und insofern auch überschreiten kann.[87] Aus dem „ersten" Gödelschen Unvollständigkeitssatz hat GÖDEL noch folgendes Korollar hergeleitet:[88]

6.4.11 Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz *Zu den unbeweisbaren Sätzen eines widerspruchsfreien Axiomensystems gehört stets seine eigene Widerspruchsfreiheit.*

Um also die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems zu beweisen, benötigt man ein zweites, stärkeres Axiomensystem, bei dem sich die Widerspruchsfreiheits-Frage aber erneut stellt.[89] So kann man *auf formalem Wege niemals ein Axiomensystem im absoluten Sinn als widerspruchsfrei erweisen.* Man kann allenfalls zeigen, dass ein System widerspruchsfrei ist, *wenn* dies für ein anderes gilt. Auf diese Weise kann also das ganze Gebäude der Mathematik niemals auf festem Grund gestellt werden. Der Formalismus HILBERTscher Prägung (siehe S. 65) ist damit gescheitert. Die Widerspruchsfreiheit der Mathematik kann nur durch *inhaltliche* Überlegungen gesichert werden: durch Angabe eines „realen Modells" für die grundlegenden Axiome. Ein solches Modell aufzustellen, war einer der Hauptzwecke dieser Arbeit.

---

85 GÖDEL, *Unentscheidbare Sätze* S. 175, Werke Band 1 S. 148.

86 Ein konkretes Beispiel für eine wahre, aber im Rahmen der klassischen Mengenlehre nicht beweisbare Aussage ist der Satz von der Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl (siehe Abschnitt 5.31).

87 Diese Konsequenz hat auch GÖDEL gesehen (siehe S. 628–630), und PENROSE hat sie vehement verteidigt (siehe Fußnote 36 auf S. 63). Anderer Meinung war Alan TURING (vgl. TURING, *Computing Machinery* S. 444f): Der Computer habe zwar die von GÖDEL aufgezeigten Grenzen, aber der Mensch habe ebenso Grenzen; er sei zwar schlauer als gewisse Maschinen, andere Maschinen aber könnten wieder schlauer sein als der Mensch usw. Meines Erachtens übersieht TURING, dass es hier gar nicht um konkrete Fälle geht, in denen der Mensch mehr kann als ein konkreter Computer, sondern um die allgemeine Erkenntnis der Grenzen *jedes* Computers, die wohl nur auf nicht-algorithmische Weise erworben werden kann.

88 Vgl. GÖDEL, *Unentscheidbare Sätze* Satz 11 S. 196, Werke Band 1 S. 192.

89 So bewies Gerhard GENTZEN 1936 die Widerspruchsfreiheit der endlichen Arithmetik (GENTZEN, *Widerspruchsfreiheit*), musste dabei aber an entscheidender Stelle (S. 555, siehe dort auch Fußnote 21) die transfinite Induktion für unendliche Ordinalzahlen bis ϵ_0 heranziehen.

7 Anhang: Mathematische Beweise

Metatheorem 5.9.2 S. 116

Für Modelle $\mathbb{G}$ gilt:

Die ≪Objekte≫ des Modells $\mathbb{G}$ sind die Elemente und Teilklassen von $\mathbb{G}$: die $\mathbb{G}$-Objekte.	(5.3)
Die ≪Elemente≫ eines $\mathbb{G}$-Objekts sind in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselben.	(5.4)
≪$\mathbb{D}$≫ bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ die Grundklasse $\mathbb{G}$.	(5.5)
≪$\emptyset$≫ bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ genau wie im Standardmodell die leere Klasse.	(5.6)
≪$\{a, b, \ldots\}$≫ bezeichnet in beiden Modellen dasselbe, wenn $a, b, \ldots$ in $\mathbb{G}$ liegen.	(5.7)
Die ≪Individuen≫ in $\mathbb{G}$ sind die Elemente von $\mathbb{G}$: die $\mathbb{G}$-Individuen.	(5.8)
Die ≪Klassen≫ in $\mathbb{G}$ sind die Teilklassen von $\mathbb{G}$: die $\mathbb{G}$-Klassen.	(5.9)
Die ≪Unmengen≫ in $\mathbb{G}$ sind die Teilklassen von $\mathbb{G}$, die nicht Elemente von $\mathbb{G}$ sind.	(5.10)
Die ≪Mengen≫ in $\mathbb{G}$ sind die Mengen, die Elemente von $\mathbb{G}$ sind.	(5.11)
Die ≪Urelemente≫ in $\mathbb{G}$ sind die Urelemente, die Elemente von $\mathbb{G}$ sind.	(5.12)

Beweis. Der Beweis stützt sich auf die in Nr. 5.9.1 S. 115 formulierten Definitionen (0) bis (7).

Beweis von (5.3). Nach Definition (0) ist ein Objekt dadurch charakterisiert, dass es ein x gibt, das ihm gleich ist. Wie auf S. 111 festgelegt wurde, hat aber die Variable x im Modell $\mathbb{G}$ als Objektbereich den Bereich der $\mathbb{G}$-Objekte, d. h. sie bezeichnet ein $\mathbb{G}$ Objekt: ein Element oder eine Teilklasse von $\mathbb{G}$.

Beweis von (5.4). Sei G ein $\mathbb{G}$-Objekt, und e ein ≪Element≫ von G im Standardmodell. Wir nehmen zwei Variablen x und y her und bezeichnen mit ≪x≫ das Objekt e und mit ≪y≫ das Objekt G. Dann ist die Formel ≪$x \in y$≫ wahr. Als Element eines $\mathbb{G}$-Objekts ist nun e nach Theorem 5.8.8 S. 110 ebenfalls ein $\mathbb{G}$-Objekt, und deshalb liegen G und e beide in dem Objektbereich, den unsere Variablen im Modell $\mathbb{G}$ haben. Wir können daher die Variablen x und y auch im Modell $\mathbb{G}$ als Bezeichnung für dieselben Objekte e und G verwenden und tun dies auch. Nach unserer Erläuterung der Elementformel für das Modell $\mathbb{G}$ auf S. 112 hat nun aber *eine Elementformel $a \in b$ in $\mathbb{G}$ dieselbe Bedeutung wie im Standardmodell, wenn ≪a≫ ebenso wie ≪b≫ in beiden Modellen dasselbe Objekt bezeichnet.* Infolgedessen hat also unsere Formel ≪$x \in y$≫ in beiden Modellen dieselbe Bedeutung, und da sie im Standardmodell wahr ist, gilt sie dann auch im $\mathbb{G}$, und daher muss e auch in $\mathbb{G}$ ein ≪Element≫ von G sein. Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass e in $\mathbb{G}$ ein ≪Element≫ von G ist, also ≪$x \in y$≫ im Modell $\mathbb{G}$ gilt, wenn die Variable x als Bezeichnung für e und y als eine solche für G interpretiert wird. Weil nun der Objektbereich aller Variablen im Standardmodell allumfassend ist, kann man ≪x≫ auch im Standardmodell als Bezeichnung für e verwenden, ebenso wie ≪y≫ als Bezeichnung für G, und somit gilt ≪$x \in y$≫ auch im Standardmodell, so dass e auch hier ≪Element≫ von G ist.

Beweis von (5.5) bis (5.7). Nach Definition (1) bezeichnet ≪$\mathbb{D}$≫ dasselbe wie ≪$\{x \mid x = x\}$≫, was in $\mathbb{G}$ (wie auf S. 113 festgelegt wurde) die Klasse bezeichnet, deren Elemente die $\mathbb{G}$-Individuen x von $\mathbb{G}$ sind, für die $x = x$ gilt. Das gilt aber für *alle* $\mathbb{G}$-Individuen (d. h. Elemente von $\mathbb{G}$). Also bezeichnet ≪$\mathbb{D}$≫ die Klasse, die alle Elemente von $\mathbb{G}$ enthält: das ist $\mathbb{G}$ selbst. Ebenso bezeichnet ≪$\emptyset$≫ nach Definition dasselbe wie ≪$\{x \mid x \neq x\}$≫, das ist im Modell $\mathbb{G}$ die Klasse, deren Elemente die $\mathbb{G}$-Individuen sind, für die $x \neq x$ gilt; da es solche x nicht gibt, ist dies leere Klasse. Schließlich bezeichnet ≪$\{a, b, \ldots\}$≫ nach Definition dasselbe wie ≪$\{x \mid x = a$ oder $x = b$ oder $\ldots\}$≫, das ist im Modell $\mathbb{G}$ die Klasse aller Elemente x von $\mathbb{G}$, die mit einem der aufgeführten Objekte $a, b, \ldots$ von $\mathbb{G}$ identisch sind. Da nun $a, b, \ldots$ Elemente von $\mathbb{G}$ sind, sind diese x gerade die aufgeführten Objekte $a, b, \ldots$

Beweis von (5.8). Definition (2) setzt Individuen mit «Elementen» von «$\mathbb{D}$» gleich. Weil aber nach (5.5) «$\mathbb{D}$» im Modell $\mathbb{G}$ die Klasse $\mathbb{G}$ bezeichnet, und nach (5.4) die «Elemente» des $\mathbb{G}$-Objekts $\mathbb{G}$ in beiden Modellen dieselben sind, sind die Individuen des Modells $\mathbb{G}$ die Elemente von $\mathbb{G}$.

Beweis von (5.9). Sei C eine Klasse des Modells $\mathbb{G}$. Dann gilt wegen Definition (3) im Modell $\mathbb{G}$ «$C = \{x \mid x \in C\}$». Nun ist «$\{x \mid x \in C\}$» im Modell $\mathbb{G}$ die Klasse, die alle $\mathbb{G}$-Individuen x enthält, für die $x \in C$ gilt. Wegen «$C = \{x \mid x \in C\}$» kann also C nur $\mathbb{G}$-Individuen, d. h. Elemente von $\mathbb{G}$ enthalten und ist darum eine Teilklasse von $\mathbb{G}$. Sei umgekehrt eine Teilklasse C von $\mathbb{G}$ gegeben, so enthält diese höchstens Elemente von $\mathbb{G}$, also kann man ihre Elemente als diejenigen Elemente x von $\mathbb{G}$ (d. h. $\mathbb{G}$-Individuen x) beschreiben, für die $x \in C$ gilt. Das aber sind die Elemente der Klasse, die im Modell $\mathbb{G}$ mit «$\{x \mid x \in C\}$» bezeichnet wird. Daher gilt im Modell $\mathbb{G}$ die Formel «$C = \{x \mid x \in C\}$», so dass C dort gemäß Definition (3) eine Klasse ist.

Beweis von (5.10). Sei U eine Unmenge im Modell $\mathbb{G}$, dann ist U nach Metatheorem 5.8.9 S. 114 im Modell $\mathbb{G}$ ein $\mathbb{G}$-Objekt, und es gilt dort nach Definition (4) «$U \notin \mathbb{D}$», das heißt wegen (5.5) und (5.4), dass U kein Element von $\mathbb{G}$ ist. Nun ist aber U als $\mathbb{G}$-Objekt eine Teilklasse oder ein Element von $\mathbb{G}$. Da also U kein Element von $\mathbb{G}$ ist, bleibt nur übrig, dass U eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist. Insgesamt ist also U eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, die kein Element von $\mathbb{G}$ ist. Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass U eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ und kein Element von $\mathbb{G}$ ist. Weil $\mathbb{G}$ im Modell $\mathbb{G}$ mit «$\mathbb{D}$» bezeichnet wird, gilt dann im Modell $\mathbb{G}$ «$U \notin \mathbb{D}$», d. h. wegen Definition (4) «U ist Unmenge».

Beweis von (5.11) und (5.12). Nach Definition (5) bzw. (6) sind «Mengen» bzw. «Urelemente» (in $\mathbb{G}$) die (dortigen) «Individuen», welche (dort) «Klassen» bzw. «keine Klassen» sind. Wegen (5.8) und (5.9) sind dies genau die Elemente von $\mathbb{G}$, die Teilklassen bzw. nicht Teilklassen von $\mathbb{G}$ sind. Zum Nachweis von (5.11) ist also zu zeigen, dass (im Standardmodell) Folgendes gilt:

(a) ist M Element von $\mathbb{G}$ und Teilklasse von $\mathbb{G}$, so ist M Element von $\mathbb{G}$ und eine Menge, und

(b) ist M Element von $\mathbb{G}$ und eine Menge, so ist M Element von $\mathbb{G}$ und Teilklasse von $\mathbb{G}$.

Zum Nachweis von (5.12) aber ist zu zeigen, dass (im Standardmodell) gilt:

(c) ist U Element von $\mathbb{G}$ und keine Teilklasse von $\mathbb{G}$, so ist U Element von $\mathbb{G}$ und Urelement, und

(d) ist U Element von $\mathbb{G}$ und Urelement, so ist U Element von $\mathbb{G}$ und kleine Teilklasse von $\mathbb{G}$.

Zu (a). Sei M Element von $\mathbb{G}$ und Teilklasse von $\mathbb{G}$. Als Element einer Klasse ist M wegen Erklärung 5.2.10 S. 76 ein Individuum, und als Individuum, das zugleich eine Klasse (nämlich Teilklasse von $\mathbb{G}$) ist, nach Definition (5) eine Menge. So ist M zugleich Element von $\mathbb{G}$ und eine Menge.

Zu (b). Sei M Element von $\mathbb{G}$ und eine Menge. Dann ist M als Menge nach Definition (5) auch eine Klasse und es bleibt zu zeigen, dass M Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist. Hierzu ist für jedes Element x von M zu zeigen, dass $x \in \mathbb{G}$ gilt. Nun gilt aber $x \in M$ und $M \in \mathbb{G}$, und weil $\mathbb{G}$ als Modell $\in$-transitiv ist, folgt daraus in der Tat $x \in \mathbb{G}$. So ist M zugleich Element von $\mathbb{G}$ und Teilklasse von $\mathbb{G}$.

Zu (c). Sei U Element von $\mathbb{G}$ und keine Teilklasse von $\mathbb{G}$. Als Element einer Klasse ist U wegen Erklärung 5.2.10 S. 76 ein Individuum. Außerdem ist U keine Klasse: sonst wäre jedes Element x von U auch ein solches von $\mathbb{G}$ (dies würde wegen $x \in U$ und $U \in \mathbb{G}$ aus der $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$ folgen), d. h. U wäre Teilklasse von $\mathbb{G}$, was falsch ist. So gilt für U, dass U Individuum, aber keine Klasse ist, also nach Definition (6) ein Urelement. Insgesamt ist U ein Element von $\mathbb{G}$, das ein Urelement ist.

Zu (d). Sei U Element von $\mathbb{G}$ und ein Urelement. Nach Definition (6) ist dann U keine Klasse, also erst recht keine Teilklasse von $\mathbb{G}$. Insgesamt ist U ein Element von $\mathbb{G}$, das keine Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist. □

Metatheorem zur Bemerkung nach dem Rahmenaxiom 5.9.4 S. 117

Die Aussagen des Axioms sind in jedem Modell $\mathbb{G}$ gültig, nämlich

(a) $\top = \{\emptyset\}$,

(b) $\bot = \emptyset$,

(c) $\top$ und $\bot$ sind verschiedene Individuen,

(d) $\underline{\bot} = \mathbb{D}$,

(e) alle Unmengen sind Klassen,

(f) und wenn $x \in y$ gilt, ist x ein Individuum und y eine Klasse.

Beweis von (a). $\top$ bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ nach (2a) S. 111 den Wahrpunkt-Repräsentanten 1, das ist nach 5.8.1 S. 105 (im Standardmodell) die einelementige Klasse, deren einziges Element $\emptyset$ ist. Wegen (5.7 S. 116) wird diese Klasse auch in $\mathbb{G}$ mit $\ll\{\emptyset\}\gg$ bezeichnet. Also gilt dort $\top = \{\emptyset\}$.

Beweis von (b). $\bot$ bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ nach (2b) S. 111 den Falschpunkt-Repräsentanten 0, das ist nach 5.8.1 S. 105 (im Standardmodell) die leere Klasse. Wegen (5.6 S. 116) wird aber die leere Klasse auch im Modell $\mathbb{G}$ mit $\ll\emptyset\gg$ bezeichnet, also gilt dort $\bot = \emptyset$.

Beweis von (c). Nach (5.8 S. 116) sind die Individuen (in $\mathbb{G}$) die $\mathbb{G}$-Individuen, und nach Erklärung 5.8.7 S. 110 gehören zu diesen $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ dazu. Nach (a) und (b) ist aber $\bot$ mit $\emptyset$ und $\top$ mit $\{\emptyset\}$ identisch. Daher sind $\bot$ und $\top$ im Modell $\mathbb{G}$ Individuen. Diese sind aber verschieden, da $\emptyset$ im Gegensatz zu $\{\emptyset\}$ kein Element besitzt (was wegen (5.4 S. 116) auch in $\mathbb{G}$ gilt).

Beweis von (d). $\underline{\bot}$ bezeichnet nach (2c) S. 111 die Klasse $\mathbb{G}$, und diese wird nach (5.5 S. 116) im Modell $\mathbb{G}$ mit $\ll\mathbb{D}\gg$ bezeichnet. Also gilt dort $\underline{\bot} = \mathbb{D}$.

Beweis von (e). Die Unmengen des Modells $\mathbb{G}$ sind wegen (5.10 S. 116) Teilklassen von $\mathbb{G}$, das heißt wegen (5.9 S. 116) Klassen des Modells $\mathbb{G}$.

Beweis von (f). Es gelte $\ll x \in y\gg$ im Modell $\mathbb{G}$. Dann müssen wir wegen Metatheorem 5.8.9 S. 114 davon ausgehen, dass y ein $\mathbb{G}$-Objekt, also eine Teilklasse oder ein Element von $\mathbb{G}$ ist.
Fall 1. y ist eine Teilklasse von $\mathbb{G}$. Dann muss das Element x von y auch ein solches von $\mathbb{G}$ sein, und als Element von $\mathbb{G}$ ist x nach (5.8 S. 116) ein Individuum des Modells $\mathbb{G}$. y aber ist als Teilklasse von $\mathbb{G}$ nach (5.9 S. 116) eine Klasse des Modells $\mathbb{G}$.
Fall 2. y ist ein Element von $\mathbb{G}$. Dann gilt $x \in y$ und $y \in \mathbb{G}$ und somit folgt $x \in \mathbb{G}$ per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$ (gemäß 5.8.6 S. 110). So ist x ein Individuum des Modells $\mathbb{G}$. Nicht nur x, sondern überhaupt jedes Element a von y liegt (wegen $y \in \mathbb{G}$ und $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$) in $\mathbb{G}$. Daher ist y eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, also eine Klasse des Modells $\mathbb{G}$. □

Theorem 5.10.31 S. 129

Für Individuen a, b, x, y gilt: Falls $\langle a, b\rangle = \langle x, y\rangle$, so ist $a = x$ und $b = y$.

Beweis. Nach Voraussetzung bezeichnen $\langle a, b\rangle$ und $\langle x, y\rangle$ dasselbe Paar p. Gemäß Theorem 5.10.30 S. 129 unterscheiden wir zwei Fälle: (i) p ist einelementig und (ii) p ist zweielementig.
Im Fall (i) gilt $p = \langle a, b\rangle = \{a\} = \{b\}$ und ebenso $p = \langle x, y\rangle = \{x\} = \{y\}$. Also sind $\{a\}$, $\{x\}$, $\{b\}$, $\{y\}$ Bezeichnungen für dasselbe Objekt p, weshalb $\{a\} = \{x\}$ und $\{b\} = \{y\}$ gilt und darum $a = x$ und $b = y$.
Im Fall (ii) kann man im Paar p die Anfangs– und Endmenge unterscheiden (siehe S. 128). Wegen $p = \langle a, b\rangle$ ist die Anfangsmenge $= \{a\}$, und wegen $p = \langle x, y\rangle$ ist diese auch $= \{x\}$. So ist $\{a\} = \{x\}$ und daher $a = x$. Ebenso ist die Endmenge einerseits $= \{a, b\}$ und andererseits $= \{x, y\}$. Also ist $\{a, b\} = \{x, y\}$. Nun gilt $b \in \{a, b\}$, also wegen $\{a, b\} = \{x, y\}$ auch $b \in \{x, y\}$, und wegen $x = a$ schließlich $b \in \{a, y\}$. Also muss b mit einem der beiden Elemente a oder y von $\{a, y\}$ identisch sein. Aber $b = a$ ist falsch, sonst wäre $\langle a, b\rangle$ einelementig, was wir im hier betrachteten Fall *nicht* annehmen. So bleibt nur $b = y$ übrig. □

Theorem 5.10.33 S. 130

Für Objekte a, b, x, y gilt: Falls $\langle a, b\rangle = \langle x, y\rangle$, so ist $a = x$ und $b = y$.

Beweis. Nach Voraussetzung sind $\langle a, b\rangle$ und $\langle x, y\rangle$ dasselbe Paar p. Wir benötigen folgendes **Lemma**

Jedes Paar ist entweder ein Individuenpaar oder ein $\mathtt{uu}$*-Paar oder ein* $\mathtt{u}\imath$*-Paar oder ein* $\imath\mathtt{u}$*-Paar (aber es gehört niemals zu mehreren dieser Paar-Sorten).*

Beweis das Lemmas. Zunächst sind $\mathtt{uu}$–, $\mathtt{u}\imath$– und $\imath\mathtt{u}$-Paare keine Individuenpaare: Im Gegensatz zu Individuenpaaren sind jene nämlich weder ein– noch zweielementig. Ist nämlich $\langle A, B\rangle_{\mathtt{uu}}$ ein $\mathtt{uu}$–Paar, so ist A ist eine Unmenge, und in dieser gibt es voneinander verschiedene Elemente a_1, a_2, a_3 (denn andernfalls wäre A leer oder ein– oder zweielementig und daher nach dem Null– und Paarmengenaxiom eine Menge). Ebenso findet man in B mindestens ein Element b. Dann sind aber $\langle a_1, b\rangle$, $\langle a_2, b\rangle$ und $\langle a_3, b\rangle$ Elemente von $\langle A, B\rangle$, und diese sind nach Theorem 5.10.31 S. 129 voneinander verschieden, während man in ein– oder zweielementigen

Mengen nicht verschiedene Elemente u_1, u_2, u_3 findet. Analog zeigt sich für $\mathtt{u}\imath$– und $\imath\mathtt{u}$–Paare, das sie weder ein– noch zweielementig und damit keine Individuenpaare sind. Die $\mathtt{uu}$–, $\mathtt{u}\imath$– und $\imath\mathtt{u}$-Paare unterscheiden sich auch untereinander:

- $\imath\mathtt{u}$-Paare haben im Gegensatz zu $\mathtt{u}\imath$– und $\mathtt{uu}$-Paaren die Eigenschaft, dass alle ihre Elemente Individuenpaare mit *ein und derselben ersten Komponenten* sind, und
- $\mathtt{u}\imath$-Paare haben im Gegensatz zu $\imath\mathtt{u}$– und $\mathtt{uu}$-Paaren die Eigenschaft, dass alle ihre Elemente Individuenpaare mit *ein und derselben zweiten Komponenten* sind.

Damit ist das Lemma bewiesen. Aus dem Lemma folgen nun unmittelbar die folgenden Sätze (1) bis (4):

(1) wenn p ein $\imath\imath$-Paar ist, so sind die Objekte a, b, x, y Individuen.

Wäre nämlich zum Beispiel a eine Unmenge, so muss p wegen $p = \langle a, b\rangle$ ein $\mathtt{uu}$– oder $\mathtt{u}\imath$-Paar sein, und so wäre p zugleich ein $\imath\imath$-Paar und ein $\mathtt{uu}$– oder $u\imath$-Paar, im Widerspruch zum Lemma. Analog lassen sich die folgenden Sätze einsehen:

(2) wenn p ein $\mathtt{uu}$-Paar ist, so sind die Objekte a, b, x, y Unmengen,

(3) wenn p ein $\imath\mathtt{u}$-Paar ist, so sind die Objekte a, x Individuen und die Objekte b, y Unmengen,

(4) wenn p ein $\mathtt{u}\imath$-Paar ist, so sind die Objekte a, x Unmengen und die Objekte b, y Individuen.

Beweis des Satzes. Wir unterscheiden die folgenden Fälle (i), (ii), (iii) und (iv):
(i) p ist ein $\imath\imath$-Paar. Nach Satz (1) sind dann a, b, x, y Individuen, und es folgt $a = x$ und $b = y$ aus dem Eindeutigkeitssatz 5.10.31 für Individuenpaare.
(ii) p ist ein $\mathtt{uu}$-Paar. Nach Satz (2) sind dann a, b, x, y Unmengen. Wegen $p = \langle a, b\rangle$ ist dann a nach Definition des $\mathtt{uu}$-Paares die Klasse, deren Elemente genau die ersten Komponenten der Elemente von p sind. Wegen $p = \langle x, y\rangle$ sind diese Komponenten aber auch die Elemente von x. Also sind a und x Klassen mit genau denselben Elementen, und nach dem Gleichheitssatz 5.10.4 S. 121 folgt $a = x$. Analog folgt $b = y$, weil sowohl b wie auch y die Klasse ist, deren Elemente genau die zweiten Komponenten der Elemente von p sind.
(iii) p ist ein $\mathtt{u}\imath$-Paar. Fach Satz (3) sind dann a, x Unmengen und b, y Individuen. Wegen $p = \langle a, b\rangle$ und $p = \langle x, y\rangle$ ist dann sowohl a wie auch x nach Definition des $\mathtt{u}\imath$-Paares die Klasse, deren Elemente genau die ersten Komponenten der Elemente von p sind. Also ist $a = x$. Ferner ist b die zweite Komponente aller Elemente von p, und dasselbe gilt für y. Also ist $b = y$.
(iv) p ist ein $\imath\mathtt{u}$-Paar. Fach Satz (4) sind dann a, x Individuen und b, y Unmengen. Analog wie im Fall (iii) folgt $a = x$ und $y = b$ nun mittels der Definition des $\imath\mathtt{u}$-Paares. □

Theorem 5.10.54 S. 140

Verallgemeinerte Funktionen f_1 und f_2 sind genau dann gleich, wenn $\mathtt{Db}(f_1) = \mathtt{Db}(f_2)$ und für jedes x aus diesem Definitionsbereich $f_1(x) = f_2(x)$ gilt.

Beweis. Sind f_1 und f_2 gleich, also dasselbe Objekt, gilt das natürlich auch für $\mathtt{Db}(f_1)$ und $\mathtt{Db}(f_2)$ sowie für $f_1(x)$ und $f_2(x)$. Umgekehrt ist zu zeigen, dass aus der Voraussetzung «$\mathtt{Db}(f_1) = \mathtt{Db}(f_2)$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle x des Definitionsbereichs» stets die Gleichheit von f_1 und f_2 folgt. Wir betrachten drei Fälle:
Fall 1: f_1 und f_2 sind gewöhnliche Funktionen. Dann werfen beide Funktionen ein x genau dann auf ein y, wenn sie (als Relationen) x auf y ausrichten. Die Voraussetzung «$\mathtt{Db}(f_1) = \mathtt{Db}(f_2)$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle x des Definitionsbereichs» besagt also, dass sie als Relationen dieselben Individuen jeweils auf dieselben Individuen ausrichten. Also folgt nach dem Gleichheitskriterium für Relationen (5.10.40 S. 133), dass $f_1 = f_2$.
Fall 2: f_1 und f_2 sind beide unmengenwertig. Wenn wir zeigen können, dass auch jetzt f_1 und f_2 *als Relationen* genau dieselben Ausrichtungen vornehmen, folgt ihre Gleichheit aus dem Gleichheitskriterium für Relationen. Sei also x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich. Nach Voraussetzung werfen f_1 und f_2 das Individuum x auf ein und denselben Wert $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$. Dieser Wert werde mit y bezeichnet. Entweder ist nun y ein Individuum oder eine Unmenge. Ist y Individuum, so bedeutet dies, dass f_1 und f_2 das x auf y *und nur* auf y ausrichten. Ist aber y Unmenge, so bedeutet dies, dass f_1 und f_2 das Individuum x auf alle Elemente der Unmenge y ausrichten. In beiden Fällen richten also f_1 und f_2 das x auf dieselben Objekte aus. Also folgt $f_1 = f_2$.
Fall 3: Eine der beiden Funktionen ist eine gewöhnliche und die andere eine unmengenwertige Funktion. Das ist unmöglich, da die unmengenwertige Funktion dann ein x des gemeinsamen Definitionsbereichs auf

eine Unmenge werfen würde, während die andere es nur auf ein Individuum werfen könnte, im Widerspruch zu $f_1(x) = f_2(x)$. Dieser Fall kann also gar nicht eintreten. □

Theorem 5.10.58 S. 142

Für Mengen A und B ist auch $A \times B$ eine Menge.

Beweis. $A \times B$ ist die Menge aller Paare $\langle a, b\rangle$ mit erster Komponente a aus A und zweiter Komponente b aus B. Wir haben in Abbildung 5.9 S. 130 die Elemente von $A \times B$ symbolisch in einem rechteckigen Schema untergebracht, das aus Zeilen und Spalten besteht, die mit den Elementen von A bzw. B „beschriftet“ sind. Diese metaphorische Redeweise von den „Zeilen“ können wir präzisieren, indem wir für jedes Element a von A die Klasse aller Individuenpaare der Form $\langle a, y\rangle$ mit einem y aus B «die a-te Zeile des Kreuzproduktes» nennen und mit $\mathtt{Z}a$ bezeichnen. Es sind dann also die Zeilen exakt definierte Klassen. Wir behaupten nun zunächst, dass diese Zeilen sogar Mengen sind. Um dies für die a-te Zeile $\mathtt{Z}a$ zu beweisen, betrachten wir die Funktion $f := \langle y \in B \mapsto \langle a, y\rangle\rangle$, die jedes y aus B auf $\langle a, y\rangle$ wirft. Es ist $\mathtt{Db}(f) = B$ und $\mathtt{Wb}(f) = \mathtt{Z}a$. Da B eine Menge ist, ist also nach dem Ersetzungsaxiom auch $\mathtt{Z}a$ eine Menge.
Da die Zeilen Mengen sind, existiert eine Mengenklasse $\mathfrak{M}$, dessen Elemente diese Zeilen sind. Für die Funktion $g := \langle x \in A \mapsto \mathtt{Z}x\rangle$, die jedes x aus A auf die Zeile $\mathtt{Z}x$ wirft, ist nun $\mathtt{Db}(g) = A$ und $\mathtt{Wb}(g) = \mathfrak{M}$. Da A eine Menge ist, ist nach dem Ersetzungsaxiom auch $\mathfrak{M}$ eine Menge, und nach dem Vereinigungsmengenaxiom 5.10.19 ist auch $\bigcup \mathfrak{M}$ eine Menge. Diese ist aber die Vereinigung aller Elemente aller Zeilen des Kreuzprodukts $A \times B$ und daher mit diesem Kreuzprodukt selbst identisch. □

Korollar 5.10.59 S. 142

Ist R eine Relation und sind $\mathtt{Vb}(R)$ und $\mathtt{Nb}(R)$, so ist auch R eine Menge. (5.25)

Ist R eine Relation, die eine Menge ist, so sind auch $\mathtt{Vb}(R)$ und $\mathtt{Nb}(R)$ Mengen. (5.26)

Ist f eine Funktion und $\mathtt{Db}(f)$ eine Menge, so ist auch f selbst eine Menge. (5.27)

Ist f eine Funktion und $\mathtt{Db}(f)$ eine Unmenge, so ist auch f selbst eine Unmenge. (5.28)

Ist f eine Injektion von A in B und A eine Unmenge, so ist auch B eine Unmenge. (5.29)

Beweis von (5.25). Da $\mathtt{Vb}(R)$ und $\mathtt{Nb}(R)$ Mengen sind, ist nach 5.10.58 auch $\mathtt{Vb}(R) \times \mathtt{Nb}(R)$ eine Menge, und wegen $R \subseteq \mathtt{Vb}(R) \times \mathtt{Nb}(R)$ muss nach dem Teilmengenaxiom auch R eine Menge sein.

Beweis von (5.26). Die Funktion, deren Definitionsbereich die Relation R ist, und die jedes Paar $\langle x, y\rangle$ aus R auf seine erste Komponente x wirft, hat $\mathtt{Vb}(R)$ als Wertebereich. Da ihr Definitionsbereich R eine Menge ist, ist nach dem Ersetzungsprinzip auch $\mathtt{Vb}(R)$ eine solche. Analog beweist man mittels der Funktion, die $\langle x, y\rangle$ aus R auf die zweite Komponente y wirft, dass $\mathtt{Nb}(R)$ eine Menge ist.

Beweis von (5.27). Nach der Ersetzungsaxiom folgt zunächst, dass $\mathtt{Wb}(f)$ eine Menge ist. Insgesamt sind dann also $\mathtt{Db}(f)$ (d. h. $\mathtt{Vb}(f)$) und $\mathtt{Wb}(f)$ (d. h. $\mathtt{Nb}(f)$) Mengen, also ist f nach (5.25) eine Menge.

Beweis von (5.28). Angenommen, f ist eine Menge. Dann wäre nach (5.26) auch $\mathtt{Vb}(f)$ (d. h. $\mathtt{Db}(f)$) eine Menge, was aber nach Voraussetzung eine Unmenge ist. Also war die Annahme falsch und f ist eine Unmenge.

Beweis von (5.29). Nach Voraussetzung ist A eine Unmenge und f eine Injektion von A in B. Dann ist B eine Oberklasse von $\mathtt{Wb}(f)$. Nach der Bemerkung nach Definition 5.10.48 S. 137 ist die Umkehrrelation $f^{\rightharpoonup}$ ebenfalls eine Funktion, und zwar von $\mathtt{Wb}(f)$ in A. Wird nun Angenommen, dass $\mathtt{Wb}(f)$ eine Menge ist, so ist damit der Definitionsbereich von $f^{\rightharpoonup}$ eine Menge und per Ersetzungsaxiom auch der Wertebereich A von $f^{\rightharpoonup}$. Nach Voraussetzung ist aber A eine Unmenge, also ist die Annahme falsch, und A und $\mathtt{Wb}(f)$ ist darum eine Menge. Nach Korollar 5.10.6 S. 121 gilt dies dann auch für deren Oberklasse B. □

Konsistenzsatz für Paare (5.10.60 S. 142)

Ein Paar $\langle a, b\rangle$ ist dann und nur dann ein Individuum, wenn beide Komponenten a und b Individuen sind. Andernfalls ist $\langle a, b\rangle$ eine Unmenge.

Beweis. Wenn a und b Individuen sind, ist $\langle a, b\rangle$ nach Theorem 5.10.30 S. 129 eine Menge, also ein Individuum. In allen anderen Fällen haben wir zu zeigen, dass $\langle a, b\rangle$ eine Unmenge ist.
FALL 1: a ist eine Unmenge und b ein Individuum. Dann ist $\langle a, b\rangle$ die Klasse, welche die Individuenpaare $\langle x, b\rangle$ mit x aus a enthält. Für die Funktion f, die jedes Paar $\langle x, b\rangle$ aus $\langle a, b\rangle$ auf seine erste Komponente x wirft, gilt $\mathtt{Db}(f) = \langle a, b\rangle$ und $\mathtt{Wb}(f) = a$. Es kann dann $\langle a, b\rangle$ keine Menge sein, sonst wäre nach dem Ersetzungsaxiom auch a eine Menge. Also ist $\langle a, b\rangle$ ist eine Unmenge.
FALL 2: a ist ein Individuum und a eine Unmenge. Dann ist $\langle a, b\rangle$ ist die Klasse, welche die Individuenpaare $\langle a, y\rangle$ mit y aus b enthält. Für die Funktion f, die jedes Paar $\langle a, y\rangle$ aus $\langle a, b\rangle$ auf seine zweite Komponente y wirft, gilt $\mathtt{Db}(f) = \langle a, b\rangle$ und $\mathtt{Wb}(f) = b$. Es kann dann $\langle a, b\rangle$ keine Menge sein, sonst wäre nach dem Ersetzungsaxiom auch b eine Menge. Also ist $\langle a, b\rangle$ ist eine Unmenge.
FALL 3: a und b sind Unmengen. Dann enthält die Klasse $\langle a, b\rangle$ die Individuenpaare $\langle x, y\rangle$ mit x aus a und y aus b. Wir wählen ein β aus b. Dann ist $\langle a, \beta\rangle$ eine Teilklasse von $\langle a, b\rangle$, und $\langle a, \beta\rangle$ ist ein Paar, dessen erste Komponente a eine Unmenge und dessen zweite Komponente β ein Individuum ist. Gemäß FALL 1 ist dann $\langle a, \beta\rangle$ eine Unmenge, also ist deren Obermenge $\langle a, b\rangle$ nach Korollar 5.10.6 S. 121 ebenfalls eine solche. □

Konsistenzsatz für Klassenbildungen über Mengenfamilien (5.10.75 S. 150)

Ist $f := \langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ Mengenfamilie mit $I \in \mathbb{M}$, so sind $\bigcup\limits_{i\in I} \theta(i)$, $\bigcap\limits_{i\in I} \theta(i)$ und $\bigtimes_{i\in I} \theta(i)$ Mengen.

Beweis. Da für i aus I alle $\theta(i)$ Mengen sind, existiert die Mengenklasse $\mathfrak{M}$, welche genau die Mengen $\theta(i)$ als Elemente hat. $\mathfrak{M}$ ist der Wertebereich $\mathtt{Wb}(f)$ der Mengenfamilie f. Da deren Definitionsbereich I eine Menge ist, ist per Ersetzungsaxiom 5.10.57 S. 141 auch $\mathfrak{M}$ eine Menge. So ist $\mathfrak{M}$ eine Mengenmenge. Folglich sind die Klassen $\bigcup\mathfrak{M}$, $\bigcap\mathfrak{M}$ und $\bigtimes\mathfrak{M}$ nach dem Vereinigungsmengenaxiom 5.10.19 S. 125 und den Sätzen 5.20 S. 126 und 5.10.70 S. 148 Mengen. Offensichtlich ist aber $\bigcup\mathfrak{M} = \bigcup_{i\in I}\theta(i)$ und entsprechend $\bigcap\mathfrak{M} = \bigcap_{i\in I}\theta(i)$. Damit sind die ersten beiden Behauptungen beweisen. So bleibt nur noch zu zeigen, dass $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ eine Menge ist. Zunächst ist festzustellen, dass die Klassen $\bigtimes\mathfrak{M}$ und $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ nicht gleich sein müssen:

- Die Elemente von $\bigtimes\mathfrak{M}$ sind die Funktionen F, welche jede Menge $\theta(i)$ von $\mathfrak{M}$ auf ein Element von $\theta(i)$ werfen: Es gilt für jedes i aus I, dass $F(\theta(i)) \in \theta(i)$.
- Dagegen sind die Elemente von $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ die Funktionen G, welche direkt jedes Element i von I auf ein Element von $\theta(i)$ werfen: Es gilt für jedes i aus I, dass $G(i) \in \theta(i)$.

Man betrachte nun die Funktion $H := \langle F \in \bigtimes\mathfrak{M} \mapsto \langle i \in I \mapsto F(\theta(i))\rangle\rangle$. Ihr Definitionsbereich ist die Menge $\bigtimes\mathfrak{M}$, und sie wirft jede Funktion F aus diesem Bereich auf eine andere Funktion: nämlich auf die Funktion $G := \langle i \in I \mapsto F(\theta(i))\rangle$, die jedes i aus I auf $F(\theta(i))$ wirft, was ein Element von $\theta(i)$ ist. Dieses G liegt in $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$, und so wirft H Funktionen aus $\bigtimes\mathfrak{M}$ auf Funktionen aus $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$.
Dabei werden *alle* Funktionen aus $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ getroffen: Ist nämlich G aus $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$, so ist $G(i) \in \theta(i)$ für jedes i aus I. Dann enthält $\bigtimes\mathfrak{M}$ die Funktion F, die jedes $\theta(i)$ auf $G(i)$ wirft, so dass also $F(\theta(i)) = G(i)$. Diese Funktion F wird von H auf die Funktion $\langle i \in I \mapsto F(\theta(i))\rangle$ geworfen, das ist wegen $F(\theta(i)) = G(i)$ die Funktion $\langle i \in I \mapsto G(i)\rangle$, und das ist G.
Da somit genau die Funktionen aus $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ getroffen werden, gilt $\mathtt{Wb}(H) = \bigtimes_{i\in I}\theta(i)$, und da $\mathtt{Db}(H)$ die Menge $\bigtimes\mathfrak{M}$ ist, folgt aus dem Ersetzungsaxiom, dass auch $\mathtt{Wb}(H)$, also $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$, eine Menge ist. □

Äquivalente Versionen des klassischen Auswahlaxioms (5.11.4 S. 153)

Die folgenden drei Versionen des Auswahlaxioms sind äquivalent:

(1) Jede disjunkte Mengenmenge $\mathfrak{M}$ mit $\emptyset \notin \mathfrak{M}$ besitzt eine Auswahlmenge.

(2) Jede Mengenmenge $\mathfrak{M}$ mit $\emptyset \notin \mathfrak{M}$ besitzt eine Auswahlfunktion.

(3) Jede Familie F nichtleerer Mengen mit einer Menge I als Indexklasse besitzt eine Auswahlfunktion.

Äquivalenzbeweis. Wenn wir zeigen, dass aus (1) (2) folgt, aus (2) (3) und aus (3) wieder (1), schließt sich der Kreis, und wir können sagen, dass aus jedem der drei Sätze jeweils die beiden anderen folgen.

Sei zunächst (1) vorausgesetzt. Zu zeigen ist (2). Sei $\mathfrak{M}$ eine Mengenmenge nichtleerer Mengen. Sei dann $\mathfrak{M}'$ die Mengenklasse, deren Mengen genau die Kreuzprodukte $\{M\} \times M$ sind (für M aus $\mathfrak{M}$). Wenn wir jedes M aus $\mathfrak{M}$ auf $\{M\} \times M$ werfen, hat die entsprechende Funktion als Definitionsbereich die Menge $\mathfrak{M}$ und als Wertebereich die Klasse $\mathfrak{M}'$, also ist $\mathfrak{M}'$ nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge. Da $\mathfrak{M}$ nur nichtleere Mengen enthält, gilt dies auch für $\mathfrak{M}'$. Schließlich ist $\mathfrak{M}'$ disjunkt, denn für verschiedene Mengen $\{M\} \times M$ und $\{N\} \times N$ aus $\mathfrak{M}'$ ist $M \neq N$, also sind die Elemente der Menge $\{M\} \times M$ Paare mit M als erster Komponente, die Elemente der Menge $\{N\} \times N$ aber Paare mit N als erster Komponente, und daher ist jedes Element der ersten Menge von jedem Element der zweiten verschieden. Insgesamt ist also $\mathfrak{M}'$ eine *disjunkte* Mengenmenge nichtleerer Mengen, besitzt also nach (1) eine Auswahlmenge A. Diese hat mit jeder Menge $\{M\} \times M$ von $\mathfrak{M}'$ genau ein gemeinsames Element: d. h. zu jedem M aus $\mathfrak{M}$ gibt es genau ein Element von A, das in $\{M\} \times M$ liegt, das also ein Paar $\langle M, m\rangle$ mit einem m aus M ist. Dann ist A aber offenbar eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathfrak{M}$, die jedes M aus $\mathfrak{M}$ auf ein Element m von M wirft: d. h. A ist eine Auswahlfunktion von $\mathfrak{M}$. Damit ist (2) bewiesen.

Sei nun (2) vorausgesetzt. Dann beweisen wir (3). Sei also F eine Familie nichtleerer Mengen mit der Menge I als Indexklasse. Dann ist der Wertebereich $\mathtt{Wb}(F)$ eine Mengenklasse nichtleerer Mengen, und aufgrund des Ersetzungsaxioms sogar eine Mengenmenge nichtleerer Mengen. Wegen (2) existiert also eine Auswahlfunktion f von $\mathtt{Wb}(F)$, eine Funktion, die jede Menge M aus $\mathtt{Wb}(F)$ auf ein Element von M wirft. Man betrachte nun die Funktionskomposition $F \looparrowright f$. Diese ist eine Funktion mit Definitionsbereich I, und da jeder Index i von F auf die Menge F_i aus $\mathtt{Wb}(F)$ geworfen wird, und dann F_i weiter von f auf ein Element von F_i, so wirft $F \looparrowright f$ jeden Index i auf ein Element von F_i, ist also eine Auswahlfunktion von F. Damit ist (3) beweisen.

Sei schließlich (3) vorausgesetzt. Dann beweisen wir (1). Sei also $\mathfrak{M}$ eine disjunkte Mengenmenge nichtleerer Mengen. Dann ist die Funktion $F := \langle M \in \mathfrak{M} \mapsto M\rangle$, die jede Menge M aus $\mathfrak{M}$ auf sich selbst wirft, eine Familie nichtleerer Mengen, deren Indexklasse die Menge $\mathfrak{M}$ ist. Wegen (3) besitzt F eine Auswahlfunktion f. Diese wirft jede Menge M aus $\mathfrak{M}$ auf ein Element von M. Der Wertebereich $\mathtt{Wb}(f)$ enthält dann zu jeder Menge M von $\mathfrak{M}$ ein (und wegen der Disjunktheit von $\mathfrak{M}$: genau ein) Element von M. Also ist $\mathtt{Wb}(f)$ eine Auswahlmenge von $\mathfrak{M}$. Damit ist (1) bewiesen. □

Theorem 5.12.8 S. 166

Für Klassen A und Mengen B und C ist stets $(A^B)^C \sim A^{(B\times C)}$.
Ist außerdem c ein Individuum mit $c \notin B$, so gilt $A^{B\cup\{c\}} \sim A^B \times A$ und $A^{B\cup\{c\}} \sim A \times A^B$.

Beweis für $(A^B)^C \sim A^{(B\times C)}$. Für jede Funktion f aus $(A^B)^C$ (die also jedes c aus C auf eine Funktion wirft, die ihrerseits jedes Element b von B auf ein Element von A wirft) ist die Funktion $\widehat{f}$, die jedes $\langle b, c\rangle$ aus $B \times C$ auf $f(c)(b)$ wirft – das ist der Funktionswert von $f(c)$ an der Stelle b – eine Funktion von $B \times C$ in A. Somit ist die Funktion F, die jedes solche f auf $\widehat{f}$ wirft, eine Funktion von $(A^B)^C$ in $A^{B\times C}$.
F ist injektiv: Sind nämlich f_1 und f_2 verschiedene Funktionen aus $(A^B)^C$, so gibt es ein c aus C, so dass $f_1(c) \neq f_2(c)$, also $f_1(c)$ und $f_2(c)$ verschiedene Funktionen von B in A sind. Für diese gibt es daher ein b aus B, so dass $f_1(c)(b) \neq f_2(c)(b)$, das heißt $\widehat{f_1}(\langle b, c\rangle) \neq \widehat{f_2}(\langle b, c\rangle)$ gilt. Daher ist $\widehat{f_1} \neq \widehat{f_2}$, das heißt $F(f_1) \neq F(f_2)$.
F ist auch surjektiv: Ist nämlich g Element von $A^{B\times C}$, so ist für jedes c aus C die Funktion g_c, die jedes Element b von B auf $g(\langle b, c\rangle)$ wirft, eine Funktion von B in A. Folglich ist die Funktion f, die jedes c aus C auf diese Funktion g_c wirft (so dass also $f(c) = g_c$ gilt) eine Funktion von C in A^B, also ein Element von $(A^B)^C$. Dieses f wird nun von F auf die Funktion $\widehat{f}$ geworfen, die jedes Paar $\langle b, c\rangle$ aus $B \times C$ auf $f(c)(b)$ wirft. Wegen $f(c) = g_c$ können wir also sagen, dass $\widehat{f}$ jedes Paar $\langle b, c\rangle$ auf $g_c(b)$ wirft. Doch wirft g_c das b auf $g(\langle b, c\rangle)$, und somit gilt: $\widehat{f}$ wirft $\langle b, c\rangle$ auf dasselbe Element $g(\langle b, c\rangle)$, auf das es auch von g geworfen wird. Also ist $\widehat{f} = g$, d. h. $F(f) = g$.
Insgesamt ist also F eine Bijektion. Also gilt $(A^B)^C \sim A^{B\times C}$.

Beweis für $A^{B\cup\{c\}} \sim A^B \times A$ und $A^{B\cup\{c\}} \sim A \times A^B$. Falls $A = \emptyset$, ist $A^{B\cup\{c\}}$ leer, denn es gibt dann keine Funktion von $B \cup \{c\}$ in A (sonst müsste diese das Individuum c auf ein Element der leeren Menge A werfen). Ebenso ist dann auch $A^B \times A$ und $A \times A^B$ leer, also sind die Klassen $A^{B\cup\{c\}}$, $A^B \times A$ und $A \times A^B$ identisch und per Reflexivität von $\sim$ auch gleichmächtig.
So bleibt nur der Fall $a \neq \emptyset$. Dann gibt es Elemente f von $A^{B\cup\{c\}}$, nämlich Funktionen von $B \cup \{c\}$ in A. Zu jeder solchen Funktion f liegt dann das Paar $\langle f/B, f(c)\rangle$, dessen erste Komponente die Einschränkung f/B

von f auf B und dessen zweite Komponente der Funktionswert $f(c)$ ist, in $A^B \times A$. So ist die Funktion F, die jedes f aus $A^{(B\cup\{c\})}$ auf $\langle f/B, f(c)\rangle$ wirft, eine Funktion von $A^{B\cup\{c\}}$ in $A^B \times A$.
Dieses F ist injektiv: Sind nämlich f_1 und f_2 verschiedene Funktionen von $B \cup \{c\}$ in A, so gibt es ein x mit $f_1(x) \neq f_2(x)$ und dieses liegt entweder in B oder ist mit c identisch. Im ersten Fall ist $(f_1/B)(x) \neq (f_2/B)(x)$, also $(f_1/B) \neq (f_2/B)$, d. h. die ersten Komponenten von $F(f_1)$ und $F(f_2)$ sind verschieden. Im zweiten ist $f_1(c) \neq f_2(c)$, d. h. die zweiten Komponenten von $F(f_1)$ und $F(f_2)$ sind verschieden. In jedem Fall gilt $F(f_1) \neq F(f_2)$.
F ist auch surjektiv: Ist nämlich $\langle g, a\rangle$ ein Element von $A^B \times A$, so ist g Funktion von B in A und a Element von A. Sei f die Funktion mit Definitionsbereich $B \cup \{c\}$, die mit den Elementen von B genau dieselben Würfe ausführt wie g, und die c auf a wirft. Dann ist $(f/B) = g$ und $f(c) = a$, und daher $F(f) = \langle f/B, f(c)\rangle = \langle g, a\rangle$.
Insgesamt ist F also eine Bijektion. Daher gilt $A^{B\cup\{c\}} \sim A^B \times A$. Weiter folgt wegen Theorem 5.12.7 S. 166, dass $A^B \times A \sim A \times A^B$, und per Transitivität von $\sim$ (Theorem 5.12.3 S. 165) gilt auch $A^{B\cup\{c\}} \sim A \times A^B$. □

Theorem 5.12.9 S. 166

Die leere Menge ist nur zu sich selbst gleichmächtig. (5.40)

Einermengen sind miteinander, aber mit keiner anderen Klasse gleichmächtig. (5.41)

Zweiermengen sind miteinander, aber mit keiner anderen Klasse gleichmächtig. (5.42)

Beweis von (5.40). Die leere Menge ist mit sich selbst gleichmächtig, denn die leere Funktion ist (wie in Beispiel 4 auf S. 141 erklärt wurde) eine Bijektion von $\emptyset$ in $\emptyset$. Es ist aber $\emptyset$ nicht mit einer nichtleeren Menge C gleichmächtig, sonst wäre auch $C \sim \emptyset$ und es gäbe eine Bijektion von C in $\emptyset$. Diese müsste ein Element x von C auf ein Element der leeren Menge werfen; aber ein solches existiert nicht.

Beweis von (5.41). Sind $\{a\}$ und $\{x\}$ Einermengen, so ist die Funktion, die a auf x wirft, eine Bijektion von $\{a\}$ in $\{x\}$. Es ist aber $\{a\}$ nicht mit einer Klasse C gleichmächtig, die *keine* Einermenge ist. Denn entweder hat ein solches C kein Element: Dann ist C nach (5.40) nur mit sich selbst gleichmächtig. Oder C hat mehr als ein Element: Dann muss jede Funktion von C in $\{a\}$ *mehrere* Elemente (nämlich alle Elemente von C) auf ein und dasselbe Element a werfen und ist daher nicht injektiv.

Beweis von (5.42). Sind $\{a, b\}$ und $\{x, y\}$ Zweiermengen (so dass $a \neq b$ und $x \neq y$), so ist die Funktion, die a auf x und b auf y wirft, eine Bijektion von $\{a, b\}$ in $\{x, y\}$. Es ist aber $\{a, b\}$ nicht mit einer Klasse C gleichmächtig, die *keine* Zweiermenge ist. Denn entweder hat ein solches C kein Element: Dann ist C nach (5.40) nur mit sich selbst gleichmächtig. Oder C hat genau ein Element x: Dann ist C nach (5.41) nur mit Einermengen gleichmächtig. Oder C hat mehr als zwei Elemente: Dann kann man in C voneinander verschiedene Elemente x, y, z finden. Eine Funktion von C in $\{a, b\}$, die eine Bijektion sein soll, muss x auf a oder auf b werfen, und y – je nachdem – auf b oder a. Doch z muss ebenfalls auf a oder b geworfen werden, also auf ein Element, auf welches bereits x oder y geworfen wird. Also ist die Funktion nicht injektiv. □

Theorem 5.12.17 S. 171

Für alle Mengen A mit $A \neq \emptyset$ ist die FREGEsche Zahl $\llbracket A \rrbracket$ von A eine Unmenge.
Das gilt auch für jede von $\llbracket 0 \rrbracket$ (d. h. $\llbracket \emptyset \rrbracket$ verschiedene Mengenstufe.

Beweis. $\llbracket A \rrbracket$ ist eine Mengenklasse, denn da A eine Menge ist, sind nach Theorem 5.12.10 S. 167 alle mit A gleichmächtigen Klassen Mengen, und $\llbracket A \rrbracket$ ist die Klasse aller dieser Mengen.
Wir zeigen nun zunächst, dass jedes Element von $\mathbb{D}$, d. h. jedes beliebige Individuum d, in einer Klasse D liegt, welche Element der Mengenklasse $\llbracket A \rrbracket$ ist. Falls nämlich $d \in A$, nehmen wir als D die Menge A selbst: Dann gilt trivialerweise $d \in D$ und $D \sim A$ (per Reflexivität von $\sim$), d. h. $D \in \llbracket A \rrbracket$. Falls aber $d \notin A$, wählen wir ein Element a von A aus (war möglich ist, das A nichtleer ist) und setzen $D := (A \setminus \{a\}) \cup \{d\}$. Dann gilt $d \in D$, und die Funktion, die a auf d und jedes Element von $A \setminus \{a\}$ auf sich selbst wirft, ist eine Bijektion von A in D, so dass $D \sim A$ gilt, also wieder $D \in \llbracket A \rrbracket$.
In jedem Fall liegt also d in einem D aus $\llbracket A \rrbracket$, und daher auch in der Vereinigung $\bigcup \llbracket A \rrbracket$ aller zu $\llbracket A \rrbracket$ gehörigen Mengen. Da somit jedes Individuum (jedes Element d von $\mathbb{D}$) in $\bigcup \llbracket A \rrbracket$ liegt, gilt $\mathbb{D} \subseteq \bigcup \llbracket A \rrbracket$.

Sei nun ANGENOMMEN, dass $\llbracket A \rrbracket$ eine Menge ist. Dann ist die Mengenklasse $\llbracket A \rrbracket$ eine Mengenmenge, also ist per Vereinigungsmengenaxiom 5.10.19 auch $\bigcup \llbracket A \rrbracket$ eine Menge, und wegen $\mathbb{D} \subseteq \bigcup \llbracket A \rrbracket$ wäre per Teilmengenaxiom 5.10.5 auch $\mathbb{D}$ eine Menge, was falsch ist. Also war die ANNAHME falsch und $\llbracket A \rrbracket$ ist eine Unmenge.

Um auch die zweite Behauptung zu beweisen, sei $\mathfrak{F}$ eine von $\llbracket 0 \rrbracket$ verschiedene Mengenstufe. Da $\mathfrak{F}$ eine Mengenstufe ist, gibt es eine *Menge* A mit $\mathfrak{F} = \llbracket A \rrbracket$. Es ist aber $A \neq \emptyset$ (denn wäre $A = \emptyset$, so wäre $\mathfrak{F} = \llbracket A \rrbracket = \llbracket \emptyset \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket$, wohingegen wir $\mathfrak{F}$ als von $\llbracket 0 \rrbracket$ verschieden vorausgesetzt haben), also ist nach der schon bewiesenen ersten Behauptung $\llbracket A \rrbracket$ (das heißt $\mathfrak{F}$) eine Unmenge. □

Theorem 5.13.3 S. 174

Sei $<$ eine Ordnungsrelation über gewissen Objekten, zu denen x, y, z gehören. Dann gilt:

Irreflexivität	von $<$:	$x < x$ ist stets falsch.	(5.47)
Reflexivität	von $\leq$:	$x \leq x$ ist stets wahr.	(5.48)
Antisymmetrie	von $<$:	$x < y$ und $y < x$ gilt niemals zugleich.	(5.49)
Identitivität	von $\leq$:	$x \leq y$ und $y \leq x$ gilt nur dann zugleich, wenn $x = y$.	(5.50)
Transitivität	von $<$:	Aus $x < x < z$ folgt $x < y$.	(5.51)
Transitivität	von $\leq$:	Aus $x \leq y \leq z$ folgt $x \leq z$.	(5.52)
gemischte Transitivität:		Aus $x < y \leq z$ und ebenso aus $x \leq y < z$ folgt $x < z$.	(5.53)

Beweis von (5.47) bis (5.52). Da die Ordnungsrelation $<$ nach Definition irreflexiv und transitiv ist, gilt (5.47) und (5.51). Ferner gilt (5.48) gilt wegen $x = x$. (5.49) gilt, denn andernfalls gäbe es Objekte x, y so dass $x < y$ und $y < x$, also per Transitivität $x < x$ im Widerspruch zur Irreflexivität. Um (5.50) zu beweisen, sei $x \leq y$ und $y \leq x$ VORAUSGESETZT. ANNAHME: Es gilt $x \neq y$. Nun bedeutet die ERSTE VORAUSSETZUNG $x \leq y$, dass $x < y$ oder $x = y$. Da nach ANNAHME Letzteres nicht gelten soll, folgt $x < y$. Ebenso folgt aus der ZWEITEN VORAUSSETZUNG $y < x$. Insgesamt ist also $x < y$ und $y < x$, woraus per Transitivität $x < x$ folgt im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$. Also war die ANNAHME falsch und es gilt $x = y$. Ist umgekehrt $x = y$ vorausgesetzt, gilt $x \leq y$ und $y \leq x$, weil dann beides $x \leq x$ bedeutet, was nach (5.48) wahr ist.

Beweis von (5.52). Aus $x \leq y \leq z$ ergeben sich per Definition von $\leq$ folgende Möglichkeiten.
Entweder gilt $x < y$ und $y < z$: Dann folgt per Transitivität $x < z$.
Oder es gilt $x < y$ und $y = z$: dann kann man in $x < y$ das y durch z ersetzen und erhält $x < z$.
Oder es gilt $x = y$ und $y < z$: Dann kann man in $y < z$ das y durch x ersetzen und erhält $x < z$.
Oder es gilt $x = y$ und $y = z$: Dann kann man in $x = y$ das y durch z ersetzen und erhält $x = z$.
So folgt in jedem Fall $x < z$ oder $x = z$, also immer $y \leq z$.

Beweis von (5.53). Sei $x < y \leq z$ vorausgesetzt. Wegen $y \leq z$ ist entweder $y < z$ oder $y = z$. Im ersten Fall gilt $x < y < z$, also $x < z$. Im zweiten Fall kann man in der wahren Formel $x < y$ das y durch das mit y identische z ersetzen, und erhält wieder $x < z$. Analog folgt auch aus $x \leq y < z$, dass $x < z$. □

Theorem 5.13.28 S. 183

Ist $T \subseteq A$ und $\langle A, < \rangle$ halb– bzw. voll– bzw. wohlgeordnete Klasse, ist auch $\langle T, < \rangle$ eine solche.

Beweis. Alle Elemente von T liegen in A. Ist daher $<$ über A irreflexiv bzw. transitiv bzw. linear, so erst recht über T, und weil die Relation $< /\!\!/ T$, für Elemente von T mit $<$ übereinstimmt, ist $< /\!\!/ T$ dann irreflexiv bzw. transitiv bzw. linear. Ist also $\langle A, < \rangle$ halb– oder vollgeordnete Klasse, so gilt dies auch für $\langle T, < /\!\!/ T \rangle$, wofür wir nach der Notationsvereinbarung auf S. 176 $\langle T, < \rangle$ schreiben. Zu zeigen bleibt: Wenn $\langle A, < \rangle$ eine wohlgeordnete Klasse ist, so gilt das auch für $\langle T, < \rangle$, d. h. für $\langle T, < /\!\!/ T \rangle$. Sei also $\langle A, < \rangle$ wohlgeordnet. Nach dem bisher Gesagten ist $\langle T, < \rangle$ dann zumindest vollgeordnet, und es bleibt zu zeigen, dass die Minimumsbedingung sowie die Abschnittsbedingung erfüllt ist.
Beweis der Minimumsbedingung für $\langle T, < /\!\!/ T \rangle$: Sei T^* eine Teilklasse von T. Wegen $T \subseteq A$ ist dann erst recht T^* eine Teilklasse von A. Da die Minimumsbedingung für $\langle A, < \rangle$ gilt, besitzt T^* ein Minimum m *bezüglich* $<$,

d. h. es gilt für alle von m verschiedenen Elemente t von T^*, dass $m < t$. Da $<\!\!/\!\!/T$ aber zwischen Elementen von T dieselben Ausrichtungen wie $<$ vornimmt, gilt dann auch $m <\!\!/\!\!/T\ t$, was zeigt, dass m auch Minimum von T^* *bezüglich* $<\!\!/\!\!/T$ ist. Somit ist die Minimumsbedingung für $\langle T, <\!\!/\!\!/T\rangle$ erfüllt.
Beweis der Abschnittsbedingung für $\langle T, <\!\!/\!\!/T\rangle$. Sei a ein Element von T. Dann ist a auch Element von A, und da $\langle A, <\rangle$ die Abschnittsbedingung erfüllt, ist die Klasse $\mathtt{Ab}_<(a)$ (aller $<$-Vorgänger von a) eine Menge. Zu zeigen ist, dass auch die Klasse $\mathtt{Ab}_{<\!\!/\!\!/T}(a)$ (aller $<\!\!/\!\!/T$-Vorgänger von a) eine Menge ist. Diese ist aber eine Teilklasse von $\mathtt{Ab}_<(a)$: Denn wenn x Element von $\mathtt{Ab}_{<\!\!/\!\!/T}(a)$ ist, gilt $x <\!\!/\!\!/T\ a$, also auch $x < a$, also $x \in \mathtt{Ab}_<(a)$. Da $\mathtt{Ab}_<(a)$ eine Menge ist, ist nach dem Teilmengenaxiom also auch $\mathtt{Ab}_{<\!\!/\!\!/T}(a)$ eine solche. □

Theorem 5.13.30 S. 185

Sei $\langle W, <\rangle$ wohlgeordnet. Sei Z eine Klasse und sei F eine Funktion, die jedes Paar $\langle a, f\rangle$, dessen erste Komponente a ein Element von W und dessen zweite Komponente f eine Funktion von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z ist, auf ein Element von Z wirft. *Dann gibt es genau eine Funktion f von W in Z mit $f(a) = F(\langle a, f/\ \mathtt{Ab}(a)\rangle)$ für jedes a aus W.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass es höchstens und mindestens eine solche Funktion gibt (Eindeutigkeits– und Existenzaussage). **Beweis der Eindeutigkeitsaussage**: Seien f und g Funktionen von W in Z, so dass für alle a aus W gilt $f(a) = F(\langle a, f/\ \mathtt{Ab}(a)\rangle)$ und $g(a) = F(\langle a, g/\ \mathtt{Ab}(a)\rangle)$. Dann folgt durch ordnungstheoretische Induktion, dass für alle Elemente a von W $f(a) = g(a)$ gilt, also die Funktionen gleich sind: Denn unter der Induktionsvoraussetzung, dass $f(x) = g(x)$ für alle Vorgänger x von a gilt, folgt $f/\ \mathtt{Ab}(a) = g/\ \mathtt{Ab}(a)$ und daher $f(a) = F(\langle w, f/\ \mathtt{Ab}(a)\rangle) = F(\langle a, g/\ \mathtt{Ab}(a)\rangle) = g(a)$. Damit ist die Eindeutigkeitsaussage bewiesen. Um auch die Existenzaussage zu beweisen, stellen wir zunächst drei Lemmata auf:

Lemma 1. *Für jedes Element a von W gibt es höchstens eine Funktion f_a von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z, so dass $f_a(x) = F(\langle x, f_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle)$ für alle x aus $\mathtt{Ab}(a)$ gilt.*

Beweis von Lemma 1. $\langle \mathtt{Ab}(a), <\rangle$ ist nach Theorem 5.13.28 S. 183 wohlgeordnet. Da die schon bewiesenen Eindeutigkeitsaussage für *alle* wohlgeordneten Klassen gilt, gilt sie auch für $\langle \mathtt{Ab}(a), <\rangle$. Also kann es nicht verschiedene Funktionen f_a und g_a von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z geben, so dass $f_a(x) = F(\langle x, f_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle)$ und auch $g_a(x) = F(\langle x, g_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle)$ für alle x aus $\mathtt{Ab}(a)$ gilt.[1] Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2. *Sind a und b aus W mit $a < b$, und sind f_a und f_b Funktionen von $\mathtt{Ab}(a)$ bzw. $\mathtt{Ab}(b)$ in Z mit*

$$f_a(x) = F(\langle x, f_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle) \text{ für alle } x \text{ aus } \mathtt{Ab}(a), \text{ und} \tag{7.1}$$

$$f_b(x) = F(\langle x, f_b/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle) \text{ für alle } x \text{ aus } \mathtt{Ab}(b) \text{ (also erst recht für alle } x \text{ aus } \mathtt{Ab}(a)),^2 \tag{7.2}$$

so folgt stets $f_b/\ \mathtt{Ab}(a) = f_a$.

Beweis von Lemma 2. Wegen Lemma 1 ist f_a die *einzige* Funktion f von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z mit $f(x) = F(\langle x, f/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle)$ für alle x aus $\mathtt{Ab}(a)$. Wenn sich also zeigt, dass auch $f_b/\ \mathtt{Ab}(a)$ ein solches f ist, folgt $f_b/\ \mathtt{Ab}(a) = f_a$ und wir sind fertig. Nun ist $f_b/\ \mathtt{Ab}(a)$ eine Funktion von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z,[3] und so ist nur noch für jedes x aus $\mathtt{Ab}(a)$ zu zeigen, dass $(f_b/\ \mathtt{Ab}(a))(x) = F(\langle x, (f_b/\ \mathtt{Ab}(a))/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle)$.
Zunächst zeigen wir, dass $(f_b/\ \mathtt{Ab}(a))/\ \mathtt{Ab}(x)$ mit $f_b/\ \mathtt{Ab}(x)$ identisch ist. Für x aus $\mathtt{Ab}(a)$ ist $x < a$, also $x < a < b$, also nach Lemma 5.13.18 S. 179 $\mathtt{Ab}(x) \subseteq \mathtt{Ab}(a) \subseteq \mathtt{Ab}(b)$, und so ist $\mathtt{Ab}(x)$ sowohl Teilklasse des Definitionsbereichs $\mathtt{Ab}(a)$ von $f_b/\ \mathtt{Ab}(a)$ als auch Teilklasse des Definitionsbereichs $\mathtt{Ab}(b)$ von f_b, so dass die Einschränkungen $(f_b/\ \mathtt{Ab}(a))/\ \mathtt{Ab}(x)$ und $f_b/\ \mathtt{Ab}(x)$ wohldefiniert sind (Definition 5.10.63 S. 143). Beide haben nach Satz 5.31 S. 143 denselben Definitionsbereich $\mathtt{Ab}(x)$. Außerdem führt $f_b/\ \mathtt{Ab}(x)$ mit den Elementen

---

[1] Nach der Notationsvereinbarung S. 176 steht $\langle \mathtt{Ab}(a), <\rangle$ für $\langle \mathtt{Ab}(a), <\!\!/\!\!/\ \mathtt{Ab}(a)\rangle$. Entsprechend müsste hier $\mathtt{Ab}(x)$ eigentlich für die Klasse der $(<\!\!/\!\!/\ \mathtt{Ab}(a))$-Vorgänger von x stehen. Wir dürfen $\mathtt{Ab}(x)$ aber auch als Klasse der $<$-Vorgänger von x auffassen. Beide Vorgänger-Klassen sind nämlich identisch: Ist u ein $<$-Vorgänger von x, gilt $u < x$. Wegen $x \in \mathtt{Ab}(a)$ ist dann $u < x < a$, also $u < a$, also ist auch $u \in \mathtt{Ab}(a)$, also gilt $u\ (<\!\!/\!\!/\ \mathtt{Ab}(a))\ x$, d. h. u ist auch $(<\!\!/\!\!/\ \mathtt{Ab}(a))$-Vorgänger von x. Ist umgekehrt vorausgesetzt, dass u ein $(<\!\!/\!\!/\ \mathtt{Ab}(a))$-Vorgänger von x ist, gilt $u\ (<\!\!/\!\!/\ \mathtt{Ab}(a))\ x$, daraus folgt unmittelbar $u < x$, also ist u auch ein $<$-Vorgänger von x.

[2] Nach Lemma 5.13.18 S. 179 folgt nämlich aus $a < b$, dass $\mathtt{Ab}(a) \subseteq \mathtt{Ab}(b)$.

[3] Nach Lemma 5.13.18 S. 179 folgt aus $a < b$, dass $\mathtt{Ab}(a) \subseteq \mathtt{Ab}(b)$, also ist $\mathtt{Ab}(a)$ Teilklasse des Definitionsbereichs $\mathtt{Ab}(b)$ von f. Daher ist $f_b/\ \mathtt{Ab}(a)$ nach Satz 5.34 S. 143 eine Funktion von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z.

von $\mathtt{Ab}(x)$ dieselben Würfe aus wie f_b, während $(f_b/\ \mathtt{Ab}(a))/\ \mathtt{Ab}(x)$ mit diesen dieselben Würfe wie $f_b/\ \mathtt{Ab}(a)$ ausführt; aber $f_b/\ \mathtt{Ab}(a)$ führt mit diesen Elementen (die wegen $\mathtt{Ab}(x) \subseteq \mathtt{Ab}(a)$ auch in $\mathtt{Ab}(a)$ liegen) ebenfalls dieselben Würfe wie f_b aus. So sind also $(f_b/\ \mathtt{Ab}(a))/\ \mathtt{Ab}(x)$ und $f_b/\ \mathtt{Ab}(x)$ identisch, und es gilt für jedes x aus $\mathtt{Ab}(a)$: $(f_b/\ \mathtt{Ab}(a))(x) \underset{(5.30\ S.143)}{=} f_b(x) \underset{(7.2)}{=} F(\langle x, f_b/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle) = F(\langle x, (f_b/\ \mathtt{Ab}(a))/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle)$. So ist das Lemma ist bewiesen.

Lemma 3. *Für jedes a aus W gibt es genau eine Funktion f_a von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z, so dass $f_a(x) = F(\langle x, f_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle)$ für alle x aus $\mathtt{Ab}(a)$ gilt.*

Beweis von Lemma 3. Wegen Lemma 1 bleibt nur die Existenz von f_a zu zeigen. Wir zeigen dies durch ordnungstheoretische Induktion. Sei also für ein a die Induktionsvoraussetzung erfüllt, dass jeder Vorgänger x von a die Eigenschaft hat, dass eine Funktion f_x von $\mathtt{Ab}(x)$ in Z existiert, so dass

$$f_x(n) = F(n, f_x/\ \mathtt{Ab}(n)) \text{ für alle } n \text{ aus } \mathtt{Ab}(x) \text{ gilt.} \tag{7.3}$$

Zu zeigen ist unter dieser Voraussetzung die Existenz einer Funktion f_a von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z so dass

$$f_\alpha(x) = F(\langle x, f_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle) \text{ für alle } x \text{ aus } \mathtt{Ab}(a) \text{ gilt.} \tag{7.4}$$

Dies trifft auf die Funktion f_a zu, die jedes x aus $\mathtt{Ab}(a)$ auf $F(\langle x, f_x\rangle)$ wirft und sonst nicht tut,[4] wobei f_x die nach Induktionsvoraussetzung existierende Funktion ist, für die (7.3) gilt. f_a ist zunächst eine Funktion von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z, und per Definition gilt

$$f_\alpha(x) = F(\langle x, f_x\rangle) \text{ für alle } x \text{ aus } \mathtt{Ab}(a). \tag{7.5}$$

Wenn noch gezeigt wird, dass für jedes x aus $\mathtt{Ab}(a)$ die Funktionen f_x und $f_a/\ \mathtt{Ab}(x)$ identisch sind,[5] können wir in (7.5) das $F(\langle x, f_x\rangle)$ durch $F(\langle x, f_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle)$ ersetzen und erhalten (7.4), und dann wäre das Lemma bewiesen. Da f_x und $f_a/\ \mathtt{Ab}(x)$ denselben Definitionsbereich $\mathtt{Ab}(x)$ haben, bleibt nur zu zeigen, dass beide Funktionen jedes n aus $\mathtt{Ab}(x)$ auf ein und dasselbe Objekt werfen; und da $f_a/\ \mathtt{Ab}(x)$ jedes n aus $\mathtt{Ab}(x)$ auf dasselbe Element von Z wirft wie f_a, ist hierzu konkret zu zeigen, dass $f_x(n) = f_a(n)$ für jedes n aus $\mathtt{Ab}(x)$ gilt.

Nun gilt für n aus $\mathtt{Ab}(x)$, dass $n < x < a$, so dass $n < a$. Also muss es nach Induktionsvoraussetzung (7.3) eine Funktion f_n von $\mathtt{Ab}(n)$ in Z geben, so dass $f_n(m) = F(\langle m, f_n/\ \mathtt{Ab}(m)\rangle)$ für jedes m aus $\mathtt{Ab}(n)$ gilt. Wegen $n < x$ folgt nun aber aus Lemma 2, dass

$$f_x/\ \mathtt{Ab}(n) = f_n, \tag{7.6}$$

also gilt $f_x(n) \underset{(7.3)}{=} F(\langle n, f_x/\ \mathtt{Ab}(n)\rangle) \underset{(7.6)}{=} F(\langle n, f_n\rangle) \underset{(7.5)}{=} f_a(n)$, und das Lemma ist bewiesen.

Beweis der Existenzaussage. Zu zeigen ist, dass es eine Funktion f gibt mit $f\colon W \longrightarrow Z$ und

$$f(a) = F(a, f/\ \mathtt{Ab}(a)) \text{ für alle } a \text{ aus } W. \tag{7.7}$$

Es zeigt sich, dass dies für die Funktion f von W in Z zutrifft, die jedes a aus W auf $F(\langle a, f_a\rangle)$ wirft, wobei f_a jeweils die nach Lemma 3 eindeutig bestimmte Funktion von $\mathtt{Ab}(a)$ in Z ist, für welche

$$f_a(x) = F(\langle x, f_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle) \text{ für alle } x \text{ aus } \mathtt{Ab}(a) \text{ gilt.} \tag{7.8}$$

Es gilt also per Definition von f, dass

$$f(a) = F(\langle a, f_a\rangle) \text{ für alle Elemente } a \text{ von } W, \tag{7.9}$$

und wir sind fertig, wenn sich erweist, dass $f_a = f/\ \mathtt{Ab}(a)$ ist: Dann können wir in (7.9) das $F(\langle a, f_a\rangle)$ durch $F(a, f/\ \mathtt{Ab}(a))$ ersetzen und erhalten (7.7), wodurch der Existenzteil des Satzes bewiesen wäre. Da f_a und $f/\ \mathtt{Ab}(a)$ denselben Definitionsbereich $\mathtt{Ab}(a)$ haben, bleibt nur zu zeigen, dass beide Funktionen jedes x aus

[4] Ist $\mathtt{Ab}(a)$ leer, so ist f_a die leere Funktion, und für diese folgt (7.4) sofort aus Lemma 5.9.3 S. 117.

[5] Nach Lemma 5.13.18 S. 179 folgt aus $x < a$, dass $\mathtt{Ab}(x) \subseteq \mathtt{Ab}(a)$, also ist $\mathtt{Ab}(x)$ Teilklasse des Definitionsbereichs $\mathtt{Ab}(a)$ von f_a, also ist $f_a/\ \mathtt{Ab}(x)$ eine wohldefinierte Funktion von $\mathtt{Ab}(x)$ in Z (vgl. Satz 5.34 S. 143).

$\mathtt{Ab}(a)$ stets auf ein und dasselbe Objekt werfen. Da die Einschränkung $f/\ \mathtt{Ab}(a)$ jedes solche x auf dasselbe Element von Z wirft wie f, ist hierzu zu zeigen, dass $f_a(x) = f(x)$ für jedes x aus $\mathtt{Ab}(a)$ gilt. Für jedes x aus $\mathtt{Ab}(a)$ gilt aber $x < a$, also nach Lemma 2

$$f_a/\ \mathtt{Ab}(x) = f_x, \tag{7.10}$$

und somit folgt in der Tat: $f_a(x) \underset{(7.8)}{=} F(\langle x, f_a/\ \mathtt{Ab}(x)\rangle) \underset{(7.10)}{=} F(\langle x, f_x\rangle) \underset{(7.9)}{=} f(x)$. □

Theorem 5.13.35 S. 187

Für geordnete Klassen $\mathcal{C} := \langle C, <^1\rangle$ und $\mathcal{D} := \langle D, <^2\rangle$ und $\mathcal{E} := \langle E, <^3\rangle$ gilt

$\mathcal{C} \overset{\mathrm{id}_C}{\simeq} \mathcal{C}$, d. h. $\simeq$ ist reflexiv, (5.58)

Wenn $\mathcal{C} \overset{f}{\simeq} \mathcal{D}$, so auch $\mathcal{D} \overset{f^{\rightharpoonup}}{\simeq} \mathcal{C}$, d. h. $\simeq$ ist symmetrisch, (5.59)

Wenn $\mathcal{C} \overset{f}{\simeq} \mathcal{D}$ und $\mathcal{D} \overset{g}{\simeq} \mathcal{E}$, so auch $\mathcal{C} \overset{f \looparrowright g}{\simeq} \mathcal{E}$, d. h. $\simeq$ ist transitiv. (5.60)

Beweis von (5.58). Die Funktion id_C, die jedes x aus C auf x selbst wirft, ist eine Bijektion von C in C, und ferner ist id_C $<^1$-$<^1$-ordnungserhaltend: Die Formeln $x <^1 y$ und $\mathrm{id}_C(x) <^1 \mathrm{id}_C(y)$ haben denselben Wahrheitswert, weil $\mathrm{id}_C(x)$ und $\mathrm{id}_C(y)$ dasselbe bezeichnet wie x bzw. y.

Beweis von (5.59). Ist f Isomorphismus von $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$, so ist f Bijektion von C in D, also ist die Umkehrfunktion $f^{\rightharpoonup}$ eine Bijektion von D in C. Zu zeigen bleibt, dass $f^{\rightharpoonup}$ $<^2$-$<^1$-ordnungserhaltend ist. Sind x und y aus D, so seien a und b die Elemente von C, die f auf x bzw. y wirft. Dann ist $f(a) = x$ und $f(b) = y$ und somit auch $f^{\rightharpoonup}(x) = a$ und $f^{\rightharpoonup}(y) = b$. Zu zeigen ist, das die Formeln
(1) $x <^2 y$ und (2) $f^{\rightharpoonup}(x) <^1 f^{\rightharpoonup}(y)$
denselben Wahrheitswert haben. Da f $<^1$-$<^2$-ordnungserhaltend ist, haben aber
(3) $a <^1 b$ und (4) $f(a) <^2 f(b)$
denselben Wahrheitswert. Dann haben aber (1) und (4) denselben Wahrheitswert (weil $f(a) = x$ und $f(b) = y$ ist), ebenso wie (2) und (3) (weil $f^{\rightharpoonup}(x) = a$ und $f^{\rightharpoonup}(y) = b$ ist). Insgesamt haben sowohl (1) und (4), als auch (4) und (3) als auch (3) und (2) und somit auch (1) und (2) denselben Wahrheitswert.

Beweis von (5.60). Ist $\mathcal{C} \overset{f}{\simeq} \mathcal{D}$ und $\mathcal{D} \overset{g}{\simeq} \mathcal{E}$, so ist f Bijektion von C in D und g eine solche von D in E. Daher ist die Komposition $f \looparrowright g$ eine Bijektion von C in E. Zu zeigen bleibt, dass $f \looparrowright g$ $<^1$-$<^3$-ordnungserhaltend ist. Weil f $<^1$-$<^2$-ordnungserhaltend ist, gilt aber für a, b aus C genau dann $a <^1 b$, wenn $f(a) <^2 f(b)$ gilt, und dieses wieder gilt, weil g $<^2$-$<^3$-ordnungserhaltend ist, genau dann, wenn $g(f(a)) <^3 g(f(b))$, das heißt, wenn $(f \looparrowright g)(a) <^3 (f \looparrowright g)(b)$. □

Theorem 5.13.37 S. 187

Für vollgeordnete Klassen $\mathcal{C} := \langle C, <^1\rangle$ und $\mathcal{D} := \langle D, <^2\rangle$ gilt:

Ist $\mathcal{C} \overset{h}{\simeq} \mathcal{D}$ und $c \in C$, so ist auch $\mathcal{AB}(c) \overset{h/\,Ab(c)}{\simeq} \mathcal{AB}(h(c))$. (5.61)

Für (halb)geordnete Klassen $\mathcal{C} = \langle C, <^1\rangle$ und $\mathcal{D} = \langle D, <^2\rangle$ gilt:

Ist $\mathcal{C}$ wohlgeordnet und $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, so ist auch $\mathcal{D}$ wohlgeordnet. (5.62)

Beweis von (5.61). Nach Voraussetzung ist h eine eine bijektive ordnungserhaltende Funktion von C in D. Zu zeigen ist, dass $h/\ \mathtt{Ab}(c)$ eine bijektive ordnungserhaltende Funktion von $\mathtt{Ab}(c)$ in $\mathtt{Ab}(h(c))$ ist (wobei $\mathtt{Ab}(c)$ die Vorgänger von c bezüglich Relation $<^1$ und $\mathtt{Ab}(h(c))$ die Vorgänger von $h(c)$ bezüglich $<^2$ bezeichnet). Aus der Theorem 5.10.64 S. 143 folgt, dass $h/\ \mathtt{Ab}(c)$ eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathtt{Ab}(c)$ ist, und dass ihr Wertebereich eine Teilklasse C^* von C ist. Nun ist $h/\ \mathtt{Ab}(c)$: $\mathtt{Ab}(c) \longrightarrow C^*$ surjektiv (denn die Funktion tritt beim Werfen natürlich alle Objekte ihres Wertebereichs C^*), und da $h/\ \mathtt{Ab}(c)$ in Bereich $\mathtt{Ab}(c)$ dieselben Würfe ausführt wie h, ist $h/\ \mathtt{Ab}(c)$ ebenso wie h auch injektiv und ordnungserhaltend, insgesamt ist $h/\ \mathtt{Ab}(c)$

also eine ordnungserhaltende Bijektion von $\mathtt{Ab}(c)$ in C^*, und es bleibt nur zu zeigen, dass der Wertebereich C^* gleich der Klasse $\mathtt{Ab}(h(c))$ ist. Hierzu ist zu zeigen, dass (1) $h/\ \mathtt{Ab}(c)$ die Elemente von $\mathtt{Ab}(c)$ *nur* auf Elemente von $\mathtt{Ab}(h(c))$ wirft, und dass (2) dabei *alle* Elemente von $\mathtt{Ab}(h(c))$ getroffen werden.

Zu (1): Sei $x \in \mathtt{Ab}(c)$. Wir müssen zeigen, dass h dieses x auf ein Element von $\mathtt{Ab}(h(c))$ wirft, dann tut dies auch die Einschränkung $h/\ \mathtt{Ab}(c)$. Als Element von $\mathtt{Ab}(c)$ ist nun x ein Vorgänger von c, d. h. es gilt $x <^1 c$, und da h ordnungserhaltend ist, folgt daraus $h(x) <^2 h(c)$, und so liegt $h(x)$ in $\mathtt{Ab}(h(c))$.

Zu (2): Sei $y \in \mathtt{Ab}(h(c))$. Wir müssen zeigen, dass $h/\ \mathtt{Ab}(c)$ ein Element auf y wirft. Da h bijektiv ist, gibt ein Element u von C, das h auf y wirft, so dass also $h(u) = y$. Wenn sich herausstellt, dass dieses u in $\mathtt{Ab}(c)$ liegt, so wirft auch $h/\ \mathtt{Ab}(c)$ dieses u auf y und wir sind fertig. Sei nun ANGENOMMEN, dass u *kein* Element von $\mathtt{Ab}(c)$ ist, dann ist $u <^1 c$ falsch. Wegen der Linearität von $<^1$ gilt dann $c = u$ oder $c <^1 u$. Im ersten Fall ist $h(c) = h(u)$, im zweiten Fall aber folgt, weil h ordnungserhaltend ist, dass $h(c) <^2 h(u)$. Demnach ist $h(c) = h(u)$ oder $h(c) <^2 h(u)$, und wegen der Trichotomie von $<^2$ also *nicht* $h(u) <^2 h(c)$. Das aber heißt: $h(u)$ liegt nicht in $\mathtt{Ab}(h(c))$. Da $h(u) = y$ war, liegt also y nicht in $\mathtt{Ab}(h(c))$, im Widerspruch zur Wahl von y. Also war die ANNAHME falsch und folglich gilt $u \in \mathtt{Ab}(c)$.

Beweis von (5.62). Da $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, existiert ein Isomorphismus f von $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$. Es ist vorausgesetzt, dass $\mathcal{C}$ wohlgeordnet ist, und dass $\mathcal{D}$ (halb)geordnet ist. Um also die Behauptung zu beweisen, dass $\mathcal{D}$ sogar wohlgeordnet ist, muss nachgewiesen werden, dass (a) $\mathcal{D}$ vollgeordnet ist, also $<^2$ über D linear ist, und dass dann (b) die Minimums– und (c) die Abschnittsbedingung erfüllt ist.

(a) Zur Linearität. Zu zeigen ist, dass für Elemente d und $\widehat{d}$ von D mindestens eine der Formeln $d <^2 \widehat{d}$, $\widehat{d} <^2 d$ und $d = \widehat{d}$ gilt. Seien nun c und $\widehat{c}$ die Elemente von C, welche f auf d bzw. auf $\widehat{d}$ wirft, so dass also $f(c) = d$ und $f(\widehat{c}) = \widehat{d}$. Da $\mathcal{C}$ vollgeordnet ist, ist die Relation $<^1$ über C linear, also gilt mindestens eine der Formeln $c <^1 \widehat{c}$, $\widehat{c} <^1 c$ und $c = \widehat{c}$. Falls $c <^1 \widehat{c}$ gilt, so folgt, weil f ordnungserhaltend ist, dass $f(c) <^2 f(\widehat{c})$ gilt, und weil $f(c)$ mit d und $f(\widehat{c})$ mit $\widehat{d}$ identisch ist, gilt dann $d <^2 \widehat{d}$. Falls $\widehat{c} <^1 c$ gilt, folgt analog, dass $\widehat{d} <^2 d$ gilt. Falls schließlich $c = \widehat{c}$ gilt, also c nichts anders als $\widehat{c}$ bezeichnet, bezeichnet natürlich $f(c)$ dasselbe wie $f(\widehat{c})$, und weil $f(c)$ mit d und $f(\widehat{c})$ mit $\widehat{d}$ identisch ist, gilt jetzt $d = \widehat{d}$.

(b) Zur Minimumsbedingung. Zu zeigen ist, dass jede nichtleere Teilklasse T von D ein Minimum hat. Ist ein solches T gegeben, wählen wir ein t aus T. Da f surjektiv ist, gibt es ein t^* aus C, so dass $f(t^*) = t$. Nun ist $\{x \mid x \in C \text{ und } f(x) \in T\}$ eine Teilklasse von C, und es liegt t^* in dieser Klasse, da ja $\ll t^* \in C$ und $f(t^*) = t \in T \gg$ gilt. So ist die genannte Klasse eine nichtleere Teilklasse von C, sie besitzt also, da $\mathcal{C}$ wohlgeordnet ist, ein Minimum m. Wir zeigen, dass dann $f(m)$ das Minimum von T ist: Für jedes Element y von T gibt es ein y^*, das f auf y wirft, so dass $f(y^*) = y$. Es gilt dann $\ll y^* \in C$ und $f(y^*) = y \in T \gg$, weshalb y^* in der Klasse $\{x \mid x \in C \text{ und } f(x) \in T\}$ liegt. Da m das Minimum dieser Klasse ist, gilt also $m = y^*$ oder $m <^1 y^*$. Im ersten Fall folgt unmittelbar $f(m) = f(y^*)$, und im zweiten folgt, weil f ordnungserhaltend ist, $f(m) <^2 f(y^*)$. In jedem Fall gilt also $f(m) \leq^2 f(y^*)$, und wenn wir in letzterer Aussage das $f(y^*)$ durch das mit ihm identische y ersetzen, erhalten wir $f(m) \leq^2 y$. Da dies für ein *beliebiges* y aus T gilt, ist $f(m)$ das Minimum von T.

(c) Zur Abschnittsbedingung. Zu zeigen ist, dass für jedes d aus D der Abschnitt $\mathtt{Ab}(d)$ eine Menge ist. Sei also d aus D und c dasjenige Element von C, das f auf d wirft, so dass also $f(c) = d$. Wegen (5.61) ist dann $f/\ \mathtt{Ab}(c)$ ein Isomorphismus von $\langle \mathtt{Ab}(c), <^1 \rangle$ in $\langle \mathtt{Ab}(f(c)), <^2 \rangle$, d. h. $\langle \mathtt{Ab}(d), <^2 \rangle$. Insbesondere ist $f/\ \mathtt{Ab}(c)$ eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathtt{Ab}(c)$ und Wertebereich $\mathtt{Ab}(d)$. Weil nun in $\mathcal{C}$ die Abschnittsbedingung gilt, ist $\mathtt{Ab}(c)$ eine Menge, also folgt mittels des Ersetzungsaxioms 5.10.57, dass auch $\mathtt{Ab}(d)$ eine Menge ist. □

Theorem 5.13.38 S. 188

Sei $\langle A, < \rangle$ eine wohlgeordnete Klasse und $A \sim B$.
Dann gibt es eine Relation $<'$, so dass $\langle B, <' \rangle$ eine mit $\langle A, < \rangle$ isomorphe wohlgeordnete Klasse ist.

Beweis. Wegen $A \sim B$ gibt es eine Bijektion f von A in B. Als Bijektion hat f eine Umkehrfunktion $f^{\rightharpoonup}$, so dass $f^{\rightharpoonup}(x)$ für alle x aus B ein Element von A ist. Nach dem Komprehensionstheorem 5.10.41 S. 134 existiert nun eine Relation $<'$, die ein Element x von B genau dann auf ein Element y von B ausrichtet, wenn $f^{\rightharpoonup}(x) < f^{\rightharpoonup}(y)$ gilt (und die sonst nichts tut). Es gilt also für x und y aus B:

$$x <' y \text{ genau dann wenn } f^{\rightharpoonup}(x) < f^{\rightharpoonup}(y) \quad \text{(Definitionsäquivalenz für } <')$$

Weil $<'$ außerhalb von B nichts tut, ist $<'$ eine Relation in B, also $\langle B, <'\rangle$ eine *relational strukturierte* Klasse (gemäß Definition 5.13.7 S. 176). Weiter ist $<'$ *irreflexiv* über B: Denn wäre $x <' x$ für ein x aus D, so würde nach obiger Definitionsäquivalenz folgen, das $f^{\rightharpoonup}(x) < f^{\rightharpoonup}(x)$ gilt im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$. Auch ist $<'$ *transitiv* über B: Ist nämlich $x <' y <' z$ für x, y, z aus D, so folgt nach obiger Definitionsäquivalenz, dass $f^{\rightharpoonup}(x) < f^{\rightharpoonup}(y) < f^{\rightharpoonup}(z)$. Daraus folgt aufgrund der Transitivität von $<$, dass $f^{\rightharpoonup}(x) < f^{\rightharpoonup}(z)$, was nach Definitionsäquivalenz $x <' z$ impliziert. Insgesamt ist nun $\langle B, <'\rangle$ eine *geordnete Klasse*. Weiter ist f *$<$-$<'$-ordnungserhaltend*. Seien nämlich x und y Elemente von A, für die $x < y$ gilt. Bezeichnen wir $f(x)$ und $f(y)$ mit a bzw. b, gilt $f(x) = a$ und $f(y) = b$ sowie $f^{\rightharpoonup}(a) = x$ und $f^{\rightharpoonup}(b) = y$. Wir können also in der vorausgesetzten Formel $x < y$ das x durch $f^{\rightharpoonup}(a)$ und das y durch $f^{\rightharpoonup}(b)$ ersetzen und erhalten $f^{\rightharpoonup}(a) < f^{\rightharpoonup}(b)$. Nach der Definitionsäquivalenz folgt daraus $a <' b$. Hier können wir wegen $f(x) = a$ und $f(y) = b$ wieder das a durch $f(x)$ und das b durch $f(y)$ ersetzen und erhalten $f(x) <' f(y)$. Insgesamt ist f somit ein *Isomorphismus* von der wohlgeordneten Klasse $\langle A, <\rangle$ in die geordnete Klasse $\langle B, <'\rangle$, und somit gilt $\langle A, <\rangle \simeq \langle B, <'\rangle$. Mit Hilfe von Satz (5.62) des zuvor bewiesenen Theorems 5.13.37 S. 187 ergibt sich daraus, dass $\langle B, <'\rangle$ eine Wohlordnung ist. □

Theorem 5.13.39 S. 188

Für wohlgeordnete Klassen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}^*$ gilt:

Ist $\mathcal{W}$ mit $\mathcal{W}^*$ isomorph, so gibt es nur einen einzigen Isomorphismus von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}^*$. (5.63)

Es gibt keinen Isomorphismus von $\mathcal{W}$ in einen Abschnitt von $\mathcal{W}$. (5.64)

Beweis. Zunächst werden zwei Hilfssätze hergeleitet.

Lemma 1. Sei $\mathcal{A} := \langle A, <\rangle$ eine wohlgeordnete Klasse, und g eine $<$-$<$-ordnungserhaltende Funktion von A in A. *Dann gilt $a \leq g(a)$ für jedes a aus A.*

Beweis von Lemma 1. Sei das Gegenteil ANGENOMMEN, dass also $a \leq g(a)$ nicht immer wahr ist. Dann gilt per Linearität für mindestens a aus A, dass $g(a) < a$. Infolgedessen ist die Klasse $\{x \mid g(x) < x\}$ nichtleer, sie besitzt also wegen des Wohlgeordnetseins von $\langle A, <\rangle$ ein Minimum m. Da das Minimum in der Klasse liegt, gilt $g(m) < m$, und da g ordnungserhaltend ist, folgt $g(g(m)) < g(m)$. Andererseits bedeutet die Formel $g(m) < m$ auch, dass $g(m)$ kleiner als das Minimum m der genannten Klasse ist; also kann $g(m)$ *nicht* mehr in dieser Klasse liegen. Wenn aber ein x *nicht* in $\{x \mid g(x) < x\}$ liegt, darf $g(x) < x$ *nicht* gelten. Da also $g(m)$ *nicht* zu der Klasse gehört, muss $g(g(m)) < g(m)$ *falsch* sein. Somit haben wir einen Widerspruch, so dass obige ANNAHME falsch war und stets $a \leq g(a)$ gilt.

Lemma 2. *Der einzige Isomorphismus von einer wohlgeordneten Klasse $\langle A, <\rangle$ in $\langle A, <\rangle$ ist* id_A.

Beweis von Lemma 2. Nach Satz 5.58 S. 187 ist id_A ein Isomorphismus von $\langle A, <\rangle$ in $\langle A, <\rangle$. Zu zeigen bleibt, dass es keinen weiteren Isomorphismus von $\langle A, <\rangle$ in $\langle A, <\rangle$ gibt. Wenn f ein Isomorphismus von $\langle A, <\rangle$ in $\langle A, <\rangle$ ist, ist also zu zeigen, dass f die Identität id_A sein muss. Nach 5.59 S. 187 ist zunächst auch die Umkehrfunktion $f^{\rightharpoonup}$ ein Isomorphismus von $\langle A, <\rangle$ in $\langle A, <\rangle$. Da f ordnungserhaltend ist, gilt für jedes a aus A gemäß Lemma 1, dass $f(a) \leq a$. Da auch $f(a)$ in A liegt und $f^{\rightharpoonup}$ ordnungserhaltend ist, gilt gemäß Lemma 1 auch, dass $f^{\rightharpoonup}(f(a)) \leq f(a)$. Nun ist aber $f^{\rightharpoonup}(f(a))$ dasselbe wie a, also gilt $f(a) \leq a$. So gilt insgesamt sowohl $f(a) \leq a$ als auch $a \leq f(a)$, und dies bedeutet aufgrund der Identitivität (Satz 5.50 S. 174), dass $f(a) = a$. Mithin wirft f jedes a aus A auf sich selbst, ist also die Identität id_A.

Beweis von (5.63). Seien f_1, f_2 Isomorphismen von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}^*$, so ist nach Satz 5.60 S. 187 $f_1 \looparrowright f_2^{\rightharpoonup}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}$. Nach Lemma 2 muss daher $f_1 \looparrowright f_2^{\rightharpoonup}$ mit id_W identisch sein. Daher ist

$$(f_1 \looparrowright f_2^{\rightharpoonup}) \looparrowright f_2 \text{ identisch mit } \mathrm{id}_W \looparrowright f_2.$$

$(f_1 \looparrowright f_2^{\rightharpoonup}) \looparrowright f_2$ ist die bijektive Funktion, die herauskommt, wenn man f_1 zuerst mit der Umkehrfunktion $f_2^{\rightharpoonup}$ und dann mit f_2 verkettet: das ist wieder f_1, da sich die beiden letzten Schritte neutralisieren; $\mathrm{id}_W \looparrowright f_2$ aber ist die bijektive Funktion, die herauskommt, wenn man id_W mit f_2 verkettet: das ist f_2 selbst. Die Identität von $(f_1 \looparrowright f_2^{\rightharpoonup}) \looparrowright f_2$ mit $\mathrm{id}_W \looparrowright f_2$ bedeutet daher, dass $f_1 = f_2$.

Beweis von (5.64). ANGENOMMEN, die wohlgeordnete Klasse $\mathcal{W} := \langle W, <\rangle$ ist mit einem ihrer Abschnitte $\mathcal{AB}(a)$ isomorph. Der entsprechende Isomorphismus ist dann eine ordnungserhaltende Bijektion von W in $\mathtt{Ab}(a)$. Es liegt daher der Funktionswert $f(a)$ in $\mathtt{Ab}(a)$, ist also ein Vorgänger von a, weshalb $f(a) < a$ gelten

muss. Zugleich gilt aber nach Lemma 1, dass $a \leq f(a)$, also $a = f(a)$ oder $a < f(a)$ im Widerspruch zur Trichotomie von $<$. Also war die Annahme falsch. □

Theorem 5.13.40 S. 188

Für wohlgeordnete Klassen $\mathcal{W} = \langle W, < \rangle$ und $\mathcal{W}^* = \langle W^*, <^* \rangle$ gilt genau eine der Aussagen:

(1) $\mathcal{W}$ ist isomorph mit $\mathcal{W}^*$,

(2) $\mathcal{W}$ ist isomorph mit einem Abschnitt von $\mathcal{W}^*$,

(3) $\mathcal{W}^*$ ist isomorph mit einem Abschnitt von $\mathcal{W}$.

Beweis. Zu beachten ist, dass die Abschnitte von $\mathcal{W}$ und von $\mathcal{W}^*$ strukturierte Klassen $\mathcal{AB}(x) := \langle \mathtt{Ab}(x), < \rangle$ bzw. $\mathcal{AB}(y) := \langle \mathtt{Ab}(y), <^* \rangle$ für x aus W bzw. y aus W^* sind, und diese sind nach Theorem 5.13.28 S. 183 ebenfalls wohlgeordnete Klassen. – Zu zeigen ist nun zunächst, dass *nicht mehrere* der Aussagen (1), (2) und (3) zugleich gelten können; und anschließend, dass *mindestens eine* gilt. Würde (1) und (2) gelten, müsste es einen Isomorphismus von $\mathcal{W}^*$ in $\mathcal{W}$ und einen solchen von $\mathcal{W}$ in einen Abschnitt von $\mathcal{W}^*$ geben, und durch Komposition dieser Isomorphismen erhielte man nach Satz 5.60 S. 187 einen solchen von $\mathcal{W}^*$ in einen Abschnitt von $\mathcal{W}^*$, was dem gerade bewiesenen Satz 5.64 S. 188 widerspricht. Analog sieht man, dass (1) mit (3) nicht vereinbar ist. Gilt schließlich (2) und (3), so gibt es einen Isomorphismus i von $\mathcal{W}$ in einen Abschnitt $\mathcal{AB}(b)$ von $\mathcal{W}^*$ und einen Isomorphismus j von $\mathcal{W}^*$ in einen Abschnitt $\mathcal{AB}(a)$ von $\mathcal{W}$. Sei dann j' die Einschränkung $j/\ \mathtt{Ab}(b)$. Nach Satz 5.61 S. 187 ist j' ein Isomorphismus von $\mathcal{AB}(b)$ in $\mathcal{AB}(j(b))$, und so ist dann die Komposition $i \looparrowright j'$ nach Satz 5.60 ein Isomorphismus von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{AB}(j(b))$, also in einen Abschnitt von $\mathcal{W}$, was wieder Satz 5.64 widerspricht. So bleibt nun nur noch zu zeigen, dass *mindestens eine* der Aussagen (1), (2) oder (3) wahr ist. Hierzu bezeichne Γ die Relation mit folgender Definitionsäquivalenz:

$x \ \Gamma \ y$ gilt genau dann, wenn $x \in W$, $y \in W^*$ und $\mathcal{AB}(x) \simeq \mathcal{AB}(y)$.

Für dieses Γ lassen sich zunächst folgende Tatsachen beweisen:

(a) Die Relation Γ ist eine Funktion.

(b) Γ ist injektiv.

(c) Γ ist ordnungserhaltend, d. h. für alle x, y aus W mit $x < y$ gilt $\Gamma(x) < \Gamma(y)$.

Zu (a). Annahme: Γ ist keine Funktion. Dann gibt es ein x aus W, das Γ auf mehrere y aus W^* ausrichtet, etwa auf y_1 und y_2 mit $y_1 \neq y_2$. Das bedeutet aufgrund der Definitionsäquivalenz von Γ, dass $\mathcal{AB}(x)$ sowohl mit $\mathcal{AB}(y_1)$ als auch mit $\mathcal{AB}(y_2)$ isomorph ist. Dann sind aber $\mathcal{AB}(y_1)$ und $\mathcal{AB}(y_2)$ auch *miteinander* isomorph. Nun folgt aus $y_1 \neq y_2$ wegen der Trichotomie der Relation $<^*$, dass entweder $y_1 <^* y_2$ oder $y_2 <^* y_1$; wir können dann von $y_1 <^* y_2$ ausgehen (nachdem wir nötigenfalls die Benennungen für y_1 und y_2 vertauscht haben). Aus $y_1 <^* y_2$ folgt aber, dass y_1 Element von $\mathtt{Ab}(y_2)$ ist. Nun ist $\mathtt{Ab}(y_2)$ der Träger der wohlgeordneten Klasse $\mathcal{AB}(y_2) := \langle \mathtt{Ab}(y_2), <^* \rangle$. In dieser wohlgeordneten Klasse gibt es wegen $y_1 \in \mathtt{Ab}(y_2)$ ebenfalls einen Abschnitt von y_1, und dieser ist $\langle \mathtt{Ab}(y_1), <^* \rangle$, also $= \mathcal{AB}(y_1)$. Die Isomorphie von $\mathcal{AB}(y_2)$ mit $\mathcal{AB}(y_1)$ bedeutet daher, das die wohlgeordnete Klasse $\mathcal{AB}(y_2)$ mit einem ihrer Abschnitte isomorph ist, was im Widerspruch zu Satz 5.64 steht. Daher war die Annahme falsch und Γ ist eine Funktion.

Zu (b). Γ ist injektiv. Andernfalls gäbe es ein y aus W^*, auf das mehrere x aus W geworfen würden, etwa x_1 und x_2, und daher wäre sowohl $\mathtt{Ab}(x_1)$ als auch $\mathtt{Ab}(x_2)$ mit $\mathtt{Ab}(y)$ isomorph. Diese Annahme führt zu einem analogen Widerspruch wie die soeben in Teil (a) des Beweises widerlegte Annahme.

Zu (c). Γ ist ordnungserhaltend. Seien nämlich x_1 und x_2 Elemente von W mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist, dass $\Gamma(x_1) <^* \Gamma(x_2)$. Nun ist $\Gamma(x_2)$ dasjenige Element, auf das x_2 durch Γ ausgerichtet wird. Per Definitionsäquivalenz von Γ muss daher $\mathcal{AB}(x_2)$ isomorph zu $\mathcal{AB}(\Gamma(x_2))$ sein. Sei h der Isomorphismus von $\mathcal{AB}(x_2)$ in $\mathcal{AB}(\Gamma(x_2))$. Wegen $x_1 < x_2$ liegt x_1 im Definitionsbereich $\mathtt{Ab}(x_2)$ von h. Es ist dann nach Satz 5.61 S. 187 die Einschränkung $h/\ \mathtt{Ab}(x_1)$ ein Isomorphismus von $\mathcal{AB}(x_1)$ in $\mathcal{AB}(h(x_1))$. Die Existenz eines Isomorphismus von $\mathcal{AB}(x_1)$ in $\mathcal{AB}(h(x_1))$ zeigt aber nach Definition von Γ, dass x_1 von Γ auf $h(x_1)$ ausgerichtet wird, d. h. es gilt $\Gamma(x_1) = h(x_1)$. Nun liegt aber $h(x_1)$ im Wertebereich $\mathtt{Ab}(\Gamma(x_2))$ von h, also ist $h(x_1) < \Gamma(x_2)$. Zusammen mit $\Gamma(x_1) = h(x_1)$ heißt dies: $\Gamma(x_1) < \Gamma(x_2)$.

Mittels (a), (b), und (c) ist nun klar, dass Γ eine injektive ordnungserhaltende Funktion ist. Nach Definition ist klar, dass ihr Definitionsbereich eine Teilmenge von W und ihr Wertebereich eine solche von W^* ist. Über diese Bereiche lässt sich nun genauer Folgendes zeigen:

(d) Wenn $x \in \mathtt{Db}(\Gamma)$, liegt auch jedes Element a von W, das kleiner als x ist, in $\mathtt{Db}(\Gamma)$.

(e) Wenn $y \in \mathtt{Wb}(\Gamma)$, liegt auch jedes Element b von W^*, das kleiner als y ist, in $\mathtt{Wb}(\Gamma)$.
(f) Wenn $\mathtt{Db}(\Gamma) \neq W$, ist $\mathtt{Db}(\Gamma) = \mathtt{Ab}(a)$ für ein a aus W.
(g) Wenn $\mathtt{Wb}(\Gamma) \neq W^*$, ist $\mathtt{Wb}(\Gamma) = \mathtt{Ab}(b)$ für ein b aus W^*.

Zu (d). Zu zeigen ist: Aus $x \in \mathtt{Db}(\Gamma)$, $a \in W$ und $a < x$ folgt $a \in \mathtt{Db}(\Gamma)$. Wenn $x \in \mathtt{Db}(\Gamma)$, richtet Γ das x auf ein y aus W^* aus, per Definition von Γ gilt also $\mathcal{AB}(x) \simeq \mathcal{AB}(y)$. Sei h der entsprechende Isomorphismus. Wegen $a < x$ ist $a \in \mathtt{Ab}(x)$, das heißt a ist Element der Trägerklasse von $\mathcal{AB}(x)$, und nach Satz 5.61 S. 187 ist der Abschnitt von a in $\mathcal{AB}(x)$ zu dem Abschnitt von $h(a)$ in $\mathcal{AB}(y)$ isomorph. Somit gilt $\mathcal{AB}(a) \simeq \mathcal{AB}(h(a))$, weshalb man aus der Definitionsäquivalenz von Γ abliest, dass Γ das Element a von W auf das Element $h(a)$ von W^* ausrichtet, also a auf $h(a)$ wirft. Also gehört a zum Definitionsbereich von Γ.
Zu (e). Der Beweis ist analog zu dem von (d).
Zu (f). Sei $\mathtt{Db}(\Gamma) \neq W$. Dann muss es ein Element von W geben, das *nicht* in $\mathtt{Db}(\Gamma)$ liegt (sonst wäre $W \subseteq \mathtt{Db}(\Gamma)$, und daraus würde daraus zusammen mit der Tatsache, dass $\mathtt{Db}(\Gamma)$ nach der Definition von Γ eine Teilklasse von W ist, folgen, dass $\mathtt{Db}(\Gamma) = W$). Folglich ist $W \setminus \mathtt{Db}(\Gamma)$ eine nichtleere Teilklasse von W, und besitzt, weil $\mathcal{W}$ wohlgeordnet ist, ein Minimum a. Da dieses a das kleinste Element von W ist, das *nicht* in $\mathtt{Db}(\Gamma)$ liegt, müssen alle Elemente von W, die kleiner als a sind, in $\mathtt{Db}(\Gamma)$ liegen. Das bedeutet: Alle Elemente von $\mathtt{Ab}(a)$ liegen in $\mathtt{Db}(\Gamma)$. Wenn wir also zeigen, dass auch umgekehrt alle Elemente von $\mathtt{Db}(\Gamma)$ in $\mathtt{Ab}(a)$ liegen, folgt $\mathtt{Ab}(a) = \mathtt{Db}(\Gamma)$ und (f) ist bewiesen. Sei also ANGENOMMEN, dass es ein Element x von $\mathtt{Db}(\Gamma)$ gibt, das *nicht* in $\mathtt{Ab}(a)$ liegt. Dann ist $x < a$ falsch, also $a \leq x$ richtig, also entweder $a = x$ oder $a < x$. Aber $a = x$ ist falsch, denn x liegt nach ANNAHME in $\mathtt{Db}(\Gamma)$, aber a liegt *nicht* in $\mathtt{Db}(\Gamma)$ (a war ja das kleinste Element von W, das *nicht* in $\mathtt{Db}(\Gamma)$ liegt). Auch $a < x$ ist falsch, sonst würde wegen $x \in \mathtt{Db}(\Gamma)$ und $a < x$ aus (d) die falsche Aussage folgen, dass $a \in \mathtt{Db}(\Gamma)$. So ist die ANNAHME falsch und jedes Element x von $\mathtt{Db}(\Gamma)$ liegt in $\mathtt{Ab}(a)$.
Zu (g). Der Beweis ist analog zum Beweis von (f). – Nun gilt offenbar eine der drei folgenden Aussagen:

(α) $\mathtt{Db}(\Gamma) = W$ und $\mathtt{Wb}(\Gamma) = W^*$, oder ($\beta$) $\mathtt{Wb}(\Gamma) \neq W^*$, oder ($\gamma$) $\mathtt{Db}(\Gamma) \neq W$,

und wir schließen den Beweis ab, indem wir zeigen, dass

im Fall (α) die Aussage (1) gilt: $\mathcal{W}$ ist isomorph mit $\mathcal{W}^*$, und
im Fall (β) die Aussage (2) gilt: $\mathcal{W}$ ist isomorph mit einem Abschnitt von $\mathcal{W}^*$, und
im Fall (γ) die Aussage (3) gilt: $\mathcal{W}^*$ ist isomorph mit einem Abschnitt von $\mathcal{W}$.

Im Fall (α) ist Γ wegen (b) und (c) in der Tat ein Isomorphismus von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}^*$.
Im Fall (β) brauchen wir wegen (b) und (c) nur zu zeigen, dass $\mathtt{Db}(\Gamma) = W$ und $\mathtt{Wb}(\Gamma)$ ein Abschnitt von $\mathcal{W}^*$ ist. Wegen (g) gilt im Fall (β) in der Tat $\mathtt{Wb}(\Gamma) = \mathtt{Ab}(b)$ für ein Element b von W^*. Außerdem ist $\mathtt{Db}(\Gamma)$ nun ganz W: Denn bei ANNAHME des Gegenteils folgt wegen (f), dass $\mathtt{Db}(\Gamma) = \mathtt{Ab}(a)$ für ein a aus W ist; damit ist Γ ein Isomorphismus von $\mathcal{AB}(a)$ in $\mathcal{AB}(b)$. Aus der Isomorphie von $\mathcal{AB}(a)$ und $\mathcal{AB}(b)$ folgt aber mittels der Definitionsäquivalenz von Γ, dass Γ das Element a auf das Element b ausrichtet. Folglich liegt a selbst in $\mathtt{Db}(\Gamma)$ im Widerspruch dazu, dass alle Elemente von $\mathtt{Db}(\Gamma)$ in $\mathtt{Ab}(a)$ liegen, also *kleiner* als a sind.
Im Fall (γ) lässt sich analog zum Fall (β) zu zeigen, dass jetzt $\mathtt{Db}(\Gamma)$ ein Abschnitt von $\mathcal{W}$ und $\mathtt{Wb}(\Gamma) = W^*$ ist, was den Beweis abschließt. □

Theorem 5.14.3 S. 191

Für Ordinalzahlen α und β gilt:

Jedes Element von α ist eine Ordinalzahl. (5.71)
$\alpha \in \beta$ gilt genau dann, wenn $\alpha \subset \beta$. (5.72)
$\mathtt{On}$ ist eine Unmenge, die $\in$-transitiv, $\in$-linear und $\in$-fundiert ist. (5.73)

Beweis von (5.71). Für jedes Element x von α ist zu zeigen, dass x eine Ordinalzahl ist. Aus $x \in \alpha$ folgt zunächst, dass x eine Menge ist (da α als Ordinalzahl eine Mengenmenge st). Weiter gilt $x \subseteq \alpha$ (jedes ξ aus x liegt in α, denn aus $\xi \in x$ folgt zusammen mit $x \in \alpha$, dass $\xi \in x \in \alpha$, und per $\in$-Transitivität von α folgt weiter $\xi \in \alpha$), und da außerdem $\alpha \subseteq \mathbb{M}$ gilt (α ist eine Mengenklasse), folgt insgesamt $x \subseteq \mathbb{M}$, d. h. x ist eine Mengenklasse. Zusammen mit der Tatsache, dass x eine Menge ist, ist also x eine Mengenmenge.
x ist $\in$-linear: Liegen nämlich v und w in x, so per $\in$-Transitivität von α auch in α, also folgt per $\in$-Linearität von α, dass $v = w$ oder $v \in w$ oder $w \in v$.

x ist $\in$-fundiert: Ist nämlich T eine nichtleere Teilklasse von x, so liegen die Elemente von T per $\in$-Transitivität von α auch in α, so dass T auch eine nichtleere Teilklasse von α ist. Folglich besitzt T per $\in$-Fundiertheit von α ein $\in$-minimales Element.
So bleibt nur noch die $\in$-Transitivität von x zu zeigen. Hierzu sei $v \in w \in x$ vorausgesetzt. Zu zeigen ist $v \in x$. Nun ist $w \in x \in \alpha$, und weil α $\in$-transitiv ist, gilt $w \in \alpha$. Dann folgt aber $v \in w \in \alpha$, also gilt per $\in$-Transitivität von α auch $v \in \alpha$. Insgesamt sind also v, w, x Elemente von α, und aufgrund der $\in$-Linearität von α gilt $v \in x$ oder $v = x$ oder $x \in v$. Nun zeigt sich aber, dass die Annahmen $v = x$ und $x \in v$ der $\in$-Fundiertheit von α widersprechen: Angenommen $v = x$, so können wir für $v \in w \in x$ auch $x \in w \in x$ schreiben. Daraus folgt, dass es kein $\in$-minimales Element von $\{x, w\}$ gibt (x ist kein solches wegen $w \in x$, und w ist kein solches wegen $x \in w$). Damit ist diese Annahme widerlegt. Als nächstes sei angenommen, dass $x \in v$, dann gilt $x \in v \in w \in x$. Daraus folgt, dass es kein $\in$-minimales Element von $\{v, w, x\}$ gibt (x ist kein solches wegen $w \in x$, w ist keines wegen $v \in w$ und v ist keines wegen $x \in v$). Damit ist auch diese Annahme widerlegt. Also bleibt nur die dritte Alternative übrig: $v \in x$. Damit ist die Transitivität von x gezeigt und der Beweis des Satzes abgeschlossen.

Beweis von (5.72). Sei $\alpha \in \beta$. Zu zeigen ist $\alpha \subset \beta$. Nun gilt für jedes x aus α, dass $x \in \alpha \in \beta$, also liegt x per $\in$-Transitivität von β auch in β. Folglich ist $\alpha \subseteq \beta$. Weil aber $\alpha \neq \beta$ ist (wäre $\alpha = \beta$, würde $\alpha \in \beta$ bedeuten, dass $\alpha \in \alpha$ im Widerspruch zu Satz 5.70 S. 191), gilt sogar $x \subset \alpha$.
Sei umgekehrt $\alpha \subset \beta$ vorausgesetzt. Zu zeigen ist dann $\alpha \in \beta$. Da α *echte* Teilmenge von β ist, ist $\beta \setminus \alpha$ nichtleere Teilmenge von β, es gibt also per $\in$-Fundiertheit von β ein $\in$-minimales Element m von $\beta \setminus \alpha$; dieses m liegt natürlich in β. Wenn wir nun zeigen, dass $\alpha = m$ gilt, so ist α also ein Element von β und wir sind fertig. Nun ist m (als Element der Mengenmenge β) eine Menge, ebenso wie α (als Ordinalzahl) eine Menge ist. Den Beweis von $\alpha = m$ können wir also gemäß 5.10.4 S. 121 erbringen, indem wir zeigen, dass sowohl $m \subseteq \alpha$ als auch $\alpha \subseteq x$ gilt.
Es gilt $m \subseteq \alpha$. Angenommen, das ist falsch. Dann können wir ein Element μ von m wählen, das *nicht* in α liegt. Da $\mu \in m$ und $m \in \beta$, folgt $\mu \in \beta$ per $\in$-Transitivität von β. Also ist μ ein Element von β, das *nicht* in α liegt, also ein Element von $\beta \setminus \alpha$. Da aber m das $\in$-Minimum von $\beta \setminus \alpha$ ist, gilt *nicht* $\mu \in m$ im Widerspruch dazu, dass μ nach Wahl ein Element vom m war. Also war die Annahme falsch und gilt $m \subseteq \alpha$.
Weiter gilt $\alpha \subseteq m$. Für ein ξ aus α lässt sich nämlich wie folgt zeigen, dass $\xi \in m$. Aus $\xi \in \alpha$ und unserer derzeitigen Voraussetzung $\alpha \subset \beta$ folgt $\xi \in \beta$, und aus $\xi \in \beta$ und $m \in \beta$ folgt mittels $\in$-Linearität von β, dass $\xi \in m$ oder $\xi = m$ oder $m \in \xi$. Aber die letzten beiden Fälle sind ausgeschlossen (ist $\xi = m$, so folgt wegen $\xi \in \alpha$, dass $m \in \alpha$ im Widerspruch zu $m \in \beta \setminus \alpha$; ist aber $m \in \xi$, so folgt wegen $\xi \in \alpha$ per $\in$-Transitivität von α, dass wieder $m \in \alpha$ im Widerspruch zu $m \in \beta \setminus \alpha$), also muss $\xi \in m$ sein.

Beweis von (5.73). `On` ist $\in$-transitiv: Ist nämlich $\alpha \in \beta \in$ `On`, so ist β als Element von `On` eine Ordinalzahl, und α ist wegen (5.71) als Element von β ebenfalls eine Ordinalzahl, d. h. es gilt $\beta \in$ `On`.

`On` ist $\in$-linear. Sei nämlich α und β aus `On`. Dann sind α und β Ordinalzahlen und daher Mengenmengen. Da sie Mengen sind, ist nach Satz 5.19 S. 126 auch $\alpha \cap \beta$ eine Menge; da sie höchstens Mengen enthalten, gilt das auch für $\alpha \cap \beta$. Also ist $\alpha \cap \beta$ eine Mengenmenge. $\alpha \cap \beta$ ist $\in$-transitiv: Ist nämlich $x \in y \in (\alpha \cap \beta)$, so ist sowohl $x \in y \in \alpha$ als auch $x \in y \in \beta$, also gilt $x \in \alpha$ und $x \in \beta$ per $\in$-Transitivität von α bzw. von β und somit $x \in \alpha \cap \beta$. Weiter ist $\alpha \cap \beta$ $\in$-linear: Sind x und y aus $\alpha \cap \beta$, so auch aus α, und es folgt $x \in y$ oder $x = y$ oder $y \in x$ per $\in$-Linearität von α. Schließlich ist $\alpha \cap \beta$ $\in$-fundiert: Ist T eine nichtleere Teilklasse von $\alpha \cap \beta$, so auch eine solche von α, und so existiert ein $\in$-minimales Element von T per $\in$-Fundiertheit von α. Insgesamt ist $\alpha \cap \beta$ eine Ordinalzahl. Weiter gilt nun trivialerweise $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ und $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$, d. h. es gilt einerseits $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ oder $\alpha \cap \beta = \alpha$, und andererseits $\alpha \cap \beta \subset \beta$ oder $\alpha \cap \beta = \beta$. So sind vier Fälle zu betrachten:
Fall 1: $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ und $\alpha \cap \beta \subset \beta$. Wegen (5.72) ist dann die Ordinalzahl $\alpha \cap \beta$ Element von α und β, also von $\alpha \cap \beta$. Somit wäre $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, was Satz 5.70 S. 191 widerspricht. So kann dieser Fall nicht eintreten.
Fall 2: $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ und $\alpha \cap \beta = \beta$. Aus $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ folgt dann wegen (5.72), dass $\alpha \cap \beta \in \alpha$. In dieser Aussage können wir $\alpha \cap \beta$ durch das damit identische β ersetzen, und so erhalten wir $\beta \in \alpha$.
Fall 3: $\alpha \cap \beta = \alpha$ und $\alpha \cap \beta \subset \beta$. Aus $\alpha \cap \beta \subset \beta$ folgt dann wegen (5.72), dass $\alpha \cap \beta \in \beta$, und in dieser Aussage können wir $\alpha \cap \beta$ durch das damit identische α ersetzen, und so erhalten wir $\alpha \in \beta$.
Fall 4: $\alpha \cap \beta = \alpha$ und $\alpha \cap \beta = \beta$. Dann folgt $\alpha = \beta$.

`On` ist $\in$-fundiert: Sei nämlich T eine nichtleere Teilklasse von `On`. Zu zeigen ist die Existenz eines $\in$-minimalen Elements von T. Da T nichtleer ist, können wir eine Ordinalzahl ξ aus T auswählen. Wir betrachten nun die Klasse $T \cap \xi$ und unterscheiden zwei Fälle.

(a) $T \cap \xi$ ist leer. Das bedeutet, dass T und ξ kein gemeinsames Element besitzen, d. h. es gibt kein Element η von T mit $\eta \in \xi$, weshalb dann ξ ein $\in$-minimales Element von T ist.

(b) $T \cap \xi$ ist nicht leer. Dann ist dies eine nichtleere Teilklasse von ξ. Wegen der $\in$-Fundiertheit von ξ gibt es also ein $\in$-minimales Element μ von $T \cap \xi$. Wir zeigen, dass μ auch ein $\in$-minimales Element von T ist. Zunächst liegt μ in $T \cap \xi$, also auch in T. So ist nur noch zu zeigen, dass es kein Element τ von T gibt mit $\tau \in \mu$. ANGENOMMEN, es gibt ein τ aus T mit $\tau \in \mu$. Dann darf τ nicht in ξ liegen (sonst läge τ in T und ξ zugleich, wäre also Element von $\in T \cap \xi$, und unsere ANNAHME $\tau \in \mu$ würde der Tatsache widersprechen, dass μ ein $\in$-minimales Element von $T \cap \xi$ ist). Also ist $\tau \notin \xi$ anzunehmen. Dann muss aber wegen der $\in$-Linearität von `On` gelten, dass $\xi = \tau$ oder $\xi \in \tau$. Aber beides hat zur Folge, dass $\xi \in \mu$ gilt (ist nämlich $\xi = \tau$, können wir für unsere ANNAHME $\tau \in \mu$ sofort $\xi \in \mu$ schreiben; ist aber $\xi \in \tau$, so folgt zusammen mit der ANNAHME, dass $\xi \in \tau \in \mu$, und daraus folgt per $\in$-Transitivität von μ wieder, dass $\xi \in \mu$). Außer $\xi \in \mu$ gilt aber auch $\mu \in \xi$, da ja μ ein Element (nämlich das minimale) von $T \cap \xi$ war. Insgesamt folgt also $\xi \in \mu \in \xi$ und per $\in$-Transitivität von ξ sodann $\xi \in \xi$, was dem Satz 5.70 S. 191 widerspricht. So führt unsere ANNAHME zum Widerspruch, also gibt es ein derartiges τ nicht und μ ist $\in$-minimales Element von T.

Zu zeigen bleibt noch, dass `On` eine Unmenge ist. Da `On` $\in$-transitiv, $\in$-linear und $\in$-fundiert ist, besitzt `On` *fast alle* Eigenschaften einer Ordinalzahl. Es *fehlt* nur die Eigenschaft, eine Mengenmenge zu sein. Wird nun ANGENOMMEN, dass `On` eine Menge ist, so ist `On` eine Mengenmenge (denn eine Mengen*klasse* ist `On` auf jeden Fall, da die Elemente von `On` Ordinalzahlen und daher Mengen sind), also eine Ordinalzahl, so dass wegen Satz 5.70 S. 191 `On` $\notin$ `On` sein muss. Doch da `On` die Klasse ist, die alle Ordinalzahlen enthält, ist zugleich `On` $\in$ `On` und wir haben einen Widerspruch. Also war die ANNAHME falsch und `On` ist eine Unmenge. □

Theorem 5.14.4 S. 191

Ist α Element, M Teilmenge und C nichtleere Teilklasse von `On`, sind $\bigcap C$, $\bigcup M$ und $\alpha \cup \{\alpha\}$ Ordinalzahlen.

Beweis. $\bigcap C$ ist eine Mengenmenge: Denn da C nichtleer ist, gibt es eine in C liegende Ordinalzahl α und als Ordinalzahl ist α eine Mengenmenge; die Elemente von $\bigcap C$ liegen aber alle in dieser Mengenmenge und sind daher Mengen. So ist $\bigcap C$ eine Mengenklasse; nach Satz 5.20 S. 126 ist $\bigcap C$ aber zugleich eine Menge und somit eine Mengenmenge.

$\bigcap C$ ist $\in$-transitiv. Denn ist $x \in y \in \bigcap C$, so auch $x \in y \in \xi$ für *jedes* Element ξ aus C. Dann ist aber auch $x \in \xi$ für jedes ξ aus C (per $\in$-Transitivität von ξ), also $x \in \bigcap C$.

$\bigcap C$ ist $\in$-linear. Denn sind x und y aus $\bigcap C$, so sind dies auch Elemente eines (jeden) Elements ξ von C, und es folgt $x \in y$ oder $x = y$ oder $y \in x$ per $\in$-Linearität von ξ.

$\bigcap C$ ist $\in$-fundiert. Denn ist T eine nichtleere Teilklasse von $\bigcap C$, so ist T auch eine solche eines (jeden) Elements ξ von C, und so existiert ein $\in$-minimales Element von T per $\in$-Fundiertheit von ξ.

$\bigcup M$ ist eine Mengenmenge. Denn alle Elemente von $\bigcup M$ sind Elemente von Ordinalzahlen aus M, also Elemente von Mengenklassen und daher Mengen. So ist $\bigcup M$ eine Mengenklasse, und da M eine Menge ist, ist nach Axiom 5.10.19 auch $\bigcup M$ ein Menge, insgesamt also eine Mengenmenge.

$\bigcup M$ ist $\in$-transitiv. Denn ist $x \in y \in \bigcup M$, so auch $x \in y \in \xi$ für eine Ordinalzahl ξ aus M. Dann ist aber auch $x \in \xi$ (per $\in$-Transitivität von ξ) und daher $x \in \bigcup M$.

$\bigcup M$ ist $\in$-linear. Denn sind x und y aus $\bigcup M$, so ist $x \in \xi$ und $y \in \eta$ für Ordinalzahlen ξ und η aus M. Wegen Satz 5.71 S. 191 sind dann x und y Ordinalzahlen, also folgt wegen der $\in$-Linearität von `On` (Satz 5.73 S. 191), dass $x \in y$ oder $x = y$ oder $y \in x$.

$\bigcup M$ ist $\in$-fundiert. Denn ist T eine nichtleere Teilklasse von $\bigcup M$, so sind alle Elemente von T Elemente von Ordinalzahlen aus M, also wegen Satz 5.71 S. 191 selbst Ordinalzahlen. So ist T auch eine nichtleere Teilklasse von `On`, und weil `On` $\in$-fundiert ist (Satz 5.73 S. 191), gibt es ein $\in$-minimales Element von T.

$\alpha \cup \{\alpha\}$ ist eine Mengenmenge. Denn da α als Ordinalzahl eine Mengenmenge ist, hat α höchstens Mengen als Elemente und ist auch selbst eine Menge, also hat $\alpha \cup \{\alpha\}$ ebenfalls nur Mengen als Elemente, ist also eine Mengenklasse. Da α Menge, also ein Individuum ist, ist nach Korollar 5.9.15 S. 119 auch $\{\alpha\}$ eine Men-

ge und dann schließlich nach Theorem 5.10.20 S. 125 auch $\alpha \cup \{\alpha\}$. So ist insgesamt $\alpha \cup \{\alpha\}$ eine Mengenmenge.

$\alpha \cup \{\alpha\}$ ist $\in$-transitiv. Denn wenn $x \in y \in \alpha \cup \{\alpha\}$, so ist entweder $x \in y \in \alpha$ oder $x \in y = \alpha$. Im beiden Fällen folgt $x \in \alpha$ (im ersten per $\in$-Transitivität von α, im zweiten Fall trivialerweise).

$\alpha \cup \{\alpha\}$ ist $\in$-linear. Denn sei x und y aus $\alpha \cup \{\alpha\}$. Dann sind vier Fälle zu betrachten.
Fall 1: $x \in \alpha$ und $y \in \alpha$. Dann gilt $x \in y$ oder $y = x$ oder $y \in x$ wegen der $\in$-Transitivität von α.
Fall 2: $x \in \alpha$ und $y = \alpha$. Dann gilt $x \in y$.
Fall 3: $x = \alpha$ und $y \in \alpha$. Dann gilt $y \in x$.
Fall 4: $x = \alpha = y$. Dann gilt $x = y$.

$\alpha \cup \{\alpha\}$ ist $\in$-fundiert. Denn sei T eine nichtleere Teilklasse von $\alpha \cup \{\alpha\}$, so ist $T \cap \alpha$ leer oder nichtleer.
Ist $T \cap \alpha$ nichtleer, so ist dies eine nichtleere Teilklasse von α und es gibt per $\in$-Fundiertheit von α ein $\in$-minimales Element μ von $T \cap \alpha$. Dieses μ ist auch ein $\in$-minimales Element von T: Hierzu ist zu zeigen, dass $x \in \mu$ für kein Element x von T gilt. Sei also $x \in T$. Dann ist wegen $T \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ entweder $x = \alpha$ oder $x \in \alpha$, und in beiden Fällen ist x eine Ordinalzahl (im ersten Fall trivialerweise, und im zweiten wegen Satz 5.71 S. 191). Im Fall $x = \alpha$ gilt wegen $\mu \in T \cap \alpha$, dass $\mu \in \alpha$, und wegen $x = \alpha$ ist dann $\mu \in x$. So ist $x \in \mu$ falsch (sonst wäre $x \in \mu \in x$ und per $\in$-Transitivität der Ordinalzahl x würde $x \in x$ gelten im Widerspruch zu Satz 5.70 S. 191). Im Fall $x \in \alpha$ aber gilt zusammen mit $x \in T$, dass $x \in T \cap \alpha$, und weil μ ein $\in$-minimales Element von $T \cap \alpha$ ist, ist $x \in \mu$ wieder falsch. So ist μ ein $\in$-minimales Element von T.
Ist aber $T \cap \alpha$ leer, so liegen alle Elemente von T *nicht* in α. Da sie aber in $\alpha \cup \{\alpha\}$ liegen, liegen sie dann in $\{\alpha\}$, d. h. α ist dann das einzige für T in Frage kommende Element, und da T nichtleer ist, ist T die einelementige Menge $\{\alpha\}$. Diese aber hat ein $\in$-minimales Element, nämlich α: Denn es gibt kein x aus $\{\alpha\}$ mit $x \in \alpha$, weil α das einzige x aus $\{\alpha\}$ ist, und $\alpha \in \alpha$ gemäß Satz 5.70 S. 191 *nicht* gilt. □

Theorem 5.14.6 S. 192

$\langle \mathtt{On}, < \rangle$ ist eine wohlgeordnete Unmenge mit folgenden Eigenschaften:

Für jede Ordinalzahl α ist $\mathtt{Ab}(\alpha) = \alpha$. (5.78)

Für Ordinalzahlen α und β gilt $\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subset \beta$; ebenso $\alpha \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subseteq \beta$. (5.79)

Jede Klasse C von Ordinalzahlen hat ein Infimum, nämlich $\bigcap C$ $(= \inf C)$. (5.80)

Jede Menge M von Ordinalzahlen hat ein Supremum, nämlich $\bigcup M$ $(= \sup M)$. (5.81)

Jede Ordinalzahl α hat einen unmittelbaren Nachfolger, nämlich $\alpha \cup \{\alpha\}$ $(= \alpha' = \alpha + 1)$. (5.82)

$\emptyset$ $(= 0)$ ist das Minimum von $\mathtt{On}$, aber $\mathtt{On}$ hat kein Maximum. (5.83)

Beweis. Da $\mathtt{On}$ nach Satz 5.73 S. 191 eine Unmenge ist, ist $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ eine wohlgeordnete Unmenge, wenn wir noch zeigen, dass $\mathtt{On}$ wohlgeordnet ist. Zunächst ist $<$ ist irreflexiv: Wäre nämlich für eine Ordinalzahl α gültig, dass $\alpha < \alpha$, so würde das nach Definition von $<_{\mathtt{On}}$ bedeuten, dass $\alpha \in \alpha$, was Satz 5.70 S. 191 widerspricht.
$<$ ist transitiv: Ist $\alpha < \beta < \gamma$ für Ordinalzahlen α, β, γ, so heißt dies $\alpha \in \beta \in \gamma$, und da $\mathtt{On}$ nach (5.73) $\in$-transitiv ist, folgt $\alpha \in \gamma$, das heißt $\alpha < \gamma$.
$<$ linear: Denn nach (5.73) gilt per $\in$-Linearität von $\mathtt{On}$ für Ordinalzahlen α und β stets, dass $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$, das heißt $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$.
$<$ erfüllt die Minimumsbedingung: Sei nämlich T eine nichtleere Teilklasse von $\mathtt{On}$. Da $\mathtt{On}$ nach (5.73) $\in$-fundiert ist, gibt es in T ein $\in$-minimales Element m. Dieses ist aber ein $<$-Minimum von T, denn für x aus T ist $x \in m$ falsch, das heißt $x < m$ gilt nicht, und weil $<$ eine Vollordnung ist, gilt dann $m \leq x$.
$<$ erfüllt die Abschnittsbedingung, d. h. für jede Ordinalzahl α ist der Abschnitt $\mathtt{Ab}_<(\alpha)$ eine Menge: Da nämlich jedes Element x von $\mathtt{Ab}(\alpha)$ ein Vorgänger von α ist, gilt $x < \alpha$, das heißt $x \in \alpha$, also gilt $\mathtt{Ab}(\alpha) \subseteq \alpha$, und da α als Ordinalzahl eine Menge ist, ist $\mathtt{Ab}(\alpha)$ per Teilmengenaxiom ebenfalls eine Menge.

Beweis von (5.78). Gilt $x \in \alpha$, so ist x nach Satz 5.71 S. 191 ebenso wie α Element von $\mathtt{On}$, also folgt nach Definition von $<$ (d. h. von $<_{\mathtt{On}}$) $x < \alpha$, und gilt umgekehrt $x < \alpha$, so folgt aus derselben Definition $x \in \alpha$. Insgesamt ist $x \in \alpha$ äquivalent mit $x < \alpha$, d. h. mit $x \in \mathtt{Ab}(\alpha)$. Daher ist $\alpha = \mathtt{Ab}(\alpha)$.

Beweis von (5.79.) Für Ordinalzahlen α und β ist $\alpha \subset \beta$ wegen Satz 5.72 S. 191 mit $\alpha \in \beta$ äquivalent, was nach Definition von $<$ wieder mit $\alpha < \beta$ äquivalent ist. Zu zeigen bleibt also nur noch $\alpha \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subseteq \beta$.

Ist nun $\alpha \subseteq \beta$, so ist entweder $\alpha \subset \beta$, und dann ist wegen des schon bewiesenen Teil des Satzes $\alpha < \beta$, oder es ist $\alpha = \beta$. In jedem Fall gilt also $\alpha \leq \beta$. Ist umgekehrt $\alpha \leq \beta$ vorausgesetzt, so ist entweder $\alpha < \beta$, d. h. wegen des schon bewiesenen Teils des Satzes $\alpha \subset \beta$, oder es ist $\alpha = \beta$. In jedem Fall gilt also $\alpha \subseteq \beta$.

Beweis von (5.80). Da jedes Element von $\bigcap C$ per Definition zugleich in allen ξ aus C liegt, gilt für alle ξ aus C, dass $\bigcap C \subseteq \xi$, d. h. wegen (5.79) $\bigcap C \leq \xi$. Somit ist $\bigcap C$ eine untere Schranke von C. Ist andererseits σ irgendeine untere Schranke von C, so gilt für alle ξ aus C, dass $\sigma \leq \xi$. Das heißt wegen (5.79), dass $\sigma \subseteq \xi$ (für jedes ξ aus C). Das aber heißt, dass jedes Element von σ ein Element von jedem ξ aus C und somit ein Element von $\bigcap C$ ist. Daher ist $\sigma \subseteq \bigcap C$, das heißt wegen (5.79), dass $\sigma \leq \bigcap C$. So hat sich für jede untere Schranke σ von C gezeigt, dass sie kleinergleich der untere Schranke $\bigcap C$ von C ist, so dass $\bigcap C$ die *größte* untere Schranke von C sein muss: das Infimum von C.

Beweis von (5.81). Da $\bigcup M$ per Definition die Elemente aller Elemente von M umfasst, ist $\bigcup M$ Obermenge aller Elemente ξ von M. Mithin gilt $\xi \subseteq \bigcup M$ und somit wegen (5.79) $\xi \leq \bigcup M$. So ist $\bigcap M$ eine obere Schranke von M. Ist andererseits σ irgendeine obere Schranke von M, so gilt für alle ξ aus M, dass $\xi \leq \sigma$, also wegen (5.79) $\xi \subseteq \sigma$. Da jedes Element von $\bigcup M$ in einem dieser ξ liegt, liegt es dann auch in σ, d. h. es gilt $\bigcup M \subseteq \sigma$, d. h. wegen (5.79) $\bigcup M \leq \sigma$. So hat sich für jede obere Schranke σ von M gezeigt, dass sie größergleich der oberen Schranke $\bigcup M$ von M ist, so dass $\bigcup M$ die kleinste obere Schranke von M sein muss: das Supremum von M.

Beweis von (5.82). Wegen $\alpha \in \{\alpha\} \subseteq \alpha'$ gilt $\alpha \in \alpha'$, d. h. nach Definition von $<$, dass $\alpha < \alpha'$ ist. So bleibt nur noch auszuschließen, dass es zwischen α und α' weitere Ordinalzahlen gibt (also Ordinalzahlen ξ mit $\alpha < \xi < \alpha'$). Nun gilt aber für Ordinalzahlen ξ mit $\xi < \alpha'$, dass $\xi \leq \alpha$ ist: Denn $\xi < \alpha$ bedeutet nach Definition von $<$, dass $\xi \in \alpha'$, das bedeutet nach Definition von α', dass $\xi \in \alpha \cup \{\alpha\}$, also $\xi \in \alpha$ (Fall 1) oder $\xi = \alpha$ (Fall 2). Da im ersten Fall aber wegen Satz 5.72 S. 191 $\xi \subset \alpha$ gilt, folgt in jedem Fall $\xi \subseteq \alpha$, also wegen (5.79) $\xi \leq \alpha$. Damit würde nun aus $\alpha < \xi < \alpha'$ folgen, dass $\alpha < \xi \leq \alpha$, also wegen Satz 5.53 S. 174 $\alpha < \alpha$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$.

Beweis von (5.83). $\emptyset$ ist nach Theorem 5.14.2 S. 190 eine Ordinalzahl. Es kann keine Ordinalzahl α geben mit $\alpha < \emptyset$ (denn per Definition von $<$ würde das bedeuten, dass $\alpha \in \emptyset$), folglich gilt stets $\emptyset \leq \alpha$ und $\emptyset$ ist das Minimum von $\mathtt{On}$. Ein Maximum kann $\mathtt{On}$ nicht haben: Denn wäre μ das Maximum von $\mathtt{On}$, so dürfte es kein größeres Element in $\mathtt{On}$ geben, aber μ' ist nach (5.82) größer als μ. □

Theorem 5.14.11 S. 194

Sei Z eine Klasse, z_0 ein Element von $\mathbb{Z}$, F_s eine Funktion von $\mathtt{On} \times Z$ in Z und
F_ℓ eine Funktion, die jedes Paar $\langle \lambda, f \rangle$, dessen erste Komponente λ eine Limeszahl und dessen zweite Komponente f eine Funktion von λ in Z ist, auf ein z aus Z wirft.

Dann gibt es genau eine Funktion f von $\mathtt{On}$ in Z mit

(1) $f(0) = z_0$,
(2) $f(\alpha + 1) = F_s(\alpha, f(\alpha))$ für alle Ordinalzahlen α, und
(3) $f(\lambda) = F_\ell(\langle \lambda, f/\lambda \rangle)$ für alle Limeszahlen λ.

Beweis. **Existenz eines solchen** f. Man betrachte die Funktion F, die jedes Paar $\langle \alpha, g \rangle$, dessen erste Komponente α eine Ordinalzahl und dessen zweite eine Funktion g von α (das ist nach 5.78 S. 192 gleich $\mathtt{Ab}(\alpha)$) in Z ist, auf den wie folgt festgelegten Wert $F(\langle \alpha, g \rangle)$ aus Z wirft:

- falls $\alpha = \emptyset$ und $g : \emptyset \longrightarrow Z$, sei $F(\langle \alpha, g \rangle)$ das Element z_0,
- falls $\alpha + 1$ Sukzessorzahl und $g : (\alpha + 1) \longrightarrow Z$, sei $F(\langle \alpha + 1, g \rangle)$ das Element $F_s(\langle \alpha, g(\alpha) \rangle)$,[6]
- falls λ Limeselement und $g : \lambda \longrightarrow Z$, sei $F(\langle \lambda, g \rangle)$ das Element $F_\ell(\langle \lambda, g \rangle)$.

Nach Theorem 5.14.8 S. 193 gibt es eine Funktion f von $\mathtt{On}$ in Z mit $f(\alpha) = F(\langle \alpha, f/\ \mathtt{Ab}(\alpha) \rangle)$ für alle $\alpha \in \mathtt{On}$, wofür wir wegen $\mathtt{Ab}(\alpha) = \alpha$ (Satz 5.78 S. 192) auch schreiben können: $f(\alpha) = F(\langle \alpha, f/\alpha \rangle)$ für alle $\alpha \in \mathtt{On}$.

[6] Beachte, dass es zu einer Sukzessorzahl s nur *eine* Ordinalzahl α gibt, so dass die Sukzessorzahl $= \alpha + 1$ ist. Denn wann immer $s = \alpha + 1$ ist, ist s nach Satz 5.82 S. 192 der unmittelbare Nachfolger von α, also muss α der unmittelbare Vorgänger von s sein, und es gibt nur *einen* solchen (siehe Theorem 5.13.16 S. 178).

Dieses f erfüllt offenbar die Bedingungen (1), (2) und (3).

Zur **Eindeutigkeit von** f. Sind f_1 und f_2 derartige f, so zeigen wir, dass $f_1 = f_2$. Hierzu zeigen wir durch Sukzessor-Limes-Induktion für alle Ordinalzahlen α, dass $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ gilt:
INDUKTIONSANFANG. Da (1) für f_1 und f_2 gilt, folgt $f_1(\emptyset) = z_0 = f_2(\emptyset)$. SUKZESSOR-SCHRITT. VORAUSSETZUNG: $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$. Dann folgt wegen (2), dass $f_1(\alpha+1) = F_s(\langle\alpha, f_1(\alpha)\rangle) = F_s(\langle\alpha, f_2(\alpha)\rangle) = f_2(\alpha+1)$.
LIMES-SCHRITT. VORAUSSETZUNG: Für alle Vorgänger (d. h. Elemente) ξ der Limeszahl λ gilt $f_1(\xi) = f_2(\xi)$. Dann ist $(f_1/\lambda) = (f_2/\lambda)$ und wegen (3) folgt $f_1(\lambda) = F_\ell(\langle\lambda, f_1/\lambda\rangle) = F_\ell(\langle\lambda, f_2/\lambda\rangle) = f_2(\lambda)$. □

Theorem 5.14.13 S. 195

Zu jeder wohlgeordneten Menge $\langle A, <_A\rangle$ gibt es genau eine Ordinalzahl α, die «Ordinalzahl von $\mathcal{A}$» genannt und mit $\mathtt{ord}(\mathcal{A})$ bezeichnet wird, so dass $\langle A, <_A\rangle$ und $\langle\alpha, <\rangle$ isomorph sind; und es gilt für wohlgeordnete Mengen $\mathcal{A} := \langle A, <_A\rangle$ und $\mathcal{B} := \langle B, <_B\rangle$:

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind isomorph $(\mathcal{A} \simeq \mathcal{B})$ genau dann, wenn $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) = \mathtt{ord}(\mathcal{B})$, und
(b) $\mathcal{A}$ ist kleiner als $\mathcal{B}$ $(\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B})$ genau dann, wenn $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$.

Beweis. Als **Lemma** halten wir zunächst fest: *Ist die Ordinalzahl α kleiner als die Ordinalzahl β, so ist $\langle\alpha, <\rangle$ ein Abschnitt von $\langle\beta, <\rangle$.*

Beweis des Lemmas. Nach der Notationsvereinbarung auf S. 176 steht $\langle\beta, <\rangle$ für $\langle\beta, </\!\!/\beta\rangle$. Nun ist $\mathtt{Ab}(\alpha)$, die Klasse der $<$-Vorgänger von α, mit der Klasse der $</\!\!/\beta$-Vorgänger von α identisch (ist x ein $<$-Vorgänger von α, gilt $x < \alpha < \beta$, also $x < \beta$, also $x \in \beta$, also sind x und α Elemente von β, also bedeutet $x < \alpha$, dass $x\ (</\!\!/\beta)\ \alpha$, also ist x ein $</\!\!/\beta$-Vorgänger von α; ist umgekehrt x ein $</\!\!/\beta$-Vorgänger von α, folgt $x\ (</\!\!/\beta)\ \alpha$, woraus $x < \alpha$ folgt, also ist x ein $<$-Vorgänger von α). So ist $\mathtt{Ab}_<(\alpha)$ ein $</\!\!/\beta$-Abschnitt, und wegen $\mathtt{Ab}_<(\alpha) = \alpha$ (Satz 5.78 S. 192) ist α ein $</\!\!/\beta$-Abschnitt. Es ist dann also die vollgeordnete Klasse $\langle\alpha, <\rangle$ ein Abschnitt von $\langle\beta, <\rangle$ (im Sinn von Definition 5.13.36 S. 187), wenn das Zeichen $<$ in $\langle\alpha, <\rangle$ die Relation $(</\!\!/\beta)/\!\!/\alpha$ bezeichnet; per Notationsvereinbarung bezeichnet es die Relation $</\!\!/\alpha$, die aber mit $(</\!\!/\beta)/\!\!/\alpha$ identisch ist: Denn «$x(</\!\!/\alpha)y$» ist äquivalent mit «$x < y$ und $x \in \alpha$ und $y \in \alpha$», dies ist wegen $\alpha \subset \beta$ (was mittels Satz 5.79 S. 192 aus $\alpha < \beta$ folgt) äquivalent mit «$x < y$ und $x \in \alpha$ und $y \in \alpha$ und $x \in \beta$ und $y \in \beta$», dies wiederum mit «$x(</\!\!/\beta)y$ und $x \in \alpha$ und $y \in \alpha$» und dies mit «$x((</\!\!/\beta)/\!\!/\alpha)y$». Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes. Sei nun $\langle A, <_A\rangle$ eine wohlgeordnete Menge. Da $\langle\mathtt{On}, <\rangle$ gemäß Theorem 5.14.6 S. 192 eine wohlgeordnete *Un*menge ist, folgt aus Satz 5.66 S. 189, dass $\langle A, <_A\rangle$ mit einem Abschnitt von $\langle\mathtt{On}, <\rangle$ isomorph ist, also mit einem $\langle\mathtt{Ab}(\alpha), <\rangle$ für eine Ordinalzahl α. Wegen Satz 5.78 S. 192 ist dieser Abschnitt aber $= \langle\alpha, <\rangle$. Damit ist gezeigt, dass es eine Ordinalzahl α gibt, so dass $\langle A, <_A\rangle \simeq \langle\alpha, <\rangle$. ANGENOMMEN, es gibt verschiedene derartige Ordinalzahlen, dann ist die eine (nennen wir sie α) kleiner als die andere (die β heißen soll), und es sind $\langle\alpha, <\rangle$ und $\langle\beta, <\rangle$ mit $\langle A, <_A\rangle$ isomorph. Da die Isomorphie $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist, sind dann auch $\langle\alpha, <\rangle$ und $\langle\beta, <\rangle$ miteinander isomorph. Wegen $\alpha < \beta$ ist aber nach dem obigen Lemma $\langle\alpha, <\rangle$ ein Abschnitt von $\langle\beta, <\rangle$, und so wäre $\langle\beta, <\rangle$ mit einem Abschnitt von sich selbst isomorph, im Widerspruch zu Satz 5.64 S. 188. Also war die ANNAHME falsch. Nun ist noch (a) und (b) nachzuweisen.

Zu (a). Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorphe wohlgeordnete Mengen, folgt $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle \underset{\text{Def von } \mathtt{ord}(\mathcal{A})}{\simeq} \mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \underset{\text{Def von } \mathtt{ord}(\mathcal{B})}{\simeq} \langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle$, also $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle \simeq \langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle$. So ist also $\mathtt{ord}(\mathcal{B})$ eine Ordinalzahl α mit $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle \simeq \langle\alpha, <\rangle$, und wegen der Reflexivität von $\simeq$ ist auch $\mathtt{ord}(\mathcal{A})$ ein solches α. Nun gibt es aber, wie wir sahen, nur *ein einziges* solches α. Daher sind $\mathtt{ord}(\mathcal{A})$ und $\mathtt{ord}(\mathcal{B})$ identisch. Ist umgekehrt $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) = \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ vorausgesetzt, so folgt: $\mathcal{A} \underset{\text{Def von } \mathtt{ord}(\mathcal{A})}{\simeq} \langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle = \langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle \underset{\text{Def von } \mathtt{ord}(\mathcal{B})}{\simeq} \mathcal{B}$.
Zu (b). Gilt $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$, so kann man in dieser Aussage wegen der Ersetzungsregel in Theorem 5.13.42 S. 188 das $\mathcal{A}$ durch das isomorphe $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle$ und das $\mathcal{B}$ durch das isomorphe $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle$ ersetzen und erhält $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle <_{wo} \langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle$. ANGENOMMEN, es wäre nun $\mathtt{ord}(\mathcal{B}) < \mathtt{ord}(\mathcal{A})$ oder $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) = \mathtt{ord}(\mathcal{B})$, so folgt im ersten Fall (aufgrund des obigen Lemmas), dass $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle$ mit einem Abschnitt von $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle$ isomorph ist (aus $\mathtt{ord}(\mathcal{B}) < \mathtt{ord}(\mathcal{A})$ und dem Lemma folgt nämlich, dass $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle$ selbst ein Abschnitt von $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle$ ist, und natürlich ist $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle$ mit sich selbst isomorph), also gilt $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle <_{wo} \langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle$, und im zweiten Fall folgt (per Reflexivität von $\simeq$), dass $\langle\mathtt{ord}(\mathcal{B}), <\rangle \simeq \langle\mathtt{ord}(\mathcal{A}), <\rangle$ ist; beides widerspricht

wegen der Vergleichbarkeit von $<_{wo}$ (Theorem 5.13.42 S. 188) dem Resultat $\langle \mathtt{ord}(\mathcal{A}), < \rangle <_{wo} \langle \mathtt{ord}(\mathcal{B}), < \rangle$. So war die Annahme falsch und per Linearität von $<$ folgt $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$. Sei umgekehrt $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ vorausgesetzt. Wegen der Vergleichbarkeit von $<_{wo}$ (Theorem 5.13.42 S. 188) gilt entweder $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$ oder $\mathcal{B} <_{wo} \mathcal{A}$ oder $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, und da die letzten beiden Fälle ausgeschlossen sind (aus $\mathcal{B} <_{wo} \mathcal{A}$ würde, wie gerade bewiesen, $\mathtt{ord}(\mathcal{B}) < \mathtt{ord}(\mathcal{A})$ folgen, und aus $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ würde wegen (a) $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) = \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ folgen; beides wäre wegen der Trichotomie der Vollordnung $<$ mit $\mathtt{ord}(\mathcal{A}) < \mathtt{ord}(\mathcal{B})$ unvereinbar), gilt $\mathcal{A} <_{wo} \mathcal{B}$. □

Theorem 5.14.14 S. 195

Alle wohlgeordneten Unmengen sind miteinander isomorph, und wann immer $\mathcal{M}$ eine wohlgeordnete Menge und $\mathcal{U}$ eine wohlgeordnete Unmenge ist, gilt $\mathcal{M} <_{wo} \mathcal{U}$.

Beweis. Die Annahme, dass eine wohlgeordnete Unmenge $\langle U_1, <_1 \rangle$ größer als eine andere wohlgeordnete Unmenge $\langle U_2, <_2 \rangle$ ist, würde bedeuten, dass $\langle U, <_1 \rangle$ mit einem Abschnitt $\langle \mathtt{Ab}(u), <_2 \rangle$ von $\langle U_2, <_2 \rangle$ isomorph ist. Der entsprechende Isomorphismus wäre dann aber eine Bijektion von U_1 in $\mathtt{Ab}(u)$, so dass U_1 und $\mathtt{Ab}(u)$ gleichmächtig wären, und da U_1 eine Unmenge ist, wäre $\mathtt{Ab}(u)$ nach Theorem 5.12.10 S. 167 ebenfalls eine Unmenge. Im Widerspruch dazu muss aber $\mathtt{Ab}(u)$ wegen der Abschnittsbedingung für Wohlordnungen eine Menge sein. Also war die Annahme falsch. Wegen der Vergleichbarkeit wohlgeordneter Klassen (Theorem 5.13.42 S. 188) bleibt also nur übrig, dass wohlgeordneten Unmengen isomorph sind.
Die wohlgeordnete Menge $\mathcal{M}$ aber ist nach Theorem 5.14.13 S. 195 mit $\langle \alpha, < \rangle$ für eine Ordinalzahl α isomorph, und hierbei ist nach Satz 5.78 S. 192 $\alpha = \mathtt{Ab}(\alpha)$, so dass $\langle \alpha < \rangle$ ein Abschnitt von $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ ist. Also gilt $\mathcal{M} <_{wo} \langle \mathtt{On}, < \rangle$. In dieser Aussage darf man $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ wegen der Ersetzungsregel von Theorem 5.13.42 S. 188 durch die wohlgeordnete Unmenge $\mathcal{U}$ ersetzen (weil diese nach dem ersten Teil des Beweises mit $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ isomorph ist), und erhält $\mathcal{M} <_{wo} \mathcal{U}$. □

Theorem 5.14.16 S. 197

Jede Menge M ist mit einer Ordinalzahl gleichmächtig.

Beweis. Ich erinnere zunächst daran, dass für nichtleere Klassen T mit $\mathfrak{e}(T)$ stets ein Element von T bezeichnet wird, während das „Außenindividuum" $\mathfrak{a}(M)$ von M nach Lemma 5.10.10 S. 122 ein Individuum mit $\mathfrak{a}(M) \notin M$ ist. Für eine *beliebige* Teilklasse T von M sei nun $T^\circ := \begin{cases} \mathfrak{e}(T) & \text{falls } T \neq \emptyset, \\ \mathfrak{a}(M) & \text{sonst.} \end{cases}$ Falls $T \neq \emptyset$, ist per Definition also $T^\circ = \mathfrak{e}(T)$, somit $T^\circ \in T$ und wegen $T \subseteq M$ schließlich $T^\circ \in M$. Falls aber $T = \emptyset$, ist per Definition $T^\circ = \mathfrak{a}(M)$. In jedem Fall ist T° ein Element von $M \cup \{\mathfrak{a}(M)\}$. Für jede Ordinalzahl α und jede Funktion $g\colon \alpha \longrightarrow M \cup \{\mathfrak{a}(M)\}$ ist nun $M \setminus \mathtt{Wb}(g)$ ein solches T (d. h. eine Teilklasse von M), also bezeichnet $(M \setminus \mathtt{Wb}(g))^\circ$ stets ein Element von $M \cup \{\mathfrak{a}(M)\}$. Wir können daher gemäß Theorem 5.14.8 S. 193 rekursiv eine Funktion $f\colon \mathtt{On} \longrightarrow M \cup \{\mathfrak{a}(M)\}$ definieren, indem wir festlegen: $f(\alpha) := (M \setminus \mathtt{Wb}(f/\alpha))^\circ$ für alle $\alpha \in \mathtt{On}$. Somit gilt für jede Ordinalzahl α, dass

$$f(\alpha) := \begin{cases} \mathfrak{e}(M \setminus \mathtt{Wb}(f/\alpha)) & \text{falls } M \setminus \mathtt{Wb}(f/\alpha) \neq \emptyset, \\ \mathfrak{a}(M) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.11}$$

Für diese Funktion f gelten nun die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 1. *Für verschiedene Ordinalzahlen α, β mit $f(\alpha) \in M$ und $f(\beta) \in M$ gilt stets $f(\alpha) \neq f(\beta)$.*

Beweis von Lemma 1. Eine der beiden Ordinalzahlen α, β muss größer als die andere sein. Die größere sei zum Beispiel β. Wegen $\alpha < \beta$ ist $\alpha \in \beta$, also gehört α zum Definitionsbereich von f/β und demzufolge $f(\alpha)$ zum Wertebereich von f/β, d. h. es gilt $f(\alpha) \in \mathtt{Wb}(f/\beta)$ und somit

$$\textit{nicht } f(\alpha) \in M \setminus \mathtt{Wb}(f/\beta). \tag{7.12}$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung $f(\beta) \in M$. Daraus folgt, dass $M \setminus \mathtt{Wb}(f/\beta) \neq \emptyset$ gilt (wäre nämlich $M \setminus \mathtt{Wb}(f/\beta) = \emptyset$, so würde aus (7.11) folgen, dass $f(\beta)$ das Außenindividuum $\mathfrak{a}(M)$ ist, also wäre $f(\beta) \notin M$).

Also folgt aus (7.11), dass $f(\beta) = \mathfrak{e}(M \setminus \mathtt{Wb}(f/\alpha))$, so dass

$$f(\beta) \in M \setminus \mathtt{Wb}(f/\beta). \tag{7.13}$$

Wegen (7.12) und (7.13) haben also $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ gegensätzliche Eigenschaften und müssen daher verschieden sein. Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2. *Die Klasse der Ordinalzahlen λ mit $f(\lambda) = \mathfrak{a}(M)$ ist nichtleer.*

Beweis von Lemma 2. Angenommen, es gibt kein λ mit $f(\lambda) = \mathfrak{a}(M)$, so muss aufgrund der Definition (7.11) von f für alle Ordinalzahlen λ gelten, dass $f(\lambda) = \mathfrak{e}(M \setminus \mathtt{Wb}(f/\lambda))$, was ein Element von M ist. Dann liegen also alle Werte von f in M. Daraus folgt erstens wegen Lemma 1, dass f injektiv ist, und zweitens, dass $\mathtt{Wb}(f)$ eine Teilklasse der Menge M und somit selbst eine Menge ist. Insgesamt folgt also, dass f eine Bijektion von der Unmenge $\mathtt{On}$ in die Menge $\mathtt{Wb}(f)$ ist, so dass hier eine Unmenge mit einer Menge gleichmächtig wäre, im Widerspruch zu Theorem 5.12.10 S. 167. Also war die Annahme falsch und das Lemma ist bewiesen.

Beweis des Satzes. Wegen Lemma 2 (und weil jede nichtleere Klasse von Ordinalzahlen ein Minimum besitzt) gibt es eine kleinste Ordinalzahl α mit $f(\alpha) = \mathfrak{a}(M)$; diese nennen wir μ. Es gilt also $f(\mu) = \mathfrak{a}(M)$, aber für alle ξ mit $\xi < \mu$ (d. h. mit $\xi \in \mu$) ist $f(\xi) \neq \mathfrak{a}(M)$, so dass nach Definition (7.11) von f gilt $f(\xi) = \mathfrak{e}(M \setminus \mathtt{Wb}(f/\xi))$, also $f(\xi) \in M$. Für alle Elemente ξ von μ ist also $f(\xi)$ ein Element von M. Daher ist die Einschränkung f/μ eine Funktion von μ in M, und wegen Lemma 1 ist sie injektiv.
Außerdem zeigt sich, dass f/μ auch eine Surjektion von μ in M ist: Angenommen, f/μ ist keine Surjektion, so gibt es ein Element von M, das nicht in $\mathtt{Wb}(f/\mu)$ liegt. Dann ist $M \setminus \mathtt{Wb}(f/\mu)$ nichtleer, und so gilt nach Definition (7.11) von f, dass $f(\mu) = \mathfrak{e}(M \setminus \mathtt{Wb}(f/\alpha))$, also $f(\mu)$ ein Element von M ist. Im Widerspruch dazu ist aber $f(\mu)$ das Außenindividuum $\mathfrak{a}(M)$ von M. Die Annahme war also falsch.
Insgesamt ist also f/μ eine Bijektion von μ in M, und die Menge M mit der Ordinalzahl μ gleichmächtig. □

Theorem 5.14.20 S. 199

Sei $\sqsubset$ eine Halbordnung über einer Menge M. Hat dann jede $\sqsubset$-Kette, die eine Teilklasse von M ist, in M eine obere Schranke, so besitzt M ein $\sqsubset$-maximales Element.
Zusatz: Hat jede $\sqsubset$-Kette, die eine Teilklasse von M ist, in M eine untere Schranke, so besitzt M ein $\sqsubset$-minimales Element.

Beweis. Es genügt, die Hauptaussage des Satzes zu beweisen, denn die im *Zusatz* formulierte Variante ergibt sich dann durch eine einfache Betrachtung der Umkehrrelation: Ist nämlich $\sqsubset$ eine Halbordnung über M, so ist die Umkehrrelation $\sqsupset$ von $\sqsubset$ ebenfalls eine solche. Ist nun die Hauptaussage des Sates bewiesen, so gilt: Wenn jede $\sqsupset$-Kette, die eine Teilklasse von M ist, eine *obere* $\sqsupset$-Schranke in M hat, so besitzt M ein $\sqsupset$-*maximales* Element. Nun sind aber die $\sqsubset$-Ketten und die $\sqsupset$-Ketten genau dieselben Klassen. Ferner sind die unteren $\sqsubset$-Schranken einer Klasse ihre oberen $\sqsupset$-Schranken, und die $\sqsupset$-maximalen Elemente einer Klasse sind ihre $\sqsubset$-minimalen Elemente. Man kann also argumentieren: Hat jede $\sqsubset$-Kette, die eine Teilklasse von M ist, eine untere $\sqsubset$-Schranke in M, so hat jede $\sqsupset$-Kette, die eine Teilklasse von M ist, eine obere $\sqsupset$-Schranke in M, also besitzt M ein $\sqsupset$-maximales Element, und dieses ist ein $\sqsubset$-minimales Element von M.

Zum Beweis der Hauptaussage sei nun Vorausgesetzt, dass M eine Menge und $\sqsubset$ eine Halbordnung über M ist und jede Teilklasse von M, die eine $\sqsubset$-Kette ist, eine obere $\sqsubset$-Schranke in M hat, und sei angenommen, dass M dennoch kein $\sqsubset$-maximales Element besitzt. Für jede Teilklasse A von M sei $g(A)$ die Klasse der Elemente von M, die echte obere Schranken von A sind (vgl. Definition 5.13.20 S. 179); ist also x Element von A und y ein solches von $g(A)$, so ist immer y größer als x (also $x \sqsubset y$). Wir definieren nun gemäß Theorem 5.14.8 S. 193 durch ordnungstheoretische Rekursion eine Funktion f von $\mathtt{On}$ in $M \cup \{\mathfrak{a}(M)\}$ durch

$$f(\alpha) := \begin{cases} \mathfrak{e}(g(\mathtt{Wb}(f/\alpha))) & \text{falls } \mathtt{Wb}(f/\alpha) \subseteq M \text{ und } g(\mathtt{Wb}(f/\alpha)) \neq \emptyset, \\ \mathfrak{a}(M) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gibt also zwei Fälle:

(1) Falls $\mathtt{Wb}(f/\alpha) \subseteq M$ und $g(\mathtt{Wb}(f/\alpha)) \neq \emptyset$ gilt, so ist $f(a)$ ein Element von $g(\mathtt{Wb}(f/\alpha))$, d. h. ein Element von M derart dass $x \sqsubset f(\alpha)$ für jedes x aus $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$. Es gilt dann also $f(\alpha) \in M$ und $f(\beta) \sqsubset f(\alpha)$, wann immer β aus α ist (weil dann $f(\beta)$ aus $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$ ist).

(2) Andernfalls ist $f(\alpha)$ das außerhalb von M gelegene „Außenindividuum“ $\mathfrak{a}(M)$.

Nun zeigt aber ordnungstheoretische Induktion, dass für alle Ordinalzahlen α der Fall (1) zutrifft. Unter der

Induktionsvoraussetzung nämlich, dass für alle $<$-Vorgänger ξ von α Fall (1) gilt – mit ξ in der Rolle von α – gilt für jedes ξ aus α (das ja $<$-Vorgänger von α ist), dass $f(\xi) = \varepsilon(g(\mathtt{Wb}(f/\alpha)))$, also $f(\xi) \in M$. Also ist dann $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$ eine Teilklasse von M. Um zu zeigen, dass Fall (1) für α zutrifft, müssen wir daher nur noch zeigen, dass $g(\mathtt{Wb}(f/\alpha)) \neq \emptyset$ ist.
Hierzu zeigen wir zunächst, dass die Teilklasse $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$ von M zugleich eine $\sqsubset$-Kette ist, dass also $\sqsubset$ über Elementen a und b von $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$ stets linear ist. Nun sind a und b Werte von f/α, d. h. es ist $a = f(\xi)$ und $b = f(\eta)$, wobei ξ und η Elemente von α sind; aus $\xi \in \alpha$ bzw. $\eta \in \alpha$ folgt aber $\xi < \alpha$ bzw. $\eta < \alpha$, so dass ξ und η Vorgänger von α sind. Zu zeigen ist, dass $f(\xi) \sqsubset f(\eta)$ oder $f(\xi) = f(\eta)$ oder $f(\eta) \sqsubset f(\xi)$ gilt. Da $<$ über Ordinalzahlen linear ist, gilt $\xi < \eta$ oder $\xi = \eta$ oder $\eta < \xi$, das heißt nach Definition der Kleinerrelation $<$ für Ordinalzahlen $\xi \in \eta$ oder $\xi = \eta$ oder $\eta \in \xi$. Im Fall $\xi \in \eta$ beachten wir, dass für η Fall (1) zutrifft (weil η Vorgänger von α ist, folgt dies aus der Induktionsvoraussetzung), weshalb $f(\xi) \sqsubset f(\eta)$ sein muss. Analog folgt im Fall $\eta \in \xi$, dass $f(\eta) \sqsubset f(\xi)$ gilt, und im Fall $\xi = \eta$ ist natürlich $f(\xi) = f(\eta)$.
Da somit die Teilklasse $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$ von M zugleich eine $\sqsubset$-Kette ist, besitzt $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$ nach Voraussetzung eine obere Schranke s aus M: Ist x Element von $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$, gilt also $x \leq s$. Da nach Annahme s aber kein maximales Element von M sein kann, gibt es ein Element s' von M, so dass $s < s'$. Diese s' ist dann eine echte obere Schranke von $\mathtt{Wb}(f/\alpha)$ und somit ein Element von $g(\mathtt{Wb}(f/\alpha))$. Also ist in der Tat $g(\mathtt{Wb}(f/\alpha)) \neq \emptyset$, so dass Fall (1) auch für α zutrifft. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.
Da also für jede Ordinalzahl α Fall (1) zutrifft, ist $f(\alpha)$ stets ein Element von M, so dass f eine Funktion von $\mathtt{On}$ in M ist. Ferner ist f injektiv: Denn wenn zwei verschiedene Ordinalzahlen vorliegen, ist die eine (nennen wir sie α) kleiner als die andere (nennen wir sie β), und $\alpha < \beta$ bedeutet nach Definition von $<$, dass $\alpha \in \beta$. Da für β Fall (1) gilt und $\alpha \in \beta$ ist, gilt $f(\alpha) \sqsubset f(\beta)$, und per Irreflexivität von $\sqsubset$ ist dann $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
Insgesamt ist also f eine Injektion von $\mathtt{On}$ in M. Da aber $\mathtt{On}$ eine Unmenge ist, müsste dann nach Satz 5.29 S. 142 auch M eine solche sein. Im Widerspruch dazu war aber M als Menge vorausgesetzt. Also war die Annahme falsch, und M besitzt ein maximales Element. □

Theorem 5.15.2 S. 200

$$A \prec B \;\leftrightarrow\; B \succ A. \tag{5.84}$$
$$A \precsim B \;\leftrightarrow\; B \succsim A. \tag{5.85}$$

Für jede nichtleere Klasse A gilt $\emptyset \prec A$. (5.86)

Für jede Klasse A gilt $\emptyset \precsim A \precsim \mathbb{D}$. (5.87)

$A \prec B \;\leftrightarrow\; A \precsim B$, aber *nicht* $A \sim B$. (5.88)

Wenn $A \subseteq B$, so ist $A \precsim B$. (5.89)

Beweis von (5.84). Nach Definition 5.15.1 von $\prec$ gilt $A \prec B$ dann und nur dann, wenn es eine Injektion, aber keine Bijektion von A in B gibt. Genau unter derselben Bedingung gilt $B \succ A$, was man sieht, wenn man in Def. 5.15.1 von $\succ$ die Buchstaben A und B vertauscht. So ist $A \prec B$ mit $B \succ A$ äquivalent.

Beweis von (5.85). $A \precsim B$ ist nach Definition von $\precsim$ gleichbedeutend mit «$A \prec B$ oder $A \sim B$». Nun ist $A \prec B$ nach (5.84) gleichbedeutend mit $B \succ A$, und $A \sim B$ ist nach Theorem 5.12.3 S. 165 gleichbedeutend mit $B \sim A$. Also ist «$A \prec B$ oder $A \sim B$» gleichbedeutend mit «$B \succ A$ oder $B \sim A$», das heißt nach Definition von $\succsim$ mit $B \succsim A$.

Beweis von (5.86). Wie in Beispiel 4 auf S. 141 erklärt, ist die leere Funktion eine *Injektion* von $\emptyset$ in A. Es gibt aber *keine Bijektion* f von $\emptyset$ in A (sonst könnten wir ein Element a von A wählen, und wegen $\mathtt{Wb}(f) = A$ und $\mathtt{Db}(f) = \emptyset$ müsste f ein Element der leeren Menge auf a werfen; aber dort gibt es kein Element). Somit gilt nach Definition von $\prec$, dass $\emptyset \prec A$.

Beweis von (5.87). Wenn A nichtleer ist, gilt nach (5.86), dass $\emptyset \prec A$, also auch $\emptyset \precsim A$, und wenn A leer ist, gilt $A \sim \emptyset$ (denn es gilt $\emptyset \sim \emptyset$: siehe Fußnote 424 auf S. 165), also wieder $A \precsim \emptyset$. Weiter ist die Funktion, die jedes Element von A auf sich selbst wirft, eine Injektion von A in $\mathbb{D}$. Entweder gibt es nun sogar eine Bijektion von A in $\mathbb{D}$ (dann ist $A \sim \mathbb{D}$) oder es gibt keine (dann ist $A \prec \mathbb{D}$), in jedem Fall ist also $A \precsim \mathbb{D}$.

Beweis von (5.88). Wenn $A \prec B$, gilt (nach Definition von $\precsim$) erst recht $A \precsim B$ und es gibt (nach Definition von $\prec$) keine Bijektion von A in B, so dass $A \sim B$ *nicht* gilt.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass (a) $A \precsim B$ gilt und (b) $A \sim B$ *nicht* gilt. Dann gilt wegen (a) per Definition von $\precsim$, dass $A \prec B$ oder $A \sim B$ gilt. Wegen (b) gilt aber $A \sim B$ *nicht*. Also muss $A \prec B$ gelten.

Beweis von (5.89). Wenn $A \subseteq B$, ist die Funktion von A in B, die jedes Element von A auf sich selbst wirft, eine Injektion von A in B. Entweder gilt zusätzlich, dass es *keine* Bijektion von A in B gibt: Dann gilt per Definition $A \prec B$, und somit auch $A \precsim B$. Oder *es gibt eine* Bijektion: Dann gilt $A \sim B$, und somit wieder $A \precsim B$. □

Theorem 5.15.3 S. 200

$$A \precsim B \;\leftrightarrow\; \text{es gibt eine Funktion } f\text{, so dass } A \xrightarrow[\text{INJ}]{f} B. \tag{5.90}$$

$$A \succsim B \;\leftrightarrow\; \text{es gibt eine Funktion } f\text{, so dass } A \xrightarrow[\text{SRJ}]{f} B\text{, oder es ist } B = \emptyset. \tag{5.91}$$

Beweis von (5.90). Sei $A \precsim B$, dann ist nach Definition $A \prec B$ oder $A \sim B$. Im ersten Fall gibt es eine Injektion von A in B, im zweiten Fall eine Bijektion von A in B, was ebenfalls eine Injektion von A in B ist. In jedem Fall gibt es also eine Injektion von A in B.
Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass es eine Injektion f von A in B gibt. Entweder gilt zusätzlich, dass es *keine* Bijektion von A in B gibt: Dann gilt per Definition $A \prec B$, und somit auch $A \precsim B$. Oder *es gibt eine* Bijektion: Dann ist $A \sim B$, und somit wieder $A \precsim B$.

Beweis von (5.91). Sei $A \succsim B$. Zu zeigen ist, dass $B = \emptyset$ oder es eine Surjektion von A in B gibt. Wir brauchen also nur den Fall $B \neq \emptyset$ zu betrachten (sonst sind wir fertig), und müssen unter dieser Voraussetzung zeigen, dass es eine Surjektion von A in B gibt. Aus $A \succsim B$ folgt zunächst wegen (5.85), dass $B \precsim A$, also gibt es nach (5.90) eine Injektion f von B in A. Der Wertebereich von f sei mit A' bezeichnet. Dieses A' ist eine Teilmenge von A. Es ist also f eine Injektion mit $\mathtt{Db}(f) = B$ und $\mathtt{Wb}(f) = A'$, weshalb die Umkehrfunktion $f^{\rightharpoonup}$ eine Funktion mit $\mathtt{Db}(f^{\rightharpoonup}) = A'$ und $\mathtt{Wb}(f^{\rightharpoonup}) = B$, also eine Surjektion von A' in B ist. Ist $A' = A$, so ist $f^{\rightharpoonup}$ bereits eine Surjektion von A in B. Andernfalls aber „erweitern“ wir $f^{\rightharpoonup}$ wie folgt zu einer neuen Funktion h. Es soll h die Funktion mit Definitionsbereich A sein, die im Bereich von A' *genau dieselben* Würfe ausführt wie $f^{\rightharpoonup}$, und zusätzlich jedes Element von A, das *nicht* in A' liegt, auf *irgendein* ausgesuchtes Element von B wirft. Hier benötigen wir die Voraussetzung, dass B *nichtleer* ist: Sie erlaubt es uns, ein b aus B auszuwählen und zu bestimmen, dass h alle nicht in A' gelegenen Elemente von A auf b werfen soll. Dieses h ist nun eine Funktion von A in B, die ebenso wie $f^{\rightharpoonup}$ beim Werfen *alle* Elemente von B trifft (da h ja sämtliche Würfe von f mitvollzieht), also ist h eine Surjektion von A in B.
Sei umgekehrt $B = \emptyset$ oder sei eine Surjektion f von A in B gegeben. Zu zeigen ist $A \succsim B$. Im ersten Fall gilt wegen (5.87), dass $B \precsim A$, also wegen (5.85), dass $A \succsim B$. Im zweiten Fall bezeichnen wir für jedes Element b von B die Klasse $\{x \mid f(x) = b\}$ aller x, die f auf b wirft, mit C_b. Da f surjektiv ist, also auf jedes b aus B mindestens ein Element wirft, ist jedes C_b eine nichtleere Klasse. Wir können daher aus jedem C_b je ein Element auswählen und b^* nennen. Für jedes b ist dann b^* ein ausgewähltes Element von A, das f auf b wirft: Für jedes b aus B gilt $b^* \in A$ und $f(b^*) = b$. Sei nun g die Funktion von B in A, die jedes Element b von B auf b^* wirft, so dass also stets $g(b) = b^*$ gilt. Dieses g ist eine Injektion: Denn für Elemente b_1 und b_2 aus B mit $b_1 \neq b_2$ haben die Klassen C_{b_1} und C_{b_2} kein gemeinsames Element (läge a nämlich zugleich in C_{b_1} und C_{b_2}, so müsste nach Definition der beiden Klassen die Funktion f das a sowohl auf b_1 wie auch auf b_2 werfen, wäre also nicht linkseindeutig und daher keine Funktion), und da nun b_1^* ein ausgewähltes Element von C_{b_1} und b_2^* ein solches von C_{b_2} ist, müssen b_1^* und b_2^* verschieden sein. Es gilt also $b_1^* \neq b_2^*$, d. h. $g(b_1) \neq g(b_2)$. Damit haben wir gesehen, dass eine Injektion von B in A existiert. Nach (5.90) folgt daher, dass $B \precsim A$ gilt, also wegen (5.85) auch $A \succsim B$. □

Theorem 5.15.4 S. 201

Ist $A \precsim B$ oder $A \prec B$ wahr, erhält man wieder eine wahre Aussage, wenn man A bzw. B durch eine gleichmächtige Klasse A^* bzw. B^* ersetzt.

Beweis. Sei A mit A^* bzw. B mit B^* gleichmächtig. Dann gibt es eine Bijektion f von A in A^* bzw. eine Bijektion g von B in B^*. Folglich ist $f^{\rightharpoonup}$ eine Bijektion von A^* in A bzw. $g^{\rightharpoonup}$ eine solche von B^* in B. Kurz

gesagt gilt also: $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} A^*$ und $A^* \xrightarrow[\text{BIJ}]{f^{\rightharpoonup}} A$, bzw. $B \xrightarrow[\text{BIJ}]{g} B^*$ und $B^* \xrightarrow[\text{BIJ}]{g^{\rightharpoonup}} B$.
Sei nun zuerst $A \precsim B$ wahr. Zu zeigen ist: $A^* \precsim B$ bzw. $A \precsim B^*$. Nun folgt aus $A \precsim B$ nach Satz (5.90), dass es eine Injektion h von A in B gibt. Dann folgt aber aus $A^* \xrightarrow[\text{BIJ}]{f^{\rightharpoonup}} A$ und $A \xrightarrow[\text{INJ}]{h} B$, dass $A^* \xrightarrow[\text{INJ}]{f^{\rightharpoonup} \looparrowright h} B$; ebenso aus $A \xrightarrow[\text{INJ}]{h} B$ und $B \xrightarrow[\text{BIJ}]{g} B^*$, dass $A \xrightarrow[\text{INJ}]{h \looparrowright g} B^*$. Somit gibt es eine Injektion von A^* in B bzw. eine solche von A in B^*, und daher gilt wieder nach Satz (5.90) $A^* \precsim B$ bzw. $A \precsim B^*$.
Sei jetzt $A \prec B$ wahr. Zu zeigen ist $A^* \prec B$ bzw. $A \prec B^*$. Zunächst folgt aus $A \prec B$ nach (5.88), dass $A \precsim B$, so dass es nach dem gerade bewiesenen Teil eine Injektion von A^* in B bzw. eine Injektion von A in B^* gibt. Nach Definition von $\prec$ ist noch zu zeigen, dass es *keine* Bijektion von A^* in B bzw. keine von A in B^* gibt. Angenommen also, a ist eine Bijektion von A^* in B, bzw. b eine solche von A in B^*. Dann folgt aus $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f} A^*$ und $A^* \xrightarrow[\text{BIJ}]{a} B$, dass $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{f \looparrowright a} B$; bzw. es folgt aus $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{b} B^*$ und $B^* \xrightarrow[\text{BIJ}]{g^{\rightharpoonup}} B$, dass $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{b \looparrowright g^{\rightharpoonup}} B$. Also gibt es in jedem Fall eine Bijektion von A in B, die es wegen $A \prec B$ nicht geben kann. Somit war die Annahme falsch und das Theorem ist bewiesen. □

Theorem 5.15.5 S. 201

Für Klassen A, B, für die sowohl $A \precsim B$ als auch $B \precsim A$ gilt, gilt stets $A \sim B$.

Beweis. Als Lemma kann die folgende Version des *Fixpunktsatzes von Tarski* dienen:

Lemma. *Sei A eine Klasse, und $\Theta(x)$ ein Ausdruck, so dass für jede Teilklasse T von A mit $\Theta(T)$ eine Teilklasse von A bezeichnet wird, derart dass*

für Teilklassen X, Y von A mit $X \subseteq Y$ stets $\Theta(X) \subseteq \Theta(Y)$ gilt. (7.14)

Dann besitzt der Ausdruck Θ einen sog. Fixpunkt *Z, d. h. es gibt eine Teilklasse Z von A mit $\Theta(Z) = Z$.*

Beweis des Lemmas. In diesem Beweis soll eine Teilklasse T von A, für die $\Theta(T) \subseteq T$ gilt, eine *ausgezeichnete Teilklasse* von A heißen. Beispielsweise ist A selbst ausgezeichnet, denn $\Theta(A)$ bezeichnet nach Voraussetzung eine Teilklasse von A.

Sei nun $Z := \{x \mid x \text{ ist zugleich Element aller ausgezeichneten Teilklassen von } A\}$.

Da A ausgezeichnet ist, sind alle Elemente x von Z auch Elemente von A. So ist Z selbst eine Teilklasse von A, und es wird sich zeigen, dass die Teilklasse Z von A ein Fixpunkt von Θ ist, also $\Theta(Z) = Z$ gilt, womit der Beweis des Lemmas erbracht sein wird. Da jedes Element von Z in jeder ausgezeichneten Teilklasse enthalten ist, gilt für eine beliebige ausgezeichnete Teilklasse T stets, dass $Z \subseteq T$. Daraus folgt wegen der Voraussetzung (7.14) des Lemmas, dass $\Theta(Z) \subseteq \Theta(T)$. Weil T ausgezeichnet ist, gilt außerdem $\Theta(T) \subseteq T$. Insgesamt folgt also $\Theta(Z) \subseteq \Theta(T) \subseteq T$, so dass $\Theta(Z) \subseteq T$, und nach Definition der Teilklassenbeziehung heißt dies: Jedes Element x von $\Theta(Z)$ ist auch Element von T. Da T in dieser Argumentation ein *beliebige* ausgezeichnete Teilklasse war, liegt jedes Element x von $\Theta(Z)$ also *zugleich in jeder* ausgezeichneten Teilklasse T, was nach Definition von Z bedeutete, dass x in Z liegt. Somit ist jedes Element x von $\Theta(Z)$ auch ein solches von Z, und das bedeutet $\Theta(Z) \subseteq Z$. Wenn sich außerdem noch zeigt, dass $Z \subseteq \Theta(Z)$, folgt insgesamt $\Theta(Z) = Z$, d. h. Z ist ein Fixpunkt und wir sind fertig. So ist nur noch $Z \subseteq \Theta(Z)$ zu zeigen. Nun folgt aus unserem Resultat $\Theta(Z) \subseteq Z$ wegen Voraussetzung (7.14), dass $\Theta(\Theta(Z)) \subseteq \Theta(Z)$. Das aber bedeutet, dass $\Theta(Z)$ ausgezeichnet ist, und da jedes Element von Z Element *aller* ausgezeichneten Teilklassen von A ist, liegt jedes Element von Z in $\Theta(Z)$. Das aber heißt: $Z \subseteq \Theta(Z)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes. Wegen (5.90) kann die Behauptung des Satzes auch wie folgt formuliert werden: Wenn es eine Injektion f von A in B und eine Injektion g von B in A gibt, gibt es eine Bijektion von A in B. Sei also $A \xrightarrow[\text{INJ}]{f} B$ und $B \xrightarrow[\text{INJ}]{g} A$ vorausgesetzt. Zu zeigen ist $A \xrightarrow[\text{BIJ}]{h} B$ für eine Funktion h. Sei nun $\Theta(x)$ der Ausdruck $\ll A \setminus \mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/x)))\gg$, wobei x eine Variable ist, für die wir Teilklassen von A einsetzen wollen. So bezeichnet also $\Theta(T)$ für Teilklassen T von A das Objekt $A \setminus \mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/T)))$. Diesen wahrhaft „verwickelten“ Term kann man so analysieren:

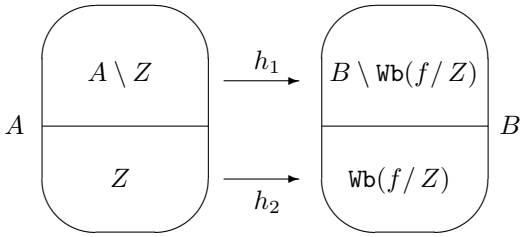
f	ist nach Voraussetzung eine Injektion von A in B,
f/T	ist die Einschränkung von f auf die Teilklasse T von A, also eine Funktion von T in B,

$\mathtt{Wb}(f/T)$	ist den Wertebereich von f/T, der eine Teilklasse von B ist,
$B \setminus \mathtt{Wb}(f/T)$	ist die Differenzklasse von B und $\mathtt{Wb}(f/T)$, was ebenfalls eine Teilklasse von B ist,
g	ist nach Voraussetzung eine Injektion von B in A,
$g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/T))$	ist die Einschränkung von g auf die Teilklasse $B \setminus \mathtt{Wb}(f/T)$ von B, also eine Funktion von $B \setminus \mathtt{Wb}(f/T)$ in A,
$\mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/T)))$	ist der Wertebereich dieser zuletzt genannten Funktion, der eine Teilklasse von A ist, und
$A \setminus \mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/T)))$	ist schließlich ebenfalls eine Teilklasse von A.

Damit steht also unser $\Theta(T)$ für eine gewisse Teilklasse von A. Sind nun Teilklassen X und Y von A gegeben und ist $X \subseteq Y$ vorausgesetzt, überlegen wir Folgendes:

1. Aus $X \subseteq Y$ folgt wegen (5.36 S. 143), dass $\mathtt{Wb}(f/X) \subseteq \mathtt{Wb}(f/Y)$.
2. Daraus folgt wegen (5.21 S. 127), dass $B \setminus \mathtt{Wb}(f/Y) \subseteq B \setminus \mathtt{Wb}(f/X)$.
3. Daraus folgt wieder mittels (5.36 S. 143), dass $\mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/Y))) \subseteq \mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/X)))$.
4. Daraus folgt wieder mittels (5.21 S. 127), dass $A \setminus \mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/X))) \subseteq A \setminus \mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/Y)))$.
5. Das heißt aber, dass $\Theta(X) \subseteq \Theta(Y)$.

Insgesamt gilt für Teilklassen X und Y von A mit $X \subseteq Y$ stets $\Theta(X) \subseteq \Theta(Y)$. Nach unserem Lemma folgt daraus, dass es einen Fixpunkt von Θ geben muss, also eine Teilklasse Z von A, so dass $\Theta(Z) = Z$, das heißt $A \setminus \mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/Z))) = Z$. Kürzen wir $\mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/Z)))$ mit D ab, gilt dann $A \setminus D = Z$, und für die Klasse $A \setminus Z$ gilt $A \setminus Z = A \setminus (A \setminus D) = D$,[7] nach Definition von D also $A \setminus Z = \mathtt{Wb}(g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/Z)))$. Das heißt: der Wertebereich der Funktion $g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/Z))$ (die als Einschränkung der Injektion g auch selbst eine Injektion ist) ist $A \setminus Z$, und so ist $g/(B \setminus \mathtt{Wb}(f/Z))$ eine Bijektion von $B \setminus \mathtt{Wb}(f/Z)$ in $A \setminus Z$.



Die Umkehrfunktion h_1 dieser Bijektion ist also eine Bijektion von $A \setminus Z$ in $B \setminus \mathtt{Wb}(f/Z)$, und die Einschränkung h_2 der Injektion f auf Z ist eine Bijektion von Z in $\mathtt{Wb}(f/Z)$. Nun haben offensichtlich die Definitions– und Wertebereiche von h_1 und h_2 kein gemeinsames Element. Nach (5.39 S. 144) ist daher ihre *Vereinigung* $h := h_1 \cup h_2$ ebenfalls eine Injektion. Der Definitionsbereich von h ist nun die Vereinigung A der Definitionsbereiche von h_1 und h_2, und entsprechend ist der Wertebereich von h die Vereinigung B der Wertebereiche von h_1 und h_2. Somit ist h eine Bijektion von A in B. □

Theorem 5.15.6 S. 201

Ist M Menge,	und $C \prec M$, $C \sim M$ oder $C \precsim M$,	so ist C Menge.	(5.92)
Ist U Unmenge,	und $U \prec C$, $U \sim C$ oder $U \precsim C$,	so ist C Unmenge.	(5.93)
Ist U Unmenge,	und M Menge,	so ist $M \prec U$.	(5.94)

Beweis von (5.92). Wenn $C \prec M$ oder $C \sim M$ gilt, gilt auch $C \precsim M$, und so können wir in jedem Fall von $C \precsim M$ ausgehen. Es gibt dann nach (5.90) eine Injektion f von C in M. Angenommen, C ist eine Unmenge, so würde die Existenz dieser Injektion (wegen Theorem 5.29 S. 142) zeigen, dass auch M eine Unmenge ist, was falsch ist. Also war die Annahme falsch und C ist eine Menge.

Beweis von (5.93). Angenommen, C ist eine Menge, so folgt aus (5.92), dass auch U eine Menge ist, was falsch ist. Also war die Annahme falsch und C ist eine Unmenge.

Beweis von (5.94). Nach Theorem 5.13.32 S. 185 gibt es eine Injektion von M in U, also gilt wegen (5.90),

[7] $A \setminus (A \setminus D) = D$ folgt mit (5.22 S. 127) aus $D \subseteq A$, wobei $D \subseteq A$ wieder daraus folgt, dass alle Elemente von D nach Definition Werte von g sind, und die Werte von g in A liegen.

dass $M \precsim U$. Wäre nun $M \sim U$, müssten M und U wegen Theorem 5.12.10 S. 167 entweder beide Mengen oder beide Unmengen sein, was falsch ist. Also ist $M \sim U$ falsch. Da insgesamt $M \precsim U$ und *nicht* $M \sim U$ ist, folgt nach (5.88 S. 200), dass $M \prec U$. □

Theorem 5.15.7 S. 201

Für Klassen A, B, C gilt:

$A \precsim A$ ist wahr (Reflexivität) und aus $A \precsim B \precsim C$ folgt $A \precsim C$ (Transitivität). (5.95)

$A \prec A$ ist falsch (Irreflexivität) und aus $A \prec B \prec C$ folgt $A \prec C$ (Transitivität). (5.96)

Gilt $A \precsim B \prec C$ oder $A \prec B \precsim C$, so gilt auch $A \prec C$ (gemischte Transitivität). (5.97)

Für Klassen A, B gilt höchstens eine der Aussagen $A \prec B$ oder $B \succ B$ oder $A \sim B$. (5.98)

Sind A, B Mengen, gilt mindestens eine der Aussagen $A \precsim B$ oder $A \succsim B$. (5.99)

Sind A, B Mengen, gilt genau eine der Aussagen $A \prec B$ oder $A \succ B$ oder $A \sim B$. (5.100)

Für Ordinalzahlen α und β mit $\alpha \prec \beta$ gilt stets $\alpha < \beta$. (5.101)

Beweis von (5.95). $\precsim$ ist reflexiv, denn da $A \sim A$ gilt, gilt auch $A \precsim A$. Weiter ist $\precsim$ transitiv: Ist nämlich $A \precsim B$ und $B \precsim C$, so gibt es nach (5.90 S. 200) Injektionen $f\colon A \longrightarrow B$ und $g\colon B \longrightarrow C$. Dann ist $f \looparrowright g$ eine Injektion von A in C und wegen (5.90) gilt $A \precsim C$.

Beweis von (5.96). $\prec$ ist irreflexiv, denn $A \prec A$ würde nach (5.88 S. 200) implizieren, dass *nicht* $A \sim A$ gilt, was falsch ist. Weiter ist $\prec$ transitiv: Aus $A \prec B \prec C$ folgt wegen (5.88), dass $A \precsim B \precsim C$, woraus gemäß (5.95) folgt, dass $A \precsim C$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $A \sim C$ *nicht* gilt, denn dann folgt aus (5.88), dass $A \prec C$, und wir sind fertig.
Angenommen also, es gilt $A \sim C$. Dann gibt es eine Injektion f von C in A; wegen $A \precsim B$ gibt es auch eine Injektion g von A in B, so dass die Komposition $f \looparrowright g$ eine Injektion von C in B ist, also $C \precsim B$ gilt. Dies impliziert aber zusammen mit $B \precsim C$ mittels des Bernsteinschen Satzes (Theorem 5.15.5), dass $B \sim C$. Andererseits ist aber $B \sim C$ durch $B \prec C$ ausgeschlossen. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war, also $A \sim C$ *nicht* gilt.

Beweis von (5.97). Sei $A \precsim B \prec C$ (Fall 1) oder $A \prec B \precsim C$ (Fall 2). Im Fall 1 ist entweder $A \prec B$ oder $A \sim B$; wir können dann aber von $A \sim B$ ausgehen (andernfalls ist $A \prec B \prec C$, woraus $A \prec C$ folgt, und wir sind fertig). Analog gehen wir im Fall 2 von $B \sim C$ aus. Sei also $A \sim B$ (Fall 1) oder $B \sim C$ (Fall 2). In beiden Fällen gilt dann $A \precsim B \precsim C$, also wegen (5.95) $A \precsim C$. So bleibt nur noch zu zeigen, dass $A \sim C$ *nicht* gilt (dann folgt aus (5.88), dass $A \prec C$, und wir sind fertig). Angenommen also, es gilt $A \sim C$. Da nun $A \sim B$ (Fall 1) oder $B \sim C$ (Fall 2) gilt, folgt in jedem Fall (mittels Symmetrie und Transitivität von $\sim$), dass die Klassen A, B, C miteinander gleichmächtig sind, insbesondere gilt $A \sim B$ und $B \sim C$. Aber im Fall 1 gilt $B \prec C$, und dies steht wegen (5.88) im Widerspruch zu $B \sim C$; analog steht im Fall 2 $A \prec B$ im Widerspruch zu $A \sim B$.

Beweis von (5.98). Die Annahme, dass $A \prec B$ und zugleich $A \sim B$ ist, widerspricht der Definition von $\prec$. Aus dem gleichen Grund ist $B \prec A$ mit $B \sim A$ (und daher auch mit $A \sim B$) nicht verträglich. Schließlich hätte die Annahme, dass zugleich $A \prec B$ und $B \prec A$ ist, wegen (5.96) zur Folge, dass $A \prec A$, was der Irreflexivität von $\prec$ widerspricht.

Beweis von (5.99). Nach dem Wohlordnungssatz 5.14.18 S. 198 gibt es eine Wohlordnung $<_A$ über A und ebenso eine Wohlordnung $<_B$ über B. Nach dem Hauptsatz 5.13.40 S. 188 ist also entweder

(1) $\langle A, <_A\rangle$ isomorph mit $\langle B, <_B\rangle$, oder
(2) $\langle A, <_A\rangle$ isomorph mit einem Abschnitt $\langle \mathtt{Ab}(b), <_B\rangle$ von $\langle B, <_B\rangle$ oder
(3) $\langle B, <_B\rangle$ isomorph mit einem Abschnitt $\langle \mathtt{Ab}(a), <_A\rangle$ von $\langle A, <_A\rangle$.

Im den Fällen (1) und (2) ist ein entsprechender Isomorphismus eine Injektion von A in B, und in Fall (3) ist ein entsprechender Isomorphismus eine Injektion von B in A. Wegen (5.90 S. 200) gilt also in den Fällen (1) und (2) die Aussage $A \precsim B$, und in Fall (3) $B \precsim A$.

Beweis von (5.100). Wegen (5.99) gilt $A \precsim B$ (das heißt $A \prec B$ oder $A \sim B$) oder $B \precsim A$ (das heißt $B \prec A$ oder $B \sim A$), in jedem Fall gilt also *mindestens* eine der Alternativen $A \prec B$, $A \sim B$, $B \prec A$. Da zugleich

wegen (5.98) *höchstens* eine der drei Alternativen zutrifft, trifft *genau eine* zu.

Beweis von (5.101). Sei $\alpha \prec \beta$ VORAUSGESETZT und $\beta \leq \alpha$ ANGENOMMEN. Dann ist wegen (5.79 S. 192) $\beta \subseteq \alpha$, also wegen (5.89 S. 200) $\beta \precsim \alpha$. Mit der VORAUSSETZUNG folgt $\alpha \prec \beta \precsim \alpha$, also wegen (5.97) $\alpha \prec \alpha$ im Widerspruch zu (5.96). So war die ANNAHME falsch und es folgt $\alpha < \beta$. □

Theorem 5.15.8 S. 202

Sei $C_1 = \{a\}$ eine einelementige, $C_2 = \{b, c\}$ eine zweielementige und C_3 eine Klasse, die mehr als zwei Elemente besitzt. Dann gilt:

$\emptyset \prec C_1 \prec C_2 \prec C_3$. (5.102)

Es gibt keine „Zwischenklasse" Z mit $\emptyset \prec Z \prec C_1$ oder $C_1 \prec Z \prec C_2$. (5.103)

$\emptyset$ ist $\prec$-Minimum und die mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen Klassen sind $\prec$-maximal. (5.104)

Beweis von (5.102). $\emptyset \prec C_1$ gilt gemäß 5.86 S. 200. Weiter gilt $C_1 \prec C_2$. Denn die Funktion, die a auf b wirft uns sonst nichts tut, ist Injektion von $\{a\}$ in $\{a, b\}$, aber nach Theorem 5.12.9 S. 166 gibt es keine Bijektion von $\{a\}$ in $\{a, b\}$. Weiter gilt $C_2 \prec C_3$. Denn da C_3 mehr als zwei Elemente besitzt, kann man in C_3 verschiedene Elemente x und y wählen; die Funktion, die a auf x und b auf y wirft, ist dann eine Injektion von C_2 in C_3, aber nach Theorem 5.12.9 gibt es keine Bijektion von C_2 in C_3.

Beweis von (5.103). Sei zuerst ANGENOMMEN, dass $\emptyset \prec Z \prec C_1$, also $\emptyset \prec Z \prec \{a\}$ gilt. Dann folgt aufgrund der Irreflexivität von $\prec$ (Satz 5.96 S. 201) aus $\emptyset \prec Z$, dass Z nicht mit $\emptyset$ identisch ist. Also besitzt Z mindestens ein Element. Andererseits kann Z nicht *mehrere* Element besitzen (sonst würde jede Funktion von Z in $\{a\}$ alle diese Elemente auf a werfen, wäre also nicht injektiv; im Widerspruch dazu gibt es aber wegen $Z \prec \{a\}$ eine Injektion von Z in $\{a\}$). Insgesamt ist also Z einelementig. Aber dann gilt $Z \sim \{a\}$ (Theorem 5.12.9 S. 166) und so kann $Z \prec \{a\}$ (nach Definition von $\prec$) nicht wahr sein: Die ANNAHME war also falsch.
Sei als Nächstes ANGENOMMEN, dass $C_1 \prec Z \prec C_2$, d. h. $\{a\} \prec Z \prec \{b, c\}$ gilt. Dann gibt es wegen $\{a\} \prec Z$ eine Injektion von $\{a\}$ in Z; diese muss a auf ein Element von Z werfen, so dass Z nichtleer ist, also mindestens ein Element x besitzt. Aber Z ist weder einelementig noch zweielementig (sonst wäre wegen Theorem 5.12.9 entweder $Z \sim \{a\}$ oder $Z \sim \{a, b\}$, so dass im ersten Fall *nicht* $\{a\} \prec Z$, im zweiten *nicht* $Z \prec \{a, b\}$ sein könnte). Somit muss es voneinander verschiedene Elemente x, y, z in Z geben. Nun gibt es wegen $Z \prec \{a, b\}$ aber eine Injektion f von Z in $\{a, b\}$. Diese wirft x auf a oder b, und – je nachdem – y auf b oder a. Dann aber muss die Injektion f das Element z ebenfalls auf a oder b werfen und könnte darum nicht injektiv sein. So war auch die zweite ANNAHME falsch.

Beweis von (5.104). $\emptyset$ ist Minimum, denn für jede Klasse C gilt wegen (5.86), dass $C = \emptyset$ oder andernfalls $\emptyset \prec C$. Ferner ist $\mathbb{D}$ maximal, d. h. es gibt keine Klasse C mit $\mathbb{D} \prec C$ (andernfalls ergibt $\mathbb{D} \prec C$ zusammen mit (5.87), dass $\mathbb{D} \prec C \precsim \mathbb{D}$ und es folgt mittels gemischter Transitivität $\mathbb{D} \prec \mathbb{D}$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $\prec$), und dann kann auch für keine mit $\mathbb{D}$ gleichmächtige Klasse D gelten, dass $D \prec C$ (andernfalls könnte man in der Aussage $D \prec C$ wegen Theorem 5.15.4 das D durch $\mathbb{D}$ ersetzen und erhielte $\mathbb{D} \prec C$). □

Theorem 5.15.9 S. 203

Ist M eine Menge und U eine Unmenge, so gilt $M \prec \mathtt{On} \precsim U$. (5.105)

Gilt umgekehrt $C \prec \mathtt{On}$, so ist C eine Menge. Und gilt $\mathtt{On} \precsim C$, so ist C eine Unmenge. (5.106)

Beweis von (5.105). Da $\mathtt{On}$ nach Theorem (5.73 S. 191) eine Unmenge und M eine Menge ist, gilt nach (5.94 S. 201) $M \prec \mathtt{On}$. Da über $\mathtt{On}$ eine Wohlordnung existiert (Theorem 5.14.6 S. 192) und U eine Unmenge ist, existiert nach Theorem 5.13.32 S. 185 eine Injektion von $\mathtt{On}$ in U, also gilt wegen (5.90 S. 200), dass $\mathtt{On} \precsim U$.

Beweis von (5.106). Aus $C \prec \mathtt{On}$ folgt, dass C keine Unmenge sein kann (sonst wäre nach 5.105 auch $\mathtt{On} \precsim C$, insgesamt also $C \prec \mathtt{On} \precsim C$ und so per gemischter Transitivität $C \prec C$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $\prec$). Analog folgt aus $\mathtt{On} \precsim C$, dass C keine Menge sein kann (andernfalls wäre nach 5.105 auch $C \prec \mathtt{On}$, insgesamt also wieder $C \prec \mathtt{On} \precsim C$ und es ergibt sich derselbe Widerspruch). □

Theorem 5.15.12 S. 203

Ist U Unmenge und M Menge, so gilt $U \sim (U \cup M)$ und $U \sim (U \setminus M)$.

Beweis. Zunächst zeigen wir $U \sim (U \cup M)$ unter der VORAUSSETZUNG, dass M und U disjunkt sind, also kein gemeinsames Element haben. Hierzu definieren wir durch ordnungstheoretische Rekursion (vgl. 5.14.8 S. 193) eine Funktion von $\mathtt{On}$ in $\mathcal{P}(U)$, die jede Ordinalzahl α auf eine Teilmenge von U wirft, die wir M_α nennen wollen:

$$M_\alpha := \boldsymbol{\varepsilon}\ X\ (X \sim M \text{ und } X \subseteq (U \setminus \bigcup_{\xi \in \alpha} M_\xi)).$$

Es ist also M_0 $(= M_\emptyset)$ definiert als eine mit M gleichmächtige Menge, die Teilklasse von $U \setminus \bigcup_{\xi\in\emptyset} M_\xi$ (das heißt Teilklasse von $U \setminus \emptyset$, also von U) ist. M_1 $(= M_{\{0\}})$ ist definiert als eine mit M gleichmächtige Menge, die Teilklasse von $U \setminus \bigcup_{\xi\in\{0\}} M_\xi$ (das heißt Teilklasse von $U \setminus M_0$) ist usw. Allgemein sieht man auf folgende Weise, dass wann immer für eine Ordinalzahl α bereits für alle ξ mit $\xi < \alpha$ (d. h. $\xi \in \alpha$) M_ξ als eine Teilmenge von U definiert wurde, auch M_α eine solche ist: Zunächst ist nach Theorem 5.10.74 S. 150 auch $\bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$ eine Menge, also ist $U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$ eine Unmenge: Denn ANGENOMMEN, $U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$ ist eine Menge, so ist ihre Vereinigung mit der Menge $\bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$ gemäß Korollar 5.10.20 S. 125 ebenfalls eine Menge, aber im Widerspruch dazu ist diese Vereinigung $(U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi) \cup \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$ die Unmenge U (da alle M_ξ Teilklassen von U sind, ist auch $\bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$ eine Teilklasse von U, und somit erhalten wir $(U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi) \cup \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$, indem wir die Teilklasse $\bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$ zuerst aus U entfernen und dann wieder hinzufügen; dadurch erhalten wir aber wieder U selbst). Daher war die ANNAHME falsch.
Da somit $U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi$ eine Unmenge ist, gilt wegen (5.94 S. 201), dass $M \prec (U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi)$, also gilt erst recht $M \precsim (U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi)$, weshalb es nach (5.90 S. 200) eine Injektion von M in $(U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi)$ gibt. Deren Wertebereich aber ist dann eine mit M gleichmächtige Klasse X, die Teilklasse von $(U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi)$ ist, und mithin bezeichnet $\boldsymbol{\varepsilon}\ X\ (X \sim M\ \wedge\ X \subseteq U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi)$ nicht den Joker, sondern ein solches X, welches dann als unserer M_α gilt. Dieses M_α ist aber gemäß (5.92 S. 201) wegen seiner Gleichmächtigkeit mit der Menge M eine Menge, und als Teilklasse von $(U \setminus \bigcup_{\xi\in\alpha} M_\xi)$ ist es eine Teilklasse (somit Teilmenge) von U.
Wir fassen nun die Elemente aller Teilmengen M_α von U in der Klasse $\widehat{M} := \bigcup_{\xi\in\mathtt{On}} M_\xi$ zusammen. Da jedes M_α mit M gleichmächtig ist, sind die M_α auch untereinander gleichmächtig, insbesondere ist $M_\alpha \sim M_{\alpha+1}$, so dass es eine Bijektion f_α von M_α in $M_{\alpha+1}$ gibt. Da auch $M \sim M_0$, gibt es außerdem eine Bijektion f von M in M_0. Nun sind für verschiedene Ordinalzahlen α und β stets M_α und M_β *disjunkt*, d. h. sie haben kein gemeinsames Element (ist nämlich $\alpha < \beta$, also $\alpha \in \beta$, so ist M_β nach Definition Teilklasse von $U \setminus \bigcup_{\xi\in\beta} M_\xi$, hat also mit keinem M_ξ für $\xi \in \beta$ ein gemeinsames Element, und daher kein gemeinsames Element mit M_α; Analoges gilt auch für den Fall $\beta < \alpha$), und da nach VORAUSSETZUNG M und U disjunkt sind, können (wegen $M_\alpha \subseteq U$) auch M und M_α niemals ein gemeinsames Element haben. Daher können wir eine Funktion F von $U \cup M$ in U definieren, indem wir folgendes fordern:
– Jedes x aus M wirft F auf das Element $f(x)$ von M_0, d. h. $F(x) = f(x) \in M_0$.
– Jedes x aus einem M_α wirft F auf das Element $f_\alpha(x)$ von $M_{\alpha+1}$, d. h. $F(x) = f_\alpha(x) \in M_{\alpha+1}$.
– Jedes x aus $U \setminus \widehat{M}$ wirft F auf sich selbst, d. h. $F(x) = x \notin \widehat{M}$.
Dieses F ist nun eine Injektion von $U \cup M$ in U: Denn sind x und y verschiedene Elemente von $U \cup M$, gibt es folgende Fälle:
(a) x und y liegen beide in M,
(b) x und y liegen beide in ein und demsselben M_α,
(c) eines von ihnen (es heiße x) liegt in M und das andere (es heiße y) liegt in einem M_α,
(d) eines von ihnen (es heiße x) liegt in M_α und das andere (es heiße y) in M_β mit $\alpha \neq \beta$,
(e) keines von ihnen liegt in M oder einem M_α: dann liegen beide in $U \setminus \widehat{M}$.
Im Fall (a) gilt $F(x) = f(x) \neq f(y) = F(y)$ wegen der Injektivität von f. Im Fall (b) gilt $F(x) = f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y) = F(y)$ wegen der Injektivität von f_α. Im Fall (c) gilt $F(x) = f(x) \in M_0$ und $F(y) = f_\alpha(x) \in M_{\alpha+1}$. Wegen $0 \neq \alpha + 1$ sind aber M_0 und $M_{\alpha+1}$ disjunkt, so dass wieder $F(x) \neq F(y)$. Im Fall (d) gilt $F(x) = f_\alpha(x) \in M_{\alpha+1}$ und $F(y) = f_\beta(y) \in M_{\beta+1}$, und aus $\alpha \neq \beta$ folgt $\alpha + 1 \neq \beta + 1$,[8] also sind $M_{\alpha+1}$ und $M_{\beta+1}$

[8] Ist nämlich $\alpha < \beta$, so ist $\alpha+1 \leq \beta$ (da $\alpha+1$ der *unmittelbare* Nachfolger von α ist); daraus folgt $\alpha+1 \leq \beta < \beta+1$, und darum $\alpha+1 < \beta+1$. Genauso folgt im Falle $\beta < \alpha$, dass $\beta+1 < \alpha+1$. In jedem Fall ist darum $\alpha+1 \neq \beta+1$.

disjunkt und darum ist auch dieses Mal $F(x) \neq F(y)$. Im Fall (e) schließlich gilt $F(x) = x \neq y = F(y)$. So ist F injektiv und mit (5.90 S. 200) folgt $(U \cup M) \precsim U$. Umgekehrt ist $U \subseteq (U \cup M)$, so dass nach (5.89 S. 200) $U \precsim (U \cup M)$. Insgesamt folgt also $U \sim (U \cup M)$ mittels Theorem 5.15.5 S. 201. Damit ist $U \sim (U \cup M)$ zunächst unter der eingangs gemachten VORAUSSETZUNG, dass M und U disjunkt sind, bewiesen. Sind aber M und U nicht disjunkt, so sei $M^* := M \setminus U$ der außerhalb von U liegende Teil von M. Dann ist $U \cup M$ dasselbe wie $U \cup M^*$, wobei nun aber M^* und U disjunkt sind. Nach dem bewiesenen Teil ist also $U \sim (U \cup M^*)$, und da $U \cup M^*$ mit $U \cup M$ identisch ist, können wir hierfür $U \sim (U \cup M)$ schreiben. Zu zeigen ist noch, dass $U \setminus M \sim U$. Hierzu sei zunächst VORAUSGESETZT, dass M eine Teilklasse von U ist. Dann gilt für $U^* := U \setminus M$, dass U^* eine Unmenge ist (wäre $U \setminus M$ ist eine Menge, so wäre ihre Vereinigung mit der Menge M nach Korollar 5.10.20 S. 125 ebenfalls eine Menge; doch ist diese Vereinigung nach (5.22 S. 127) mit U identisch, was eine Unmenge ist) und nach dem bewiesenen Teil folgt $U^* \sim U^* \cup M$. Hierfür können wir, da U^* dasselbe wie $U \setminus M$ und $U^* \cup M$ (gemäß 5.22 S. 127) dasselbe wie U ist, $U \setminus M \sim U$ schreiben. Nun lassen wir nun die VORAUSSETZUNG fallen, dass M eine Teilklasse von U ist. Dann sei $M^* := U \cap M$ der innerhalb von U liegende Teil von M. Es ist dann $U \setminus M$ dasselbe wie $U \setminus M^*$. Nach dem bewiesenen Teil ist $U \sim (U \setminus M^*)$, und da $U \setminus M^*$ mit $U \setminus M$ identisch ist, können wir hierfür $U \sim (U \setminus M)$ schreiben. □

Theorem 5.15.16 S. 204

Für Klassenstufen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und Mengenstufen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ Mengenstufen gilt:

$\mathfrak{A} < \mathfrak{A}$ ist falsch, aus $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C}$ folgt $\mathfrak{A} < \mathfrak{C}$, (5.109)

es gilt $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, (5.110)

und für Klassen A und B ist $\llbracket A \rrbracket \leq_{Fr} \llbracket B \rrbracket$ genau dann, wenn $A \precsim B$. (5.111)

Beweis. A bzw. B bzw. C bzw. N bzw. M sei je eine Klasse, deren FREGEsche Zahl $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ ist, so dass $\llbracket A \rrbracket = \mathfrak{A}, \llbracket B \rrbracket = \mathfrak{B}, \llbracket C \rrbracket = \mathfrak{C}, \llbracket M \rrbracket = \mathfrak{M}$ und $\llbracket N \rrbracket = \mathfrak{N}$.

Beweis von (5.109). Wäre $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}$, d. h. $\llbracket A \rrbracket < \llbracket A \rrbracket$, so würde gemäß (5.108 S. 204) $A \prec A$ folgen im Widerspruch zu (5.96 S. 201), also gilt $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}$ nicht.
Aus $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C}$, d. h. $\llbracket A \rrbracket < \llbracket B \rrbracket < \llbracket C \rrbracket$, folgt wegen (5.108), dass $A \prec B \prec C$, wegen (5.96 S. 201) folgt daraus $A \prec C$, und daraus wegen (5.108) schließlich $\llbracket A \rrbracket < \llbracket C \rrbracket$, d. h. $\mathfrak{A} < \mathfrak{C}$.

Beweis von (5.110). Nach (5.100 S. 201) muss von den folgenden Alternativen eine wahr sein:
(1) $M \prec N$, (2) $M \succ N$, d. h. wegen (5.85 S. 200) $N \prec M$, oder (3) $M \sim N$.
Im ersten Fall folgt mit (5.108), dass $\llbracket M \rrbracket < \llbracket N \rrbracket$, d. h. $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, im zweiten folgt analog $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$, und im letzten folgt wegen (5.46 S. 170), dass $\llbracket M \rrbracket = \llbracket N \rrbracket$, das heißt $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

Beweis von (5.111). $\llbracket A \rrbracket \leq \llbracket B \rrbracket$ gilt genau dann wenn $\llbracket A \rrbracket < \llbracket B \rrbracket$ oder $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$.
$\llbracket A \rrbracket < \llbracket B \rrbracket$ gilt wegen (5.108) genau dann, wenn $A \prec B$.
$\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$ gilt wegen (5.46) genau dann, wenn $A \sim B$.
Daher gilt $\llbracket A \rrbracket \leq \llbracket B \rrbracket$ genau dann, wenn $A \prec B$ oder $A \sim B$, d. h. (per Definition von $\precsim$) $A \precsim B$. □

Theorem 5.15.17 S. 205

Jede Mengenstufe $\mathfrak{M}$, zu der es mindestens eine höhere Mengenstufe gibt, besitzt einen unmittelbaren Nachfolger, und dieser ist eine Mengenstufe.

Beweis. Wenn es höhere Mengenstufen als $\mathfrak{M}$ gibt, so gibt es Mengen, die auf höheren Stufen als $\mathfrak{M}$ liegen, und da jede Menge nach Theorem 5.14.16 S. 197 mit mindestens einer Ordinalzahl gleichmächtig ist, ist die Klasse C aller Ordinalzahlen, die mit mindestens einer Menge gleichmächtig sind, die auf einer höheren Mengenstufe als $\mathfrak{M}$ liegt, nichtleer. Da $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ wohlgeordnet ist, besitzt C ein Minimum, d. h. es gibt eine kleinste Ordinalzahl μ, die noch mit einer auf einer höheren Mengenstufe als $\mathfrak{M}$ liegenden Menge M^+ gleichmächtig ist. Wegen $M^+ \sim \mu$ liegt μ selbst auf dieser höheren Mengenstufe, so dass diese Mengenstufe $\llbracket \mu \rrbracket$ ist. So gilt also $\mathfrak{M} <_{Fr} \llbracket \mu \rrbracket$, und es lässt sich zeigen, dass $\llbracket \mu \rrbracket$ unmittelbarer Nachfolger von $\mathfrak{M}$ ist. Hierzu muss nur noch ausgeschlossen werden, dass es eine Zwischenstufe $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{M} <_{Fr} \mathfrak{S} <_{Fr} \llbracket \mu \rrbracket$ gibt. ANGENOMMEN, es gibt ein solches $\mathfrak{S}$. Wegen $\mathfrak{S} <_{Fr} \llbracket \mu \rrbracket$ gilt nach Definition von $<_{Fr}$ für die auf $\mathfrak{S}$ liegenden Klassen X,

dass $X \prec \mu$. Weil μ als Ordinalzahl eine Menge ist, ist dann wegen (5.92 S. 201) auch X eine Menge. Also ist $\mathfrak{S}$ eine Mengenstufe. Auf der Mengenstufe $\mathfrak{S}$ liegt dann nach Korollar 5.14.17 S. 197 mindestens eine Ordinalzahl σ. Da σ auf $\mathfrak{S}$ und μ auf $\llbracket\mu\rrbracket$ liegt, folgt aufgrund der Definition von $<_{Fr}$ aus $\mathfrak{S} <_{Fr} \llbracket\mu\rrbracket$, dass $\sigma \prec \mu$ ist. Nach (5.101 S. 201) folgt daraus weiter $\sigma < \mu$. Es ist also σ eine Ordinalzahl, die mit gewissen Mengen (nämlich allen auf $\mathfrak{S}$ liegenden Mengen) gleichmächtig ist, die auf einer höheren Stufe als $\mathfrak{M}$ liegen. So gehört σ zur Klasse C und ist kleiner als das Minimum μ von C, was ein Widerspruch ist. Also war die Annahme falsch, und es existiert keine Zwischenstufe $\mathfrak{S}$. Damit ist $\llbracket\mu\rrbracket$ unmittelbarer Nachfolger von $\mathfrak{M}$. □

Theorem 5.15.19 S. 205

Die mit Ω gleichmächtigen Klassen sind genau diejenigen Unmengen, über denen ein Wohlordnung existiert. Hierzu gehört außer Ω auch $\Omega \times \Omega$.
Die mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen Klassen sind genau die $\prec$-maximalen Klassen, also diejenigen, zu denen keine relationstheoretisch größere existiert. Hierzu gehören außer $\mathbb{D}$ auch $\mathbb{M}$ und alle Komplemente von Mengen.

Beweis. Zum ersten Teil der Behauptung. Sei $U \sim \mathtt{On}$. Dann ist U nach (5.93 S. 201) eine Unmenge, und da $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ wohlgeordnet ist, gibt es nach Theorem 5.13.38 S. 188 eine Wohlordnung über U. Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass U eine Unmenge ist, über der eine Wohlordnung existiert. Da auch über $\mathtt{On}$ eine solche existiert, folgt nach (5.68 S. 189), dass $U \sim \mathtt{On}$. $\Omega \times \Omega$ ist wohlordnungstragend, denn die wie folgt definierte Relation $<^2$ ist eine entsprechende Wohlordnung: Für Paare $\langle a, b\rangle$ und $\langle c, d\rangle$ aus $\Omega \times \Omega$ soll $\langle a, b\rangle <^2 \langle c, d\rangle$ genau dann gelten, wenn eine der Aussagen

(1) $\max\{a, b\} < \max\{c, d\}$ oder
(2) $\max\{a, b\} = \max\{c, d\}$ und $a < c$ oder
(3) $\max\{a, b\} = \max\{c, d\}$ und $a = c$ und $b < d$ gilt.

Zur Irreflexivität: Niemals ist $\langle a, b\rangle <^2 \langle a, b\rangle$, sonst müsste $\max\{a, b\} < \max\{a, b\}$ oder $a < a$ oder $b < b$ sein, was absurd ist.

Zur Transitivität: Sei $\langle a, b\rangle <^2 \langle c, d\rangle <^2 \langle e, f\rangle$ vorausgesetzt, zu zeigen ist $\langle a, b\rangle <^2 \langle e, f\rangle$. Wegen der Voraussetzung gilt in jeden Fall $\max\{a, b\} \leq \max\{c, d\} \leq \max\{e, f\}$. Kann man in dieser Ungleichungskette eines der beiden Exemplare des Zeichens $\leq$ durch $<$ ersetzen, so folgt $\max\{a, b\} < \max\{e, f\}$, somit $\langle a, b\rangle <^2 \langle e, f\rangle$ und wir sind fertig. Daher können wir im Weiteren von $\max\{a, b\} = \max\{c, d\} = \max\{e, f\}$ ausgehen. Dann muss aber $a \leq c \leq f$ gelten. Kann man in dieser Ungleichungskette eines der beiden Exemplare des Zeichens $\leq$ durch $<$ ersetzen, so folgt $a < f$, somit $\langle a, b\rangle <^2 \langle e, f\rangle$ und wir sind fertig. Daher können wir im Weiteren von $\max\{a, b\} = \max\{c, d\} = \max\{e, f\}$ und $a = c = f$ ausgehen. Dann bedeutet aber die Voraussetzung, dass $b < d < f$ gilt, also $b < f$ und daher $\langle a, b\rangle <^2 \langle e, f\rangle$.

Zur Linearität: Es ist $\max\{a, b\} < \max\{c, d\}$ oder $\max\{c, d\} < \max\{a, b\}$ oder $\max\{a, b\} = \max\{c, d\}$. In den ersten beiden Fällen folgt $\{a, b\} <^2 \{c, d\}$ bzw. $\{c, d\} <^2 \{a, b\}$. Sei also $\max\{a, b\} = \max\{c, d\}$. Dann gilt $a < c$ oder $c < a$ oder $a = c$. In den ersten beiden Fällen ist $\{a, b\} <^2 \{c, d\}$ bzw. $\{c, d\} <^2 \{a, b\}$. Sei also $a = c$. Dann gilt $b < d$ oder $d < b$ oder $d = b$. In den ersten beiden Fällen folgt $\{a, b\} <^2 \{c, d\}$ bzw. $\{c, d\} <^2 \{a, b\}$ und im letzten $\{a, b\} = \{c, d\}$.

Zur Minimumsbedingung. Sei T eine nichtleere Teilmenge von $\mathtt{On} \times \mathtt{On}$. Dann gibt es unter den «Paarmaxima» $\max\{a, b\}$ der Elemente $\langle a, b\rangle$ von T eine kleinste Ordinalzahl μ, sodann unter ersten Komponenten der Elemente von T mit Paarmaximum μ eine kleinste erste Komponente μ_1, und schließlich unter den zweiten Komponenten der Elemente von T mit Paarmaximum μ und erster Komponente μ_1 eine kleinste zweite Komponente μ_2, so dass dann $\langle \mu_1, \mu_2\rangle$ das Minimum von T ist.

Zur Abschnittsbedingung. Im Abschnitt $\mathtt{Ab}(\langle \alpha, \beta\rangle)$ eines Elements $\langle \alpha, \beta\rangle$ von $\mathtt{On} \times \mathtt{On}$ mit Paarmaximum μ liegen nur Paare $\langle \xi, \eta\rangle$ mit $\xi \leq \mu$ und $\eta \leq \mu$, also mit $\xi < m + 1$ und $\eta < m + 1$, d. h. mit $\xi \in \mu + 1$ und $\eta \in \mu + 1$, so dass diese Paare in $(\mu + 1) \times (\mu + 1)$ liegen, was nach 5.10.58 S. 142 eine Menge ist. Daher ist $\mathtt{Ab}(\langle \alpha, \beta\rangle)$ Teilklasse der Menge $(\mu + 1) \times (\mu + 1)$ und somit nach dem Teilmengenaxiom selbst eine Menge.

Zum zweiten Teil der Behauptung. Sei $D \sim \mathbb{D}$. Dann ist D nach (5.104 S. 202) $\prec$-maximal. Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass D $\prec$-maximal ist. Nach (5.87 S. 200) gilt $D \precsim \mathbb{D}$, also $D \sim \mathbb{D}$ oder $D \prec \mathbb{D}$. Aber Letzteres gilt *nicht*, sonst wäre D nicht $\prec$-maximal. Also gilt $D \sim \mathbb{D}$. Damit sind die mit $\mathbb{D}$ gleichmächtigen Klassen genau die $\prec$-maximalen Klassen. Ist C das Komplement einer Menge, so ist C nach Korollar 5.15.13 S. 203 mit $\mathbb{D}$ gleichmächtig, und um schließlich zu zeigen, dass auch $\mathbb{M}$ mit $\mathbb{D}$ gleichmächtig ist, überzeugen wir uns

zunächst davon, dass $U_1 \sim \mathbb{D}$ gilt (wobei U_1 die Klasse aller einelementigen Mengen ist): Es gilt nämlich $\mathbb{D} \sim U_1$, weil die Funktion, die jedes Individuum x auf $\{x\}$ wirft, eine Bijektion von $\mathbb{D}$ in U_1 ist. Nun ist aber $U_1 \subseteq \mathbb{M}$, also folgt (nach 5.89 S. 200) $U_1 \precsim \mathbb{M}$, während umgekehrt die Funktion, die jede Menge M auf $\{M\}$ wirft, eine Injektion von M auf U_1 ist, so dass nach (5.90 S. 200) auch $\mathbb{M} \precsim U_1$ gilt. Mit Theorem 5.15.5 S. 201 folgt also $\mathbb{M} \sim U_1$ und da $U_1 \sim \mathbb{D}$, folgt $\mathbb{M} \sim \mathbb{D}$ per Transitivität der Gleichmächtigkeit. □

Theorem 5.16.17 S. 215

Es liege vor:
(a) eine Beschreibung der Zielobjekte
(b) ein Zielobjekt a,
(c) ein Term $\rho(x)$, der nach Interpretation von x geschlossen ist,
derart dass $\rho(o)$ immer ein Zielobjekt beschreibt, wenn o ein solches ist
bzw. ein Term $\rho(u, x)$, der nach Interpretation von u und x geschlossen ist,
derart dass $\rho(n, o)$ immer ein Zielobjekt beschreibt, wenn $n \in \mathbb{N}$ gilt und o ein Zielobjekt ist.

Dann gibt es genau eine Funktion f mit $\mathtt{Db}(f) = \mathbb{N}$, deren Werte Zielobjekte sind, derart dass
(1) $f(0) = a$, und
(2) für alle n aus $\mathbb{N}$: $f(n') = \rho(f(n))$ bzw. $f(n') = \rho(n, f(n))$.

Beweis. Wir können uns auf den (scheinbar) komplizierteren Fall beschränken, dass ein Term $\rho(u, x)$ statt des einfacheren Terms $\rho(x)$ vorliegt. Denn der einfachere Fall ist ein „Spezialfall“ des komplizierteren: Ist $\rho(x)$ schon nach Interpretation von x geschlossen, so erst recht nach Interpretation von x und einer *weiteren* Variablen u. Im übrigen kann man aber den hier für $\rho(u, x)$ geführten Beweis in einen solchen für $\rho(x)$ überführen, indem man die Zeichenreihe $\rho(n, a)$ durch $\rho(a)$ und $\rho(n, f(n))$ durch $\rho(f(n))$ usw. ersetzt.
Zu zeigen ist, dass es (a) nicht *mehr als eine* solche Funktion f gibt (Eindeutigkeit) und (b) das es nicht *weniger als eine* solche Funktion f gibt (Existenz).

Eindeutigkeitsbeweis. Sei ANGENOMMEN, dass f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ in Z sind mit $f(0) = a$ und $g(0) = a$, so dass für jede Zahl n gilt: $f(n') = \rho(n, f(n))$ und $g(n') = \rho(n, g(n))$ für jede Zahl n. Dann zeigt sich durch vollständige Induktion, dass alle Zahlen n die Eigenschaft haben, dass $f(n) = g(n)$ gilt, so dass die Funktionen f und g identisch sind.
INDUKTIONSANFANG. $f(0) = a = g(0)$.
INDUKTIONSSCHRITT. Für ein n sei VORAUSGESETZT, dass $f(n) = g(n)$. Daraus folgt aber sofort $\rho(n, f(n)) = \rho(n, g(n))$ und darum $f(n') = \rho(n, f(n)) = \rho(n, g(n)) = g(n')$. Damit ist der Eindeutigkeitsteil des Beweises beendet. Der Existenzteil ist verwickelter:

Vorbereitungen für den Beweis der Existenz. Wir führen zunächst folgende Terminologie ein:

Definition (Anfangsformel) Eine *Anfangsformel* sei eine nach Interpretation von x geschlossene Formel $\varphi(x)$ mit der Eigenschaft, dass für jede Zahl k von den Aussagen

«$\varphi(k)$ ist wahr» und «$\varphi(k')$ ist falsch» (7.15)

stets mindestens eine wahr ist. Wenn also für eine Anfangsformel $\varphi(x)$ und eine Zahl k gilt, dass $\varphi(k)$ falsch ist, kann von den beiden Aussagen «$\varphi(k)$ ist wahr“ und «$\varphi(k')$ ist falsch», von denen mindestens eine wahr sein soll, nur die letzte wahr sein. Darum gilt für Anfangsformeln $\varphi(x)$:

Wann immer $\varphi(k)$ falsch ist, ist auch $\varphi(k')$ falsch. (7.16)

Ebenso gilt für Anfangsformeln $\varphi(x)$:

Wann immer $\varphi(k')$ wahr ist, ist auch $\varphi(k)$ wahr. (7.17)

Denn wenn $\varphi(k')$ wahr ist, kann von den beiden Aussagen «$\varphi(k')$ ist falsch» und «$\varphi(k)$ ist wahr», von denen mindestens eine wahr sein muss, nur die letzte wahr sein.

Beispiel 1 «$x \in \mathbb{N}$» ist eine Anfangsformel: denn für jede Zahl k gilt $x \in \mathbb{N}$, d. h. $\varphi(k)$ ist wahr.

Beispiel 2 «$x = 0$» ist eine Anfangsformel: denn für jede Zahl k ist wegen Axiom (P3) $k' = 0$ falsch, d. h. $\varphi(k')$ ist stets falsch.

Wir erklären nun für jede Zahl n bestimmte Anfangsformeln zu «n-tauglichen Anfangsformeln»:

7.0.12 Definition (n-taugliche Anfangsformeln und ihre Zielobjekte) Für Zahlen n sein eine *n-tauglichen Anfangsformel* eine Anfangsformel $\varphi_n(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_n(0) \text{ und } \varphi_n(n) \text{ ist wahr, während } \varphi_n(n') \text{ falsch ist,} \tag{7.18}$$

und man kann für jede Zahl m, für die $\varphi_n(m)$ wahr ist, ein Element von Z wählen, das *Zielobjekt von m bezüglich φ_n* heißen und mit $\varphi_n[m]$ abgekürzt werden soll, so dass

$$\varphi_n[0] = a, \tag{7.19}$$

$$\text{und } \varphi_n[m'] = \rho(m, \varphi_n[m]) \text{ für alle } m, \text{ für die auch } \varphi_n(m') \text{ wahr ist}^9 \tag{7.20}$$

(wobei die letzte Zeile, falls es überhaupt keine Zahlen m gibt, für die $\varphi_n(m')$ gilt, entfällt).

Man beachte, dass für Zahlen m hier $\varphi_n(m)$ ein *Aussage*, $\varphi_n[m]$ aber eine *Kennzeichnung* ist, mit der wir ein Zielobjekt bezeichnen. Wir beweisen nun zunächst zwei Lemmata.

Lemma 1. *Zu jeder Zahl n gibt es eine n-taugliche Anfangsformel $\varphi_n(x)$.*

Beweis von Lemma 1 durch vollständige Induktion. INDUKTIONSANFANG: Es gibt eine 0-taugliche Anfangsformel $\varphi_0(x)$, nämlich «$x = 0$». Dass dies eine Anfangsformel ist, haben wir schon gesehen (siehe Beispiel 2). Sie ist n-tauglich: Es gilt (7.18), denn $\varphi_0(0)$ (das ist «$0 = 0$») ist wahr und ebenso $\varphi_0(n)$ (das ist ebenfalls «$0 = 0$»), aber $\varphi_0(n')$ (das ist «$0 = 0'$») ist falsch. Indem wir nun einfach $\varphi_0[0] := a$ festsetzen, gilt auch Bedingung (7.19). Was aber Bedingung (7.20) angeht, so entfällt diese: Denn wegen (P3) gibt es keine Zahl m, für die $\varphi(m')$ (das ist «$m' = 0$») gilt. Damit ist $\varphi_0(x)$ tatsächlich eine 0-taugliche Anfangsformel.

INDUKTIONSSCHLUSS: Sei VORAUSGESETZT, dass eine n-taugliche Anfangsformel $\varphi_n(x)$ vorhanden ist. Zu zeigen ist, dass sich eine n'-taugliche Anfangsformel $\varphi_{n'}(x)$ formulieren lässt. Wir nehmen als $\varphi_{n'}(x)$ folgende Formel: «es gilt mindestens eine der beiden Aussagen $\varphi_n(x)$ oder $x = n'$». Zunächst zeigen wir, dass dies eine Anfangsformel ist. Nach (7.15) ist hierzu zu zeigen, dass für jede natürliche Zahl k von den Aussagen

(1) «es ist wahr, dass mindestens eine der beiden Aussagen $\varphi_n(k)$ oder $k = n'$ gilt»,

(2) «es ist falsch, dass mindestens eine der beiden Aussagen $\varphi_n(k')$ oder $k' = n'$ gilt»

mindestens eine wahr ist. Nun ist (2) entweder wahr oder falsch. Ist (2) wahr, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist (2) aber falsch, so ist es wahr, dass mindestens eine der beiden Aussagen $\varphi_n(k')$ oder $k' = n'$ gilt. Wenn nun $\varphi_n(k')$ wahr ist, gilt (wegen 7.17 und weil φ_n nach VORAUSSETZUNG eine Anfangsformel ist) auch $\varphi_n(k)$ und somit ist (1) wahr. Wenn aber $k' = n'$ wahr ist, muss wegen Axiom (P4) auch $k = n$ gelten. Nun ist $\varphi_n(n)$ (wegen 7.18 und weil φ_n eine n-taugliche Anfangsformel ist) wahr, und wegen $k = n$ bedeutet dies, dass $\varphi_n(k)$ wahr ist und somit (1) gilt. Damit ist $\varphi_{n'}(x)$ also eine Anfangsformel.
Wir weisen für $\varphi_{n'}(x)$ nun die Bedingung (7.18) nach:[10] $\varphi_{n'}(0)$ («es gilt mindestens eine der beiden Aussagen $\varphi_n(0)$ oder $0 = n'$») gilt, weil wegen 7.18 und der VORAUSSETZUNG $\varphi_n(0)$ gilt; $\varphi_{n'}(n')$ («es gilt mindestens eine der beiden Aussagen $\varphi_n(n')$ oder $n' = n'$») gilt, weil $n' = n'$ gilt; $\varphi_{n'}(n'')$ («es gilt mindestens eine der beiden Aussagen $\varphi_n(n'')$ oder $n'' = n'$») ist falsch, da weder $n'' = n'$ noch $\varphi_n(n'')$ gilt.[11]
So bleibt für $\varphi_{n'}(x)$ noch (7.19) und (7.20) nachzuweisen. Hierzu betrachten wir die Zahlen m, für die $\varphi_{n'}(m)$ wahr ist. Das sind nach Definition von $\varphi_{n'}$

(1) diejenigen, für die $\varphi_n(m)$ wahr ist, und
(2) diejenigen, für die $m = n'$ gilt: Zu diesen gehört natürlich nur n'.

---

[9] Für diese m muss (wegen 7.17) auch $\varphi_n(m)$ wahr sein, so dass ein Zielobjekt $\varphi_n[m]$ gewählt wurde und somit auch $\rho(m, \varphi_n[m])$ ein wohldefiniertes Zielobjekt bezeichnet.

[10] Man beachte, dass wir hierzu $\varphi_{n'}(0)$ als wahr, $\varphi_{n'}(n')$ ebenfalls als wahr, $\varphi_{n'}(n'')$ aber als falsch zu erweisen haben (und nicht etwa $\varphi_n(n')$ als wahr und $\varphi_n(n')$ als falsch), denn um die Bedingung (7.18) für $\varphi_{n'}(x)$ zu formulieren, müssen wir dort für «n» nicht nur im Index, sondern *überall* «n'» substituieren.

[11] $n'' = n'$ ist wegen Satz 5.16.12 S. 213 falsch; außerdem ist nach VORAUSSETZUNG und wegen (7.18) zunächst $\varphi_n(n')$ falsch, und wegen (7.16) dann auch $\varphi_n(n'')$.

Für diese m haben wir ein Zielobjekt $\varphi_{n'}[m]$ festzusetzen. Für diejenigen m, für die (1) gilt, also $\varphi_n(m)$ wahr ist, liegen bereits nach VORAUSSETZUNG Zielobjekte $\varphi_n[m]$ vor, und wir setzen fest:

$$\varphi_{n'}[m] \;:=\; \text{das Zielobjekt } \varphi_n[m] \quad \text{für alle } m\text{, für die } \varphi_n(m) \text{ wahr ist, und} \tag{7.21}$$

$$\varphi_{n'}[n'] \;:=\; \rho(n, \varphi_n[n]).^{12} \tag{7.22}$$

Da nun $\varphi_n(0)$ wahr ist,[13] gilt laut Festsetzung (7.21), dass $\varphi_{n'}[0] = \varphi_n[0]$, und da für die n-taugliche Formel φ_n wegen (7.19) $\varphi_n[0] = a$ ist, folgt $\varphi_{n'}[0] = a$, womit Bedingung (7.19) verifiziert ist.
Es bleibt noch (7.20) zu zeigen: dass nämlich $\varphi_{n'}[m'] = \rho(m, \varphi_{n'}[m])$ für alle m gilt, für die $\varphi_{n'}(m')$ («es gilt mindestens eine der beiden Aussagen $\varphi_n(m')$ oder $m' = n'$») wahr ist. Wir unterscheiden also zwei Fälle:

1. $\varphi_n(m')$ ist wahr. Dann ist laut Festsetzung (7.21) $\qquad \varphi_{n'}[m'] = \varphi_n[m'],$ (7.23)

und es gilt nach VORAUSSETZUNG[14] $\qquad \varphi_n[m'] = \rho(m, \varphi_n[m]).$ (7.24)

Da φ_n n-tauglich ist und $\varphi_n(m')$ wahr ist, ist nach (7.17) auch $\varphi_n(m)$ wahr.
Also gilt laut Festsetzung (7.21), dass $\varphi_n[m] = \varphi_{n'}[m]$ und somit

$$\rho(m, \varphi_n[m]) = \rho(m, \varphi_{n'}[m]). \tag{7.25}$$

Aus (7.23), (7.24) und (7.25) folgt aber $\qquad \varphi_{n'}[m'] = \rho(m, \varphi_{n'}[m]),$ wie verlangt.

2. $m' = n'$ ist wahr. Dann gilt nach Axiom (P4): $\qquad m = n.$ (7.26)

Wegen $m' = n'$ ist nun $\qquad \varphi_{n'}[m'] = \varphi_{n'}[n'],$ (7.27)

und laut Festsetzung (7.22) ist $\qquad \varphi_{n'}[n'] = \rho(n, \varphi_n[n]).$ (7.28)

Da $\varphi_n(n)$ für das n-taugliche φ_n wegen (7.18) wahr ist, wurde $\varphi_{n'}[n]$ mittels Festsetzung (7.21) definiert, also gilt $\varphi_n[n] = \varphi_{n'}[n]$, und wegen (7.26) ist Letzteres $= \varphi_{n'}[m]$, insgesamt also $\varphi_n[n] = \varphi_{n'}[m]$, so dass auch $\rho(n, \varphi_n[n]) = \rho(n, \varphi_{n'}[m])$.

Wegen (7.26) folgt daraus: $\qquad \rho(n, \varphi_n[n]) = \rho(m, \varphi_{n'}[m]).$ (7.29)

Aus (7.27), (7.28) und (7.29) folgt aber $\qquad \varphi_{n'}[m'] = \rho(m, \varphi_{n'}[m]),$ wie verlangt.

Damit ist insgesamt gezeigt, dass $\varphi_{n'}(x)$ eine n'-taugliche Formel ist, der Induktionsschritt ist abgeschlossen und Lemma 1 durch vollständige Induktion bewiesen.

Lemma 2 Seien $\widehat{\varphi}(x)$ und $\varphi(x)$ Anfangsformeln, und sei $\varphi(0)$ sowie $\widehat{\varphi}(0)$ wahr. Ferner sei für alle Zahlen n, für die $\varphi(n)$ wahr ist, ein Zielobjekt $\varphi[n]$ festgesetzt, und ebenso für alle Zahlen n, für die $\widehat{\varphi}(n)$ wahr ist, ein Zielobjekt $\widehat{\varphi}[n]$ festgesetzt, derart dass

$$\varphi[0] = a, \tag{7.30}$$

$$\varphi[n'] = \rho(n, \varphi[n]) \qquad \text{für alle Zahlen } n, \text{ für die } \varphi(n') \text{ wahr ist,}^{15} \tag{7.31}$$

und entsprechend

$$\widehat{\varphi}[0] = a, \tag{7.32}$$

$$\widehat{\varphi}[n'] = \rho(n, \widehat{\varphi}[n]) \qquad \text{für alle Zahlen } n\text{, für die } \widehat{\varphi}(n') \text{ wahr ist.} \tag{7.33}$$

Dann gilt für alle Zahlen n, für die zugleich $\varphi(n)$ *und* $\widehat{\varphi}(n)$ *wahr ist, dass* $\varphi[n] = \widehat{\varphi}[n]$.

Beweis von Lemma 2. Das Lemma muss offenbar gelten, wenn wir zeigen können, dass alle Zahlen n die Eigenschaft haben, dass mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist:

---

[12] Da φ_n n-tauglich ist, ist $\varphi_n(n)$ wegen (7.18) wahr, also ist ein Zielobjekt mit Namen $\varphi_n[n]$ schon festgesetzt.

[13] Dies gilt wegen (7.18), weil φ_n nach VORAUSSETZUNG eine n-taugliche Anfangsformel ist.

[14] Genauer gilt dies wegen (7.20), weil φ_n nach VORAUSSETZUNG eine n-taugliche Anfangsformel ist.

[15] Für diese n muss (wegen 7.17) auch $\varphi(n)$ wahr sein, so dass ein Zielobjekt $\varphi[n]$ gewählt wurde und somit auch $\rho(n, \varphi[n])$ ein wohldefiniertes Zielobjekt bezeichnet.

$\varphi(n)$ und $\widehat{\varphi}(n)$ sind nicht beide wahr, oder
$\varphi[n] = \widehat{\varphi}[n]$.

Wann immer dann nämlich zugleich $\varphi(n)$ und $\widehat{\varphi}(n)$ wahr sind, ist die erste Aussage falsch und daher muss die zweite, nämlich $\varphi[n] = \widehat{\varphi}[n]$ gelten, so wie es das Lemma verlangt.
Dass nun jede Zahl n in der Tat diese Eigenschaft hat, zeigen wir durch vollständige Induktion.
INDUKTIONSANFANG. Wegen (7.30) und (7.32) gilt $\varphi[0] = \widehat{\varphi}[0]$.
INDUKTIONSSCHLUSS. VORAUSSETZUNG: Eine Zahl n hat bereits die genannte Eigenschaft, d. h. mindestens eine der folgenden Aussagen ist für n wahr:

(a) $\varphi(n)$ und $\widehat{\varphi}(n)$ sind nicht beide wahr,
oder: (b) $\varphi[n] = \widehat{\varphi}[n]$.

Zu zeigen ist, dass mindestens eine der folgenden Aussagen gilt:
(c) $\varphi(n')$ und $\widehat{\varphi}(n')$ sind nicht beide wahr,
oder: (d) $\varphi[n'] = \widehat{\varphi}[n']$.

Nun können wir zwei Fälle betrachten. Fall 1: Es gilt Aussage (c). Dann sind wir fertig. Fall 2: Es gilt Aussage (c) nicht, d. h. die Aussagen $\varphi(n')$ und $\widehat{\varphi}(n')$ *sind beide wahr*. Wir müssen nun zeigen, dass (d) gilt, also $\varphi[n'] = \widehat{\varphi}[n']$ ist. Da φ eine Anfangsformel ist, folgt wegen (7.17) aus der Wahrheit von $\varphi(n')$ auch die Wahrheit von $\varphi(n)$, und analog folgt, dass auch $\widehat{\varphi}(n)$ wahr ist. So ist (a) falsch und es muss (b) gelten: $\varphi[n] = \widehat{\varphi}[n]$.

Wegen (7.31) ist nun $$\varphi(n') = \rho(n, \varphi[n]). \tag{7.34}$$
Wegen $\varphi[n] = \widehat{\varphi}[n]$ folgt weiter $$\rho(n, \varphi(n)) = \rho(n, \widehat{\varphi}[n]). \tag{7.35}$$
Wegen (7.33) gilt schließlich $$\rho(n, \widehat{\varphi}[n]) = \widehat{\varphi}[n']. \tag{7.36}$$
Aus (7.34), (7.35) und (7.36) folgt also in der Tat $$\varphi[n'] = \widehat{\varphi}[n'].$$

Damit ist der Induktionsbeweis beendet und Lemma 2 bewiesen. Nun kommen wir zum eigentlichen

Existenzbeweis für den Rekursionssatz. Gemäß Lemma 1 existiert zu jeder Zahl n eine n-taugliche Anfangsformel φ_n, und für jede n-tauglich Anfangsformel und jede Zahl k, für welche $\varphi_n(k)$ wahr ist, bezeichnet $\varphi_n[k]$ ein Zielobjekt, derart dass (7.18), (7.19) und (7.20) erfüllt sind. Da nun zu den Zahlen k, für welche $\varphi_n(k)$ wahr ist, wegen Eigenschaft (7.18) immer die Zahl n dazugehört, ist stets ein Zielobjekt $\varphi_n[n]$ festgelegt. Wir denken uns nun zu jeder Zahl n eine n-taugliche Anfangsformel φ_n ausgewählt, und können alsdann eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$, die jede Zahl n auf ein Zielobjekt wirft, durch die Bestimmung festlegen, dass f jede Zahl n auf $\varphi_n[n]$ werfen soll, denn nach dem Komprehensionstheorem für Funktionen 5.10.55 S. 140 existiert solch eine (eventuell unmengenwertige) Funktion.[16] also

$$f(n) := \varphi_n[n] \text{ für alle } n \text{ aus } \mathbb{N}. \tag{7.37}$$

Wegen (7.37) gilt nun $f(0) = \varphi_0[0]$, was nach (7.19) $= a$ ist. Nun ist noch zu zeigen, dass $f(n') = \rho(n, f(n))$.

Wegen (7.37) gilt für jede Zahl n, dass $$f(n') = \varphi_{n'}[n'], \tag{7.38}$$
und da $\varphi_{n'}(n')$ nach (7.18) wahr ist, gilt nach (7.20) $$\varphi_{n'}[n'] = \rho(n, \varphi_{n'}[n]). \tag{7.39}$$

Da $\varphi_{n'}(x)$ eine Anfangsformel ist, ist $\varphi_{n'}(n')$ wahr und wegen (7.17) auch $\varphi_{n'}(n)$ wahr. Da $\varphi_n(x)$ ebenfalls eine Anfangsformel ist, gilt wegen (7.18), dass auch $\varphi_n(n)$ wahr ist. Da demnach sowohl $\varphi_{n'}(n)$ als auch $\varphi_n(n)$ wahr ist, folgt gemäß Lemma 2, dass $\varphi_{n'}[n] = \varphi_n[n]$.

Also gilt $$\rho(n, \varphi_{n'}[n]) = \rho(n, \varphi_n[n]). \tag{7.40}$$
Nach (7.37) gilt $\varphi_n[n] = f(n)$. Daraus folgt $$\rho(n, \varphi_n[n]) = \rho(n, f(n)). \tag{7.41}$$

Aus (7.38), (7.39), (7.40) und (7.41) folgt schließlich $$f(n') = \rho(n, f(n)). \ \square$$

[16] Aufgrund von Lemma 2 würden wir übrigens genau dieselbe Funktion f erhalten, wenn wir für eine Zahl n anstelle der n-taugliche Anfangsformel $\varphi_n(x)$ irgendeine andere n-taugliche Anfangsformel $\widehat{\varphi}_n(x)$ gewählt hätten: Denn es gilt dann $\varphi_n(n) = \widehat{\varphi}_n(n)$.

Theorem 5.16.19 S. 216

Für Zahlen m, n gilt:

(Addition mit 0)	$n+0$	$=$	n	$=$	$0+n.$	(5.121)
(Addition mit 1)	$n+1$	$=$	n'	$=$	$1+n.$	(5.122)
(Nachfolger einer Zahl als Addend)	$m+(n+1)$		$=$		$(m+n)+1.$	(5.123)

Beweis von (5.121). Es gilt $n+0=n$ wegen (5.119 S. 216). Zu zeigen bleibt, dass $n=0+n$.
Wie vollständige Induktion zeigt, hat in der Tat jede Zahl n die Eigenschaft, dass $n=0+n$:

Induktionsanfang. $0=0+0$ ergibt sich aus (5.119 S. 216), indem wir dort für m die Zahl 0 einsetzen.

Induktionsschluss. Voraussetzung: Sei $n=0+n$. Nun gilt wegen (5.120 S. 216), dass $0+n'=(0+n)'$. Wegen der Voraussetzung können wir in dieser Gleichung $0+n$ durch n ersetzen und erhalten $0+n'=n'$.

Beweis von (5.122). Nach Definition ist $1=0'$, daher gilt $n+1=n+0'$. Weiter gilt wegen (5.120) $n+0'=(n+0)'$. Weiter muss $(n+0)'=n'$ gelten, weil $n+0$ wegen (5.121) dasselbe wie n ist. Zu zeigen bleibt, dass auch $n'=1+n$ gilt. Dies zeigen wir durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang. Es gilt $0'=1$ nach Definition von 1, und weiter $1=1+0$ wegen (5.121 S. 216).

Induktionsschluss. Voraussetzung: Sei $n'=1+n$. Dann ist n'' dasselbe wie $(1+n)'$, was nach (5.120) wieder mit $1+n'$ identisch ist, insgesamt gilt also $n''=1+n'$.

Beweis von (5.123). Wegen (5.122) kann man für den Nachfolger n' einer Zahl n auch $n+1$ schreiben. Tut man dies in der Rekursionsformel $m+n'=(m+n)'$, so erhält man (5.123). □

Theorem 5.16.21 S. 217

Für Zahlen k, m, n gilt stets:

(Assoziativität)		$(k+m)+n=k+(m+n)$	(5.125)
(Kommutativität)		$m+n=n+m$	(5.126)
(Nullsummensatz)	Wenn nicht $m=n=0$, so	$m+n\neq 0$	(5.127)
(Regularität)	Für höchstens eine Zahl x ist	$m+x=n$	(5.128)

Beweis von (5.125) durch Induktion über n bei festem k und m. Induktionsanfang. $(k+m)+0$ ist mit $k+(m+0)$ identisch, denn beides ist wegen (5.121) dasselbe wie $k+m$.
Induktionsschritt. Voraussetzung: Für ein n sei $(k+m)+n=(k+m)+n$. Zu zeigen ist, dass $(k+m)+n'=k+(m+n')$. In der Tat gilt

$$(k+m)+n' \underset{(5.120\ S.216)}{=} ((k+m)+n)' \underset{\text{Vor}}{=} (k+(m+n))' \underset{(5.120)}{=} k+(m+n)' \underset{(5.120)}{=} k+(m+n').$$

Beweis von (5.126) durch Induktion über n bei festem m. Induktionsanfang. $m+0 \underset{(5.121)}{=} 0+m$.
Induktionsschluss. Voraussetzung: $m+n=n+m$. Zu zeigen: $m+(n+1)=(n+1)+m$.

$$m+(n+1) \underset{(5.123)}{=} (m+n)+1 \underset{\text{Vor}}{=} (n+m)+1 \underset{(5.123)}{=} n+(m+1) \underset{(5.122)}{=} n+(1+m) \underset{(5.125)}{=} (n+1)+m.$$

Beweis von (5.127). Der Satz ist unter der Voraussetzung formuliert, dass nicht $m=n=0$ gilt, d. h. von den Aussagen $m\neq 0$ und $n\neq 0$ ist mindestens einer wahr. Fall 1: Sei $m\neq 0$ Vorausgesetzt, d. h. der «linke Summand» in $m+n$ sei von Null verschieden. Dann zeigt sich durch Induktion über n bei festem m, dass alle Zahlen n die Eigenschaft $m+n\neq 0$ haben.
Induktionsanfang. $m+0 \underset{(5.121)}{=} m \underset{\text{Vor}}{\neq} 0$. Induktionsschluss. $m+(n+1) \underset{(5.123)}{=} (n+m)+1 \underset{\text{Axiom (P3)}}{\neq} 0$.

Fall 2: Sei $n \neq 0$, d. h. der «rechte Summand» in $m + n$ sei von Null verschieden. Wegen (5.126) gilt $m + n = n + m$, und in $n + m$ ist nun der «linke Summand» von Null verschieden, so dass aus dem schon abgehandelten Fall 1 folgt, dass $n + m$ und damit auch $m + n$ von Null verschieden ist.

Beweis von (5.128). Wir zeigen durch Induktion über m, dass es für jede Zahl n stets höchstens ein x gibt mit $m + x = n$.
Induktionsanfang. Für jede Zahl n gibt es höchstens eine Zahl x mit $0 + x = n$. Liegen nämlich Zahlen x, y vor mit $0 + x = n$ und $0 + y = n$, so folgt $x \underset{(5.121)}{=} 0 + x = n = 0 + y \underset{(5.121)}{=} y$.
Induktionsschluss. Voraussetzung. Für jede Zahl n gibt es höchstens eine Zahl x mit $m + x = n$, d. h. wann immer x, y Zahlen sind mit $m + x = n$ und $m + y = n$ so folgt stets $x = y$. Sei nun ν eine Zahl und seien ξ und η Zahlen mit $(m + 1) + \xi = \nu$ und $(m + 1) + \eta = \nu$. Zu zeigen ist $\xi = \eta$. Nun folgt $(m+\xi)+1 \underset{(5.126)}{=} (\xi+m)+1 \underset{(5.123)}{=} \xi+(m+1) \underset{(5.126)}{=} (m+1)+\xi = \nu = (m+1)+\eta \underset{(5.126)}{=} \eta+(m+1) \underset{(5.123)}{=} (\eta+m)+1 \underset{(5.126)}{=} (m+\eta)+1$. Wegen Axiom (P4) folgt daraus $m+\xi = m+\eta$. Für die Zahl $n := m+\xi$ gilt also $m + \xi = n$ und $m + \eta = n$. Daraus folgt nach Voraussetzung $\xi = \eta$. □

Theorem 5.16.27 S. 219

$\langle \mathbb{N}, < \rangle$ ist eine Vollordnung: $<$ ist irreflexiv, transitiv und linear.

Beweis der Irreflexivität. Zu zeigen ist, dass für keine Zahl n gilt: $n < n$. Angenommen, dies wäre für n der Fall. Dann gibt es eine 0 verschiedene Zahl k mit $n + k = n$. Zugleich gilt aber $n + 0 = n$. Wegen der (5.128) kann es nun aber *höchstens ein* x geben mit $n + x = n$: Doch nun wären 0 und k *zwei* verschiedene solche x. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war, also gilt *nicht* $n < n$.

Beweis der Transitivität. Zu zeigen ist: Aus $k < m < n$ folgt $k < n$.

Wegen $k < m$ gibt es eine von Null verschiedene Zahl x_1 mit $$k + x_1 = m. \tag{7.42}$$
Wegen $m < n$ gibt es eine von Null verschiedene Zahl x_1 mit $$m + x_2 = n. \tag{7.43}$$

Dann ist $(x_1 + x_2)$ eine Zahl, die wegen (5.127) ebenfalls von Null verschieden ist
und es gilt $k + (x_1 + x_2) \underset{(5.125)}{=} (k + x_1) + x_2 \underset{(7.42)}{=} m + x_2 \underset{(7.43)}{=} n$. Somit gilt $k < n$.
Da nun Irreflexivität und Transitivität bewiesen ist, ist $<$ zumindest eine Halbordnung (siehe S. 173–176). Gemäß der Erläuterung auf S. 174 können daher die Zeichen $>$, $\leq$ und $\geq$ als eingeführt gelten, und es gelten für $<$ und $\leq$ die in Theorem 5.13.3 S. 174 bereitgestellten Aussagen, insbesondere das gemischte Transitivitätsgesetz: Aus $k \leq m < n$ folgt ebenso wie aus $k < m \leq n$, dass $k < n$, was wir im Folgenden benutzen.

Beweis der Linearität. Wir zeigen für ein gegebenes m durch Induktion über n, dass für jede Zahl n mindestens eine der drei Alternativen $m < n$ oder $n < m$ oder $n = m$ wahr sein muss.
Induktionsanfang. Zu zeigen ist: Es gilt mindestens eine der Formeln $m < 0$ oder $0 < m$ oder $0 = m$. Nun ist m entweder von 0 verschieden oder nicht. Ist m von 0 verschieden, so bedeutet die (nach 5.121 gültige) Gleichung $0 + m = m$, dass $0 < m$. Ist aber m von 0 nicht verschieden, gilt $m = 0$.
Induktionsschluss. Voraussetzung: Für n gelte $n < m$ oder $m < n$ oder $n = m$.
Zu zeigen ist: es gilt mindestens eine der Alternativen:

(a) $n + 1 < m$
(b) $m < n + 1$
(c) $n + 1 = m$

Falls $m = n$ oder $m < n$, gilt $m \leq n$. Außerdem gilt (nach Lemma 5.16.26 S. 218) $n < n + 1$, insgesamt also $m \leq n < n + 1$, und per gemischter Transitivität folgt $m < n + 1$, also gilt Alternative (b).
Es bleibt noch der Fall, dass $n < m$. Es gibt dann ein von Null verschiedenes x mit

$$n + x = m. \tag{7.44}$$

Wegen $x \neq 0$ ist x Nachfolger einer Zahl y (Theorem 5.16.13 S. 213), d. h. es gibt ein y, so dass

$$x = y + 1. \tag{7.45}$$

Falls $y = 0$, bedeutet (7.45), dass $x = 0 + 1$, also $x = 1$ ist, und dann bedeutet (7.44), dass $n + 1 = m$, so dass Alternative (c) gilt.
Falls aber $y \neq 0$, beachten wir, dass $(n + 1) + y \underset{(5.125)}{=} n + (1 + y) \underset{(5.126)}{=} n + (y + 1) \underset{(7.45)}{=} n + x \underset{(7.44)}{=} m$, also gilt $(n + 1) + y = m$, und wegen $y \neq 0$ folgt $n + 1 < m$. So gilt jetzt Alternative (a). □

Lemma 5.16.29 S. 219

Für Zahlen m, n gilt: $(m < n + 1) \Leftrightarrow (m \leq n)$ (5.133)
Für Zahlen k, ℓ gilt: $(k < \ell) \Leftrightarrow (k + 1 \leq \ell)$. (5.134)

Beweis von (5.133). Sei zuerst $m \leq n$ als wahr VORAUSGESETZT. Zusammen mit $n < n+1$ (Lemma 5.16.26 S. 218) gilt dann $m \leq n < n + 1$, also $m < n + 1$ per gemischter Transitivität.
Sei nun $m < n + 1$ als wahr vorausgesetzt. Dann gibt es eine von Null verschiedene Zahl ξ mit

$$m + \xi = n + 1. \tag{7.46}$$

Da ξ nicht Null ist, ist ξ wegen Theorem 5.16.13 S. 213 Nachfolger einer Zahl ν, so dass

$$\xi = \nu + 1. \tag{7.47}$$

Es folgt $1 + (m + \nu) \underset{(5.126)}{=} (m + \nu) + 1 \underset{(5.125)}{=} m + (\nu + 1) \underset{(7.47)}{=} m + \xi \underset{(7.46)}{=} n + 1 \underset{(5.126)}{=} 1 + n$.
Damit sind also $1 + (m + \nu)$ sowie $1 + n$ ein und dieselbe Zahl. Nennen wir diese eine Zahl k, gilt also sowohl $1 + (m + \nu) = k$ als auch $1 + n = k$. Nun gibt es aber wegen (5.128) *nur ein* x mit $1 + x = k$. Infolgedessen müssen $m + \nu$ und n identisch sein: Es gilt

$$m + \nu = n. \tag{7.48}$$

Ist nun $\nu \neq 0$, so bedeutet (7.48), dass $m < n$. Ist aber $\nu = 0$, so bedeutet (7.48) wegen (5.121), dass $m = n$. In jedem Fall ist also $m \leq n$.

Beweis von (5.134). Sei $k < \ell$. ANGENOMMEN, $k + 1 \leq \ell$ gilt nicht, so muss wegen Trichotomie von $<$ gelten, dass $\ell < k + 1$ und es folgt aus (5.133), dass $\ell \leq k$. Zusammen mit der Voraussetzung $k < \ell$ erhalten wir dann aber per gemischter Transitivität $\ell < \ell$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$. Die ANNAHME ist also falsch und es muss $k + 1 \leq \ell$ gelten.
Sei nun $k+1 \leq \ell$ VORAUSGESETZT. Nach Lemma 5.16.26 S. 218 gilt $k < k+1$, und da nach VORAUSSETZUNG $k + 1 \leq \ell$ gilt, folgt mittels gemischter Transitivität $k < \ell$. □

Theorem 5.16.35 S. 220

Für verschiedene Zahlen m und n sind die Abschnitte $\mathtt{Ab}(m)$ und $\mathtt{Ab}(n)$ *nicht* gleichmächtig. Ist $m < n$, so gilt vielmehr $\mathtt{Ab}(m) \prec Ab(n)$.

Beweis. Zunächst zeigt Induktion über n, dass $\mathtt{Ab}(n)$ mit keinem $\mathtt{Ab}(m)$ für $m \neq n$ gleichmächtig ist:

INDUKTIONSANFANG. Nach Korollar 5.16.32 S. 220 ist $\mathtt{Ab}(0)$ leer, während $\mathtt{Ab}(m)$ für $m \neq 0$ nichtleer ist. Daher sind wegen Theorem 5.12.9 S. 166 $\mathtt{Ab}(0)$ und $\mathtt{Ab}(m)$ nicht gleichmächtig.

INDUKTIONSSCHLUSS. VORAUSSETZUNG. $\mathtt{Ab}(n)$ ist mit keinem $\mathtt{Ab}(m)$ für $n \neq m$ gleichmächtig.
Zu zeigen ist, dass $\mathtt{Ab}(n + 1)$ ist mit keinem $\mathtt{Ab}(m)$ für $n + 1 \neq m$ gleichmächtig ist.
Sei das Gegenteil ANGENOMMEN, dass also $\mathtt{Ab}(n + 1) \sim \mathtt{Ab}(m)$ für ein m mit $n + 1 \neq m$ gilt. Da wegen Axiom (P3) $n + 1$ von Null verschieden ist, folgt aus Korollar 5.16.32 S. 220, dass $\mathtt{Ab}(n + 1)$ nichtleer ist. Aus $\mathtt{Ab}(n + 1) \sim \mathtt{Ab}(m)$ folgt also gemäß Theorem 5.12.9 S. 166, dass auch $\mathtt{Ab}(m)$ nichtleer ist, also m einen Vorgänger hat, und da 0 nach (5.137 S. 219) keinen Vorgänger hat, ist $m \neq 0$. Also gibt es wegen Theorem 5.16.13 S. 213 eine Zahl μ, so dass $m = \mu + 1$. Infolgedessen können wir nun die ANNAHME auch so formulieren: $\mathtt{Ab}(n + 1) \sim \mathtt{Ab}(\mu + 1)$, wobei $n + 1 \neq \mu + 1$. Da wir nach Theorem 5.16.33 S. 220 für $\mathtt{Ab}(n + 1)$ auch $\mathtt{Ab}(n) \cup \{n\}$ schreiben können, und ebenso $\mathtt{Ab}(\mu) \cup \{\mu\}$ für $\mathtt{Ab}(\mu + 1)$, folgt aus der ANNAHME, dass

$\mathtt{Ab}(n) \cup \{n\} \sim \mathtt{Ab}(\mu) \cup \{\mu\}$. Daraus folgt aber nach Korollar 5.12.6 S. 166, dass auch $\mathtt{Ab}(n) \sim \mathtt{Ab}(\mu)$, wobei wegen $n+1 \neq \mu+1$ und Axiom (P4) auch $n \neq \mu$ ist. Es ist also $\mathtt{Ab}(n) \sim \mathtt{Ab}(\mu)$ für ein von n verschiedenes μ, was der VORAUSSETZUNG widerspricht. So war die ANNAHME falsch und der Induktionsbeweis ist abgeschlossen.

Nun ist noch die zweite Behauptung zu beweisen. Sei $m < n$. Weil wegen der Transitivität von $<$ alle Vorgänger von m erst recht solche von n sind, gilt dann $\mathtt{Ab}(m) \subseteq \mathtt{Ab}(n)$. Daraus folgt gemäß (5.89 S. 200), dass $\mathtt{Ab}(m) \precsim \mathtt{Ab}(n)$. Da nach dem schon bewiesenen Teil des Satzes außerdem *nicht* $\mathtt{Ab}(m) \sim \mathtt{Ab}(n)$ gilt, folgt (wegen Satz 5.88 S. 200), dass $\mathtt{Ab}(m) \prec \mathtt{Ab}(n)$. □

Theorem 5.16.36 S. 220

$\langle \mathbb{N}, < \rangle$ ist wohlgeordnet, insbesondere hat jede nichtleere Teilklasse von $\mathbb{N}$ ein Minimum.

Beweis. Da $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ nach Theorem 5.16.27 S. 219 bereits eine vollgeordnete Klasse ist und gemäß Theorem 5.16.33 S. 220 jeder Abschnitt von $\mathbb{N}$ eine Menge ist, müssen wir nach Definition 5.13.26 S. 183 nur noch nachweisen, dass jede nichtleere Teilklasse C von $\mathbb{N}$ ein Minimum besitzt. Sei also C eine vorgegebene nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$. Wir zeigen nun durch Induktion, dass für jede Zahl n mindestens eine der folgenden Aussagen (a) oder (b) wahr ist:

(a) Alle Elemente von C sind größer als n, (b) C besitzt ein Minimum.

Ist dies nämlich für jedes n erwiesen, so können wir als n auch irgendein Element der nichtleeren Teilklasse C wählen; für dieses n aber nicht (a) gelten (sonst müsste n größer als n sein), also gilt (b), und C hat daher ein Minimum.

INDUKTIONSANFANG. Entweder ist $0 \in C$ oder nicht. Ist $0 \in C$, so muss die Zahl 0, die ja nach Theorem 5.16.28 S. 219 die kleinste Zahl überhaupt ist, auch das Minimum von C sein. Also gilt dann (b). Ist aber $0 \notin C$, müssen alle Elemente von C größer als 0 sein. Also gilt dann (a).

INDUKTIONSSCHLUSS. Sei VORAUSGESETZT, dass für eine Zahl n von den Aussagen (a) oder (b) mindestens eine gilt. Zu zeigen ist, dass dann mindestens eine der folgenden Aussagen wahr ist:

(a^*) Alle Elemente von C sind größer als $n+1$, (b^*) C besitzt ein Minimum.

Wenn nun nicht alle Elemente von C größer als n sind, ist (a) falsch, also gilt nach VORAUSSETZUNG die Aussage (b), und diese ist mit Aussage (b^*) identisch.
Im Weiteren machen wir daher die ZWEITE VORAUSSETZUNG, dass alle Elemente von C größer als n sind. Entweder sind nun alle Elemente von C sogar größer als $n+1$: Dann gilt (a^*).
Oder wir können ein Element c von C wählen, das nicht größer als $n+1$ ist. Dann gilt entweder $c < n+1$ oder $c = n+1$. Nun kann aber $c < n+1$ nicht zutreffen, denn die Elemente von C sind nach unserer ZWEITEN VORAUSSETZUNG größer als n und können daher wegen Theorem 5.16.30 S. 219 nicht kleiner als $n+1$ sein. Also trifft $c = n+1$ zu, und da, wie eben festgestellt, die Elemente von C nicht kleiner als $n+1$ sein können, ist nun das mit $n+1$ identische c das Minimum von C. Also gilt dann (b^*). □

Theorem 5.16.42 S. 222

Für n aus ω gilt: Alle Elemente von n' sind zugleich Teilmengen von n.

Beweis. Sei E die Klasse, deren Elemente diejenigen Zahlen n sind, für welche diese Behauptung gilt. Wenn wir zeigen, dass E vor-induktiv ist, folgt aus Theorem 5.16.41 S. 222, dass $\omega \subseteq E$ gilt und somit für *jedes* Element n von ω die Behauptung gilt. Wir müssen also nur zeigen, dass E vor-induktiv ist.
(a) Hierzu ist zunächst zu zeigen, dass $\emptyset \in E$ ist, also $\emptyset$ die Eigenschaft hat, dass alle Elemente von $\emptyset'$ Teilmengen von $\emptyset$ sind. Nun ist wegen Theorem 5.16.33 S. 220 $\emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$, also ist $\emptyset$ das einzige Element von $\emptyset'$. Dieses eine Element, die leere Menge $\emptyset$, ist aber nach (5.14 S. 120) auch Teilmenge von $\emptyset$.
(b) Sei nun $n \in E$ vorausgesetzt. Dann ist zu zeigen, dass auch $n' \in E$. Wegen $n \in E$ ist n eine Zahl, liegt also in ω, und weil ω vor-induktiv ist, liegt dann auch n' in ω, ist also eine Zahl. Zu zeigen bleibt somit nur noch, dass jedes Element x von n'' zugleich eine Teilmenge von n' ist. Nun gilt (wegen Theorem 5.16.33) $n'' = n' \cup \{n'\}$. Wir unterscheiden also die Fälle $x \in n'$ und $x \in \{n'\}$.

Fall 1: $x \in n'$. Wegen $n \in E$ ist das Element x von n' Teilmenge von n, und da n Teilmenge der Menge $n \cup \{n\}$ ist, welche $= n'$ ist, gilt insgesamt $x \subseteq n \subseteq n'$, also auch $x \subseteq n'$.
Fall 2: $x \in \{n'\}$. Dann muss x mit dem einzigen Element n' von $\{n'\}$ identisch sein, also $x = n'$. Wir können daher in der wahren Aussage $n' \subseteq n'$ das erste n' durch x ersetzen und erhalten $x \subseteq n'$. □

Zum Zermeloschen Modell der Arithmetik (5.16.49 S. 225)

Sei Z (im Standardmodell der Arithmetik) rekursiv definiert durch $Z\colon \omega \longrightarrow \mathbb{M}$, $Z(0) := \emptyset$, $Z(n') := \{Z(n)\}$, und seien die Begriffe «Zahl», «Nachfolger» und «Null» wie folgt festgelegt:
- «Zahlen» sind die Werte von Z, d. h. die Mengen $Z(n)$ für $n \in \omega$,
- «Null» ist $\emptyset$, und der
- «Nachfolger» einer «Zahl» x ist stets $\{x\}$.

Mit diesen Festlegungen gelten die Peanoschen Axiome.

Beweis. Zu (P1). $\emptyset$ ist eine «Zahl», denn $\emptyset = Z(0)$.
Zu (P2). Sei x eine «Zahl», dann gilt für ein n aus ω, dass $x = Z(n)$. Zu zeigen ist, dass $\{x\}$ ebenfalls eine «Zahl» ist. In der Tat ist dann $\{x\} = \{Z(n)\} = Z(n')$ mit n' aus ω.
Zu (P3). Zu zeigen ist: Für keine «Zahl» x ist $\{x\} = \emptyset$. Das gilt, weil $\{x\}$ nichtleer ist, $\emptyset$ aber leer.
Zu (P4): Für verschiedene «Zahlen» m und n ist zu zeigen, dass deren «Nachfolger» verschieden sind. In der Tat folgt aus $m \neq n$ stets, dass $\{n\} \neq \{m\}$.
Zu (P5): Habe eine Klasse C die Eigenschaften (a), dass sie die $\emptyset$ enthält, und (b), dass sie mit jeder «Zahl» x auch deren «Nachfolger» $\{x\}$ enthält. Zu zeigen ist, dass C alle «Zahlen» enthält. Sei nun $C^* := \{n \mid n \in \omega \text{ und } Z(n) \in C\}$, d. h. C^* ist die Teilklasse von ω, die genau diejenigen Zahlen n des Standardmodells enthält, für die $Z(n) \in C$ gilt. Dann ist C^* im Standardmodell induktiv. Denn erstens ist $0 \in C^*$, da $0 \in \omega$ und $Z(0)(= \emptyset)$ wegen Eigenschaft (a) von C ein Element von C ist. Und wenn zweitens $n \in C^*$ gilt, also $n \in \omega$ und $Z(n) \in C$ ist, so ist auch $n' \in \omega$ und wegen der Eigenschaft (b) von C außerdem $\{Z(n)\} \in C$, wofür wir wegen $Z(n') = \{Z(n)\}$ auch $Z(n') \in C$ schreiben können; also gilt $n' \in C^*$. Da somit C^* induktiv ist, gehört jede Zahl n des Standardmodells zu C^*. Das aber heißt: $Z(n)$ ist für jedes n aus ω ein Element von C. Oder anders gesagt: Alle «Zahlen» des Zermeloschen Modells gehören zu C. □

Zum Fregeschen Modell der Arithmetik (5.16.50 S. 225)

Es seien die Begriffe «Zahl», «Nachfolger» und «Null» wie folgt festgelegt:
- «Zahlen» sind die Mengenstufen Neumannscher Zahlen: die $\llbracket n \rrbracket$ mit $n \in \omega$,
- Die «Null» ist $\llbracket 0 \rrbracket$, das ist $\{\emptyset\}$, und der
- «Nachfolger» einer «Zahl» $\llbracket n \rrbracket$ ist $\llbracket n' \rrbracket$.

Damit ist ein Quasi-Modell der Arithmetik festgelegt.

Beweis. Zu (P1). $\llbracket 0 \rrbracket$ ist eine «Zahl», da $0 \in \omega$.
Zu (P2). Der «Nachfolger» einer «Zahl» $\llbracket n \rrbracket$ ist schon per Definition eine «Zahl», nämlich $\llbracket n' \rrbracket$.
Zu (P3). Der «Nachfolger» $\llbracket n' \rrbracket$ einer «Zahl» $\llbracket n \rrbracket$ ist niemals «Null», denn wegen Theorem 5.16.33 S. 220 ist $\llbracket n' \rrbracket = \llbracket n \cup \{n\} \rrbracket$, und das ist eine Mengenstufe, auf der die nichtleere Menge $n \cup \{n\}$ liegt, während auf $\llbracket 0 \rrbracket$ nur die leere Menge liegt.
Zu (P4). Seien $\llbracket m \rrbracket$ und $\llbracket n \rrbracket$ verschiedene «Zahlen», also verschiedene Mengenstufen. Dann liegen also m und n auf verschiedenen Mengenstufen und sind daher verschieden. Wegen der Gültigkeit von (P4) für Neumannsche Zahlen folgt dann, dass n und m verschiedene Neumannsche Nachfolger m' und n' haben. Nach Theorem 5.16.48 S. 224 können aber die beiden verschiedenen Neumannschen Zahlen m' und n' nicht auf ein und derselben Mengenstufe liegen, d. h. es gilt $\llbracket n' \rrbracket \neq \llbracket m' \rrbracket$.
Zu (P5, Formelversion). Sei $\varphi(x)$ eine Formel, derart dass $\varphi(\llbracket 0 \rrbracket)$ gilt und immer dann, wenn $\varphi(\llbracket n \rrbracket)$ für eine «Zahl» $\llbracket n \rrbracket$ zutrifft, auch $\varphi(\llbracket n' \rrbracket)$ gilt. Zu zeigen ist, dass $\varphi(\mathfrak{N})$ für jede «Zahl» $\mathfrak{N}$ gilt. Sei nun C die Klasse aller Neumannschen Zahlen n, für die $\varphi(\llbracket n \rrbracket)$ gilt. Diese ist bezüglich des Neumannschen Modells induktiv (Es ist nämlich $0 \in C$, weil ja $\varphi(\llbracket 0 \rrbracket)$ gilt, und wenn $n \in C$ ist, also $\varphi(\llbracket n \rrbracket)$ gilt, gilt nach Voraussetzung auch $\varphi(\llbracket n' \rrbracket)$, das heißt $n' \in C$), enthält also alle Neumannschen Zahlen n. Daher gilt $\varphi(\llbracket n \rrbracket)$ für jede Neumannsche Zahl, das aber heißt: $\varphi(\mathfrak{N})$ gilt für jede «Zahl». Also gelten die Peanoschen Axiome mit (P5) in der Formelversion.

Doch liegt nur ein *Quasi*-Modell vor, weil sich unter den «Zahlen» Unmengen befinden: Beispielsweise ist nach Theorem 5.12.17 S. 171 die «Zahl» $\llbracket 1 \rrbracket$ eine solche. □

Theorem 5.16.55 S. 229

Sei $\sqsubset$ eine Ordnungsrelation [d. h. irreflexive und transitive Relation] mit nichtleerem Feldbereich ohne maximales Element. Sei ein Feldobjekt 0^* ausgewählt, und zu jedem Feldobjekt a sei ein Feldobjekt a^+ mit $a \sqsubset a^+$ festgelegt. Darauf aufbauend sei festgelegt:

- «Zahlen» sind die Werte der wie folgt im Standardmodell rekursiv definierten Funktion:
  f wirft NEUMANNsche Zahlen auf Feldobjekte von $\sqsubset$, $f(0) := 0^*$ und $f(n+1) := f(n)^+$,
- «Null» ist 0^*, und
- der «Nachfolger» einer «Zahl» a ist a^+.

Dann gelten die PEANOschen Axiome, und ist $<$ die Kleinerrelation dieses Modells, so gilt außerdem für Feldobjekte a, b von $\sqsubset$ stets $a < b \leftrightarrow a \sqsubset b$.

Beweis. Zunächst verifizieren wir die Axiome. Zu (P1). 0^* ist eine «Zahl» wegen $0^* = f(0)$.
Zu (P2). Sei a ein «Zahl» $f(n)$. Zu zeigen ist, dass auch a^+ eine «Zahl», also ein Funktionswert von f ist. Nun gilt aber nach der Rekursionsgleichung für f, dass $f(n+1) = f(n)^+$. In dieser Formel können wir $f(n)$ durch das mit ihm identische a ersetzen und erhalten $f(n+1) = a^+$. Also ist a^+ eine «Zahl».
Zu (P3). Zu zeigen ist: Für jede «Zahl» $f(n)$ gilt $f(n)^+ \neq 0^*$. Wir zeigen durch Induktion, dass für jedes n aus ω stets $0^* \sqsubset f(n)^+$ gilt (dann kann wegen der Irreflexivität von $\sqsubset$ nicht $0^* = f(n)^+$ sein). INDUKTIONSANFANG. Wegen $f(0) = 0^*$ ist $f(0)^+ = 0^{*+}$, und da $0^* \sqsubset 0^{*+}$ ist, folgt $0^* \sqsubset f(0)^+$. INDUKTIONSSCHLUSS. VORAUSSETZUNG: $0^* \sqsubset f(n)^+$. Wegen $f(n)^+ \sqsubset f(n)^{++}$ folgt per Transitivität $0^* \sqsubset f(n)^{++}$. Wegen $f(n+1) = f(n)^+$ ist aber $f(n+1)^+ = f(n)^{++}$, und so bedeutet $0^* \sqsubset f(n)^{++}$, dass $0^* \sqsubset f(n+1)^+$.
Zu (P4). Wir benötigen hier folgendes **Lemma**: *Für Zahlen m, n aus $\mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt $f(m) \sqsubset f(n)$.* Zum Beweis des Lemmas lässt sich bei gegebenem m durch Induktion über n zeigen, dass von den beiden Aussagen $n \leq m$ und $f(m) \sqsubset f(n)$ stets mindestens eine wahr ist (ist dann $m < n$, so ist die Aussage $n \leq m$ falsch und es folgt $f(m) \sqsubset f(n)$): INDUKTIONSANFANG. Für $n = 0$ gilt $n \leq m$. INDUKTIONSSCHLUSS. Sei für ein n mindestens eine der beiden Aussagen wahr. Je nachdem unterscheiden wir zwei Fälle. FALL 1. Es gilt $n \leq m$, also entweder $n < m$ oder $n = m$. Wenn $n < m$, folgt gemäß Lemma 5.134 S. 219 $n + 1 \leq m$. Wenn aber $n = m$, so ist $f(m) \sqsubset f(m)^+ = f(m+1) = f(n+1)$, also $f(m) \sqsubset f(n+1)$. FALL 2. Es gilt $f(m) \sqsubset f(n)$. Wegen $f(n) \sqsubset f(n)^+$ gilt dann per Transitivität $f(m) \sqsubset f(n)^+$, und da $f(n)^+ = f(n+1)$, folgt $f(m) \sqsubset f(n+1)$. Damit ist der Beweis des Lemmas.
Mit diesem Lemma zeigt sich sofort, dass f injektiv ist: Ist nämlich $m \neq n$, so ist entweder $m < n$ oder $n < m$, also folgt aus dem Lemma $f(m) \sqsubset f(n)$ oder $f(n) \sqsubset f(m)$, und in beiden Fällen würde nun, wenn $f(m)$ dasselbe wie $f(n)$ wäre, $f(n) \sqsubset f(n)$ folgen, was der Irreflexivität von $\sqsubset$ widerspricht. Also gilt $f(m) \neq f(n)$. So ist die Injektivität von f bewiesen.
Mit Hilfe der Injektivität von f aber beweisen wir schließlich (P4). Seien nämlich $f(m)$ und $f(n)$ verschiedene «Zahlen», dann ist zu zeigen, dass $f(n)^+ \neq f(m)^+$. Nun folgt zunächst $m \neq n$ (sonst wäre $f(m) = f(n)$), daraus folgt mittels (P4) (angewendet auf das Standardmodell) $m + 1 \neq n + 1$, und daraus per Injektivität von f, dass $f(m+1) \neq f(n+1)$, das heißt $f(m)^+ \neq f(n)^+$.
Zu (P5). Sei C eine Klasse mit $0^* \in C$ und der Eigenschaft, dass wenn eine «Zahl» a Element von C ist, auch a^+ Element von C ist. Zu zeigen ist, dass C alle «Zahlen» enthält. Sei $N := \{n \mid f(n) \in C\}$. Es ist dann N (im Standardmodell) eine induktive Klasse (es gilt $0 \in N$, da $f(0) = 0^* \in C$; wenn außerdem $n \in N$ ist, also $f(n) \in C$ gilt, ist auch $f(n)^+$ Element von C, was mit $f(n+1)$ identisch ist, also gilt $f(n+1) \in C$, und darum $n + 1 \in N$), also gilt für alle n aus ω, dass $n \in N$, das heißt nach Definition von N, dass $f(n) \in C$. Also enthält C in der Tat alle «Zahlen».

Damit liegt ein Modell der Arithmetik vor. Dieses heiße $\mathcal{N}_{neu}$. Ist $<$ die Kleinerrelation von $\mathcal{N}_{neu}$, so bleibt zu zeigen, dass für «Zahlen» m und n stets $m \sqsubset n$ denselben Wahrheitswert wie $m < n$ hat. Es zeigt sich nun bei festem m durch vollständige Induktion über n im Modell $\mathcal{N}_{neu}$, dass von den Aussagen $n \leq m$ und $m \sqsubset n$ mindestens eine gilt (wenn dann $m < n$ gilt, ist die erste Aussage falsch, so dass $m \sqsubset n$ folgt):
INDUKTIONSANFANG. Ist n die «Null» 0^*, so gilt $n \leq m$. INDUKTIONSSCHLUSS. VORAUSSETZUNG. Für eine «Zahl» n gilt $n \leq m$ oder $m \sqsubset n$. Zu zeigen ist, dass für den «Nachfolger» $n + 1$ (das ist n^+) von n stets

$n^+ \leq m$ oder $m \sqsubset n^+$ gilt. FALL 1: $n \leq m$. Dann ist $n < m$ oder $n = m$. Wenn $n < m$, folgt mit Lemma 5.134 S. 219, dass $n + 1 \leq m$, d. h. $n^+ \leq m$. Wenn $n = m$, folgt $m \sqsubset m^+ = n^+$, d. h. $m \sqsubset n^+$. FALL 2: $m \sqsubset n$. Wegen $n \sqsubset n^+$ folgt dann per Transitivität $m \sqsubset n^+$, was den Induktionsbeweis abschließt.
Zu zeigen ist noch: Wenn $m < n$ falsch ist, so ist auch $m \sqsubset n$ falsch. Sei also $m < n$ falsch, dann gilt per Trichotomie von $<$ entweder $n < m$ oder $m = n$.
FALL 1: $n < m$. Dann folgt aus dem gerade Bewiesenen, dass $n \sqsubset m$. Wäre nun zugleich $m \sqsubset n$, so folgte per Transitivität, dass $n \sqsubset n$ im Widerspruch zur Irreflexivität. Also ist $m \sqsubset n$ falsch.
FALL 2: $m = n$. Wäre dann zugleich $m \sqsubset n$, könnte man hierin das n durch das mit ihm identische m ersetzen und erhielte $m \sqsubset m$ im Widerspruch zur Irreflexivität. Also muss $m \sqsubset n$ falsch sein. □

Theorem 5.16.57 S. 230

Sei $\mathbb{N}$ Träger eines Modells $\mathcal{N}$ der Arithmetik. Dann sind die Klassen $\mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_g$ der geraden bzw. ungeraden Zahlen dieses Modells disjunkt und es gilt $\mathbb{N}_g \cup \mathbb{N}_u = \mathbb{N}$.

Erinnerung: *Gerade* sind die Werte der rekursiv definierten Funktion $\mathfrak{g}\colon \omega \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{g}(\emptyset) = 0$ und $\mathfrak{g}(n') = \mathfrak{g}(n) + 2$. *Ungerade* sind die Werte von $\mathfrak{u}\colon \omega \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{u}(\emptyset) = 1$ und $\mathfrak{u}(n') = \mathfrak{u}(n) + 2$.

Beweis. Es gilt $\mathbb{N}_g \cup \mathbb{N}_u = \mathbb{N}$. Denn da alle Zahlen von $\mathbb{N}_u$ und $\mathbb{N}_g$ in $\mathbb{N}$ liegen, gilt zunächst $\mathbb{N}_u \cup \mathbb{N}_g \subseteq \mathbb{N}$. Es gilt aber auch $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_u \cup \mathbb{N}_g$, d. h. es gibt keine Zahl aus $\mathbb{N}$, die weder in $\mathbb{N}_u$ noch in $\mathbb{N}_g$ liegt, also weder gerade noch ungerade ist. ANGENOMMEN nämlich, es gibt eine solche. Dann gibt es nach Theorem 5.16.36 S. 220 auch eine kleinste solche Zahl m. Dieses m ist weder 0 noch 1 (denn 0 ist gerade und 1 ungerade, weil $\mathfrak{g}(\emptyset) = 0$ bzw. $\mathfrak{u}(\emptyset) = 1$ ist). Nun gilt allgemein das folgende triviale

Lemma: Ist eine Zahl x weder 0 noch 1, existiert eine Zahl k mit $k < x$, so dass $k + 2 = x$.

Beweis: Nach Theorem 5.16.13 S. 213 gibt es wegen $x \neq 0$ eine Zahl ℓ mit $\ell + 1 = x$. Dieses ℓ ist nicht 0 (sonst wäre $x = \ell + 1 = 0 + 1 = 1$), also gibt es nach Theorem 5.16.13 eine Zahl k mit $k + 1 = \ell$, also mit $k+2 \underset{(2=1+1)}{=} k+(1+1) \underset{(5.123)}{=} (k+1)+1 \underset{(k+1=\ell)}{=} \ell+1 = x$. Wegen $2 \neq 0$ (2 ist Nachfolger einer Zahl, 0 nicht) zeigt die Gleichung $k+2 = x$ nach Definition von $<$ auch, dass $k < x$ ist. Damit ist das Lemma ist bewiesen.

In unserem Fall gibt es also ein k mit $k < m$ und $k + 2 = m$, und da m die *kleinste* Zahl war, die weder gerade noch ungerade ist, muss die kleinere Zahl k gerade oder ungerade sein. Wir haben also zwei Fälle: FALL 1: k ist gerade. Dann gibt es ein n aus ω, so dass $\mathfrak{g}(n) = k$ und es folgt $\mathfrak{g}(n') = k + 2 = m$, also ist m als Wert von $\mathfrak{g}$ eine gerade Zahl. FALL 2: k ist ungerade. Denn folgt analog wie in Fall 1 (indem wir die Funktion $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{u}$ ersetzen), dass m eine ungerade Zahl ist. In jedem Fall ist also m gerade oder ungerade, im Widerspruch dazu, dass m weder das eine noch das andere sein sollte. Damit ist $\mathbb{N}_g \cup \mathbb{N}_u = \mathbb{N}$ bewiesen.

Nun bleibt noch die Disjunktheit von $\mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_u$ zu zeigen. ANGENOMMEN, $\mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_u$ haben ein gemeinsames Element. Dann gibt es mindestens eine Zahl, die zugleich gerade und ungerade ist, und nach Theorem 5.16.36 S. 220 gibt es eine *kleinste* solche Zahl μ. Nun ist $\mu \neq 0$ und $\mu \neq 1$ (weil 0 nicht ungerade und 1 nicht gerade ist),[17] also gibt es nach dem Lemma eine Zahl k mit $k < \mu$ und $k + 2 = \mu$.
Da die 0 auch die Null des Modells $\mathcal{N}_g$ der geraden Zahlen von $\mathcal{N}$ ist, bedeutet $\mu \neq 0$, dass μ nicht die Null dieses Modells ist. Also gibt nach Theorem 5.16.13 S. 213 eine Zahl x des Modells $\mathcal{N}_g$, so dass μ (in $\mathcal{N}_g$) der Nachfolger von x ist, d. h. es muss (in $\mathcal{N}$) $x + 2 = \mu$ gelten, und weil auch $k + 2 = \mu$ gilt, folgt $k + 2 = x + 2$, wofür wir nach (5.126) auch $2 + k = 2 + x$ schreiben können; daraus folgt aber wegen (5.128 S. 217), dass $k = x$. Damit ist aber k mit der Zahl x des Modells $\mathcal{N}_g$ identisch, d. h. k ist eine gerade Zahl.
Ebenso ist 1 die Null des Modells $\mathcal{N}_u$ der ungeraden Zahlen von $\mathcal{N}$, so dass $\mu \neq 1$ bedeutet, dass μ nicht die Null dieses Modells ist. Analog zu dem Gedankengang im letzten Absatz ist gibt es also eine Zahl y des Modells $\mathcal{N}_u$, so dass μ (in $\mathcal{N}_u$) der Nachfolger von y ist, d. h. es muss (in $\mathcal{N}$) $y + 2 = \mu$ gelten, und weil auch

[17] 0 ist nicht ungerade: Andernfalls müsste 0 als Wert von $\mathfrak{u}$ auftreten, aber die Werte von $\mathfrak{u}$ sind nach Definition nur $1(\neq 0)$ und gewisse Zahlen $x + 2$, die (wegen 5.127 S. 217) nicht 0 sein können.
1 ist nicht gerade: Andernfalls müsste 1 als Wert von $\mathfrak{g}$ auftreten, aber die Werte von $\mathfrak{g}$ sind nur $0(\neq 1)$ und gewisse Zahlen $x + 2$. Auch die Letzteren können nicht 1 sein: Denn $x + 2 = 1$ würde nach Definition von 2 bedeuten, dass $x + (1 + 1) = 1$, also (wegen 5.123 S. 216) auch $(x + 1) + 1 = 1$ und (wegen 5.126 S. 217) $1 + (x + 1) = 1$, und da andererseits $1 + 0 = 1$ ist, würde aus (5.128 S. 217) folgen, dass $x + 1 = 0$ im Widerspruch zu Axiom (P3).

$k+2=\mu$ gilt, folgt $k+2=y+2$, daraus $2+k=1+y$ und daraus $k=y$, so dass k eine Zahl des Modells $\mathcal{N}_g$ ist, d. h. eine ungerade Zahl. Insgesamt ist damit k eine Zahl kleiner als μ, die zugleich gerade und ungerade ist. Doch war μ die *kleinste derartige Zahl*, was unsere ANNAHME widerlegt.□

Theorem 5.17.17 S. 241

Ist B eine arithmetisch endliche Klasse und $A \subseteq B$, so ist auch A arithmetisch endlich und für die Anzahlen m und n der Elemente von A und B gilt $m \leq n$. Ist dabei sogar $A \subset B$, gilt $m < n$.

Beweis. Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass für Zahlen n gilt: «Jede Teilklasse X einer arithmetisch endlichen Klasse Y, welche n Elemente hat, ist arithmetisch endlich, und für die Anzahl m der Elemente von X gilt $m \leq n$; und falls X echte Teilklassen Y ist, gilt sogar $m < n$.»
INDUKTIONSANFANG. Hat Y 0 Elemente, so ist Y nach Theorem 5.17.12 S. 240 die leere Klasse und die einzige Teilklasse X von dieser ist ebenfalls die leere Klasse, die arithmetisch endlich ist. Für die Anzahl m ihrer Elemente gilt $m=0$, also auch $m \leq 0$. Eine echte Teilklasse aber hat $\emptyset$ nicht.
INDUKTIONSSCHLUSS. VORAUSSETZUNG. Die Behauptung gelte für eine Zahl n. Sei nun Y eine arithmetisch endliche Klasse mit $n+1$ Elementen, und sei $X \subseteq Y$. Ist X keine echte Teilklasse von Y (also $Y=X$), so ist Y mit dem arithmetisch endlichen X identisch und die Anzahl der Elemente m von X ist $=n$, weshalb erst recht $m \leq n$ gilt. So bleibt nur der Fall zu untersuchen, dass X eine echte Teilklasse von Y ist. Dann liegt in Y mindestens ein Element y, das nicht in X liegt. Also ist X auch eine Teilklasse der Klasse Y^*, die wir erhalten, wenn wir aus Y das Element y entfernen. Y^* aber hat nach Lemma 5.17.16 S. 240 nur n Elemente. So folgt aus der VORAUSSETZUNG, dass X arithmetisch endlich ist, und dass für die Anzahl m der Elemente von X gilt: $m \leq n$. Wegen $n < n+1$ und gemischter Transitivität folgt daraus $m < n+1$. □

Theorem 5.17.21 S. 241

Seien A und B arithmetisch endliche Klassen mit n bzw. m Elementen. Seien außerdem A und B disjunkt. Dann ist auch $A \cup B$ arithmetisch endlich und hat $m+n$ Elemente.

Beweis. Vollständige Induktion über n bei festem m zeigt: «Wann immer X und Y disjunkte arithmetisch endliche Klassen mit m bzw. n Elementen sind, ist auch $X \cup Y$ arithmetisch endlich und hat $m+n$ Elemente.»
INDUKTIONSANFANG. Für $n=0$ ist das richtig: Hat X m und Y 0 Elemente, ist nach Theorem 5.17.12 S. 240 $Y=\emptyset$, also ist $X \cup Y$ mit X identisch und hat $m+0$ Elemente.
INDUKTIONSSCHLUSS. VORAUSSETZUNG. Die Behauptung gilt für ein n. Seien nun X und Y disjunkte Klassen und habe X m und Y $n+n$ Elemente. Zu zeigen ist, dass $X \cup Y$ arithmetisch endlich ist und $m+(n+1)$ Elemente hat, das sind (wegen 5.123 S. 216) $(m+n)+1$ Elemente. So ist also zu zeigen, dass $\mathtt{Ab}((n+m)+1) \sim X \cup Y$ gilt. Da Y nun $n+1$ Elemente hat, können wir gemäß Lemma 5.17.16 S. 240 durch Entfernung eines Elements y von Y zu einer Klasse Y^* übergehen, die n Elemente hat. Da X wegen der vorausgesetzten Disjunktheit mit Y kein gemeinsames Element hat, hat X erst recht mit der Teilklasse Y^* von Y kein Element gemeinsam. Nach VORAUSSETZUNG ist daher $X \cup Y^*$ eine arithmetisch endliche Klasse, die $n+m$ Elemente hat. Das aber bedeutet: $\mathtt{Ab}(n+m) \sim X \cup Y^*$. Nun ist die Zahl $m+n$ nicht in $\mathtt{Ab}(m+n)$ enthalten (weil sie nicht Vorgänger von sich selbst ist), und ebenso wenig ist y in $X \cup Y^*$ enthalten. Fügen wir also einerseits $m+n$ zu $\mathtt{Ab}(m+n)$ hinzu und anderseits y zu $X \cup Y^*$, so folgt aus Theorem 5.12.4 S. 165, dass die so entstehenden Klassen wieder gleichmächtig sind. Durch besagte Hinzufügung entsteht aber einerseits $\mathtt{Ab}((n+m)+1)$ (wegen Theorem 5.16.33 S. 220) und andererseits $X \cup Y$. Damit haben wir das verlangte Ergebnis, dass nämlich $\mathtt{Ab}((n+m)+1)$ mit $X \cup Y$ gleichmächtig ist. □

Lemma 5.17.23 S. 242

Sei C arithmetisch unendlich. Dann gibt es eine Injektion von $\mathbb{N}$ in C.

Beweis. Aufgrund von Theorem 5.16.36 S. 220 definieren wir gemäß Theorem 5.13.31 S. 185 durch ordnungstheoretische Rekursion eine Funktion f von $\mathbb{N}$ in C, die sich als injektiv herausstellen wird. Um f rekursiv zu definieren, müssen wir für jedes n aus $\mathbb{N}$ *unter der Voraussetzung, dass* $f/\ \mathtt{Ab}(n)$ *bereits eine Funktion von*

$\mathtt{Ab}(n)$ *in* C *ist*, ein Element von C benennen, welches $f(n)$ sein soll. Unter der genannten Voraussetzung muss aber $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$ eine arithmetisch endliche Teilklasse von C sein. Nach Theorem 5.17.14 ist nämlich $\mathtt{Ab}(n)$ arithmetisch endlich, und da $f/\ \mathtt{Ab}$ eine Surjektion von $\mathtt{Ab}(n)$ in $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$ ist, gilt nach (5.91 S. 200) $\mathtt{Ab}(n) \succsim \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$, also nach (5.85 S. 200) $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n)) \precsim \mathtt{Ab}(n)$ und so folgt aus der arithmetischen Endlichkeit von $\mathtt{Ab}(n)$ mittels Theorem 5.17.19 S. 241 die arithmetisch Endlichkeit von $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$. Nun ist die Klasse $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$ eine Teilklasse von C (da f eine Funktion von $\mathtt{Ab}(n)$ in C ist), und muss sogar eine *echte* Teilklasse von C sein (sonst wäre sie mit C identisch und C wäre arithmetisch unendlich). Folglich ist $C \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$ nichtleer, und $\varepsilon(C \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$ bezeichnet nach Korollar 5.11.9 S. 156 ein Element dieser Klasse, insbesondere ein Element von C. Daher können wir rekursiv definieren:

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow C \text{ mit } f(n) := \varepsilon(C \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))).$$

Dieses f ist injektiv: Sind nämlich zwei Zahlen gegeben, so ist die eine (nennen wir sie m) kleiner als die andere (nennen wir sie n) und so gilt gemäß der Rekursionsgleichung, dass $f(n)$ in $C \setminus \mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$ liegt, d. h. Element von C, aber *kein* Element von $\mathtt{Wb}(f/\ \mathtt{Ab}(n))$ ist, also mit keinem Wert $f(x)$ für $x \in \mathtt{Ab}(n)$ identisch ist. Da nun $m < n$ (d. h. $m \in \mathtt{Ab}(n)$) gilt, ist also $f(n)$ nicht mit $f(m)$ identisch. □

Theorem 5.17.24 S. 242

«C ist arithmetisch endlich» ist äquivalent mit «C ist endlich», und folglich auch «C ist nicht arithmetisch endlich» mit «C ist unendlich».

Beweis. Sei zunächst C arithmetisch endlich. Angenommen, es gibt eine echte Teilklasse T von C mit $T \sim C$. Sei m die Anzahl der Elemente von T, und n die Anzahl der Elemente von C. Da $T \subset C$, folgt aus Theorem 5.17.17, dass $m < n$, also $m \neq n$. Mittels Theorem 5.16.35 S. 220 folgt daraus, dass $\mathtt{Ab}(n) \sim Ab(m)$ falsch ist. Andererseits gilt aber $\mathtt{Ab}(m) \sim T$ (weil T m Elemente hat), weiter ist $T \sim C$ (nach Annahme) und schließlich $C \sim \mathtt{Ab}(n)$ (weil C n Elemente hat), insgesamt also doch $\mathtt{Ab}(m) \sim \mathtt{Ab}(n)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war. Daher gilt nach Definition 5.17.1 die Aussage «C ist endlich».
Sei nun C *nicht* arithmetisch endlich, also arithmetisch unendlich. Dann gibt es nach Lemma 5.17.23 eine Injektion f von $\mathbb{N}$ in C, das ist eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in die Teilmenge $\mathtt{Wb}(f)$ von C. Deren Umkehrfunktion $f^{\rightharpoonup}$ ist eine Bijektion von $\mathtt{Wb}(f)$ in $\mathbb{N}$. Sei h die Funktion, die jedes c aus C auf $\begin{cases} f(f^{\rightharpoonup}(c)+1) & \text{wirft, falls } c \in \mathtt{Wb}(f), \\ c & \text{wirft, falls } c \notin \mathtt{Wb}(f). \end{cases}$
Dann folgt $\mathtt{Wb}(h) \subseteq C \setminus \{f(0)\}$ denn:
1. Für Elemente c aus $\mathtt{Wb}(f)$ liegt $f^{\rightharpoonup}(c)$ und folglich $f^{\rightharpoonup}(c)+1$ in $\mathbb{N}$, also liegt $f(f^{\rightharpoonup}(c)+1)$ wieder in C, ist aber von $f(0)$ verschieden, denn wäre $f(f^{\rightharpoonup}(c)+1) = f(0)$, müsste f die beiden Zahlen $f^{\rightharpoonup}(c)+1$ und 0 auf ein und dasselbe Element von C werfen; aber das kann nicht sein, weil f injektiv ist, und es sich bei $f^{\rightharpoonup}(c)+1$ und 0 um *verschiedene* Zahlen handelt (denn die erste ist Nachfolger einer Zahl und daher von 0 verschieden). Also liegt $h(c)$ $(= f(f^{\rightharpoonup}(c)+1))$ in $C \setminus \{f(0)\}$.
2. Für Elemente c von C, die nicht in $\mathtt{Wb}(f)$ liegen, ist $c \neq f(0)$, weil $f(0)$ in $\mathtt{Wb}(f)$ liegt. Also liegt $h(c)$ (das ist jetzt c) wieder in $C \setminus \{f(0)\}$.
Die Funktion h ist injektiv: h wirft verschiedene Elemente c_1 und c_1 stets auf verschiedene Elemente $h(c_1)$ und $h(c_2)$ von C, was durch Betrachtung der folgenden möglichen Fälle einleuchtet:
1. Entweder liegen c_1 und c_1 beide in $\mathtt{Wb}(f)$. Weil $f^{\rightharpoonup}$ injektiv ist, gilt dann $f^{\rightharpoonup}(c_1) \neq f^{\rightharpoonup}(c_2)$, wegen Axiom (P4) folgt $f^{\rightharpoonup}(c_1)+1 \neq f^{\rightharpoonup}(c_2)+1$, und per Injektivität von f schließlich $f(f^{\rightharpoonup}(c_1)+1) \neq f(f^{\rightharpoonup}(c_2)+1)$, das heißt $h(c_1) \neq h(c_2)$.
2. Oder c_1 und c_2 liegen beide nicht in $\mathtt{Wb}(f)$. Dann gilt $h(c_1) = c_1 \neq c_2 = h(c_2)$.
3. Oder eines der beiden Elemente, etwa c_1, liegt in $\mathtt{Wb}(f)$, während das andere, etwa c_2, nicht in $\mathtt{Wb}(f)$ liegt. Dann ist $h(c_1)$ mit $f(f^{\rightharpoonup}(c_1)+1)$ identisch und liegt daher in $\mathtt{Wb}(f)$, während $h(c_2)$ mit c_2 identisch ist und nicht in $\mathtt{Wb}(f)$ liegt. Also gilt auch jetzt $h(c_1) \neq h(c_2)$.
Da h also injektiv ist, ist h eine Bijektion von C in $\mathtt{Wb}(h)$, und somit gilt $C \sim \mathtt{Wb}(h)$. Da nun die Werte von h in $C \setminus \{f(0)\}$ liegen, ist $\mathtt{Wb}(h)$ eine Teilmenge von $C \setminus \{f(0)\}$, und zwar wegen $f(0) \in C$ (f ist ja eine Funktion von $\mathbb{N}$ in C) eine *echte* Teilmenge. Da diese mit C gleichmächtig ist, ist C *nicht* endlich. □

Theorem 5.17.29 S. 243

Sei A eine nichtleere Klasse und $<$ eine Vollordnung über A. Dann gilt:

Ist A endlich, besitzt A bezüglich $<$ ein Minimum und ein Maximum. (5.139)

Besitzt A kein Minimum, so ist A unendlich. (5.140)

Besitzt A kein Maximum, so ist A unendlich. (5.141)

Beweis von (5.139). Wie Induktion zeigt, gilt für jede Zahl n mindestens eine der folgenden Aussagen:
(a) $n = 0$
(b) es gibt keine Teilklasse von A mit n Elementen
(c) es gibt Teilklassen von A mit n Elementen, und jede solche hat ein Minimum und ein Maximum.
Daraus folgt die Behauptung, denn da A nichtleer und endlich ist, hat A eine von 0 verschiedene Anzahl n von Elementen, so dass A selbst eine Teilklasse von A mit n Elementen ist. Für dieses n gilt weder (a) und (b), also gilt dann (c), und so hat A selbst ein Minimum und ein Maximum. So bleibt nur noch der genannte Induktionsbeweis zu führen.
Induktionsanfang. Für den Fall $n = 0$ gilt unmittelbar (a).
Induktionsschluss. Gelte für ein n eine der Aussagen (a), (b), oder (c). Zu zeigen ist, dass eine dieser Aussagen auch für $n + 1$ gilt.
Fall 1: Für die Zahl $n + 1$ gilt (b). Dann sind wir fertig.
Fall 2: Für die Zahl $n+1$ gilt (b) *nicht*. Dann *gibt* es also eine Teilklasse X von A mit $n+1$ Elementen, und nach Lemma 5.17.16 S. 240 existiert eine Teilklasse X^* von X mit nur n Elementen. X^* ist dann ebenfalls eine Teilklasse von A. Daher gilt nun (b) auch für die Zahl n *nicht*. Nach Voraussetzung muss dann für n entweder (a) oder (c) gelten. Demnach gibt es wieder zwei Fälle:
Fall 2a: Für die Zahl n gilt (a). Dann ist $n = 0$. Also $n + 1 = 1$. Nun gibt es einelementige Teilklassen von A (weil A nichtleer ist), und für jede solche Teilklasse $\{a\}$ ist deren einziges Element a natürlich sowohl ihr Minimum als auch Maximum. Also gilt (c) für die Zahl $n + 1$.
Fall 2b: Für die Zahl n gilt (c). Dann zeigt sich, dass (c) auch für die Zahl $n + 1$ gilt. Zunächst gibt es $n + 1$-elementige Teilklassen von A (X ist eine solche), und für eine beliebige Teilklasse T von A mit $n + 1$ Elementen zeigt sich wie folgt, dass sie ein Minimum und ein Maximum hat. Nach Lemma 5.17.16 S. 240 gibt es eine Teilklasse T^* von T mit n Elementen, die aus T durch Entfernung eines Elements t entsteht. Dieses T^* ist nun ebenfalls eine Teilklasse von A. Weil (c) für n gilt, besitzt also T^* ein Minimum μ. Nun ist t das einzige Element, das T über die Elemente von T^* hinaus besitzt. Wenn daher $\mu \leq t$ gilt, ist μ das Minimum von ganz T. Wenn aber nicht $\mu \leq t$ gilt, gilt $t < \mu$, und da μ kleiner als alle anderen Elemente von T^* ist, ist erst recht t kleiner als diese. Darum ist nun t das Minimum von T. In jedem Fall besitzt also T ein Minimum. Analog beweist man, dass T ein Maximum besitzt. Also gilt (c) für die Zahl $n+1$.

Beweis von (5.140) und (5.141). Besitzt A kein Minimum oder kein Maximum, so kann A nicht endlich sein, weil andernfalls wegen (5.139) A sowohl ein Minimum als auch ein Maximum besitzt. □

Theorem 5.17.31 S. 244

Eine Klasse C ist genau dann endlich, wenn es eine Biwohlordnung $<$ über C gibt.

Beweis. Zunächst zeigt sich durch Induktion, dass es zu jeder endlichen Klasse C mit n Elementen eine Biwohlordnung $<$ über M gibt. Induktionsanfang. Falls $n = 0$ ist $C = \emptyset$ und die leere Relation ist eine Biwohlordnung über C (siehe S. 183).
Induktionsschluss. Voraussetzung. Die Behauptung gilt für eine Zahl n. Sei C eine endliche Klasse mit $n+1$ Elementen. Dann ist C nichtleer und wir wählen ein Element $\hat{c}$ von C aus. Nach Lemma 5.17.16 S. 240 hat die Klasse $C^* := C \setminus \{\hat{c}\}$ nur n Elemente, und nach Voraussetzung gibt es eine Biwohlordnung $<^*$ über C^*. Sei $<^+$ die Relation mit C als Vor– und Nachbereich, die jedes Individuum von C^* auf das Individuum $\hat{c}$ ausrichtet und sonst nichts tut. Sei nun $<$ die zusammengesetzte Relation $<^* \cup <^+$, die also die Aktionen von $<^*$ und $<^+$ zugleich ausführt (und sonst nichts tut). Man erhält dann ein Ordnungsdiagramm von $<$, indem man ganz links hinter alle Elemente von C^* das Element $\hat{c}$ platziert. Dann ist $<$ eine Biwohlordnung über C: Mit Blick auf das genannte Ordnungsdiagramm ist klar, dass $<$ irreflexiv, transitiv und linear ist. Ist nun T eine nichtleere Teilmenge von C, so ist, falls sie ein Element von C^* besitzt, ihr $<^*$-Minimum auch

ihr $<$-Minimum; andernfalls aber ist $T = \{\hat{c}\}$ und $\hat{c}$ ist ihr $<$-Minimum. Ebenso ist, wenn $\hat{c} \notin T$ gilt, ihr $<^*$-Maximum auch ihr $<$-Maximum, und andernfalls ist $\hat{c}$ ihr $<$-Maximum. Schließlich ist die Bedingung, dass C eine Menge ist, wegen Theorem 5.17.11 S. 239 (in Verbindung mit Theorem 5.17.24 S. 242) erfüllt, da C endlich ist. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.
Sei nun umgekehrt VORAUSGESETZT, dass es über C eine Biwohlordnung $<$ gibt. Zu zeigen ist, dass C endlich ist. Sei $C \neq \emptyset$ (andernfalls sind wir fertig). Dann besitzt C (weil $<$ eine Biwohlordnung ist) ein $<$-Maximum s. Jedes Element von C, das nicht s ist, liegt dann in $\mathtt{Ab}(s)$, und es ist $C = \mathtt{Ab}(s) \cup \{s\}$. *Wenn nun* $\mathtt{Ab}(s)$ *endlich ist*, so muss diese Vereinigung, weil die einelementige Klasse $\{s\}$ ebenfalls endlich ist, endlich sein (vgl. Theoreme 5.17.13 S. 240 und 5.17.22 S. 241 in Verbindung mit 5.17.24 S. 242), und wir sind fertig.
So müssen wir nur noch die ANNAHME widerlegen, dass $\mathtt{Ab}(s)$ unendlich ist. Unter dieser ANNAHME aber ist die Klasse U aller Elemente c von C, für die $\mathtt{Ab}(c)$ unendlich ist, nichtleer, besitzt also (weil $<$ ein Biwohlordnung ist) ein $<$-Minimum m. Sei μ das Minimum der ganzen Klasse C (es existiert, weil $<$ eine Biwohlordnung ist). Wäre $m = \mu$, so wäre $\mathtt{Ab}(m) = \mathtt{Ab}(\mu) = \emptyset$, was nicht unendlich ist. Also ist $m \neq \mu$, also $\mu < m$. Dann ist aber die Klasse E aller Elemente x von C mit $x < m$ nichtleer (denn μ gehört dazu). Diese x sind kleiner als das Minimum m von U, sie liegen daher nicht in U, und folglich muss $\mathtt{Ab}(x)$ für alle diese x endlich sein. Nun hat E (weil $<$ ein Biwohlordnung ist) ein $<$-Maximum k. Es muss dann aber k der unmittelbare $<$-Vorgänger von m sein (denn gäbe es ein x mit $k < x < m$, so wäre wegen $k < x$ dieses x größer als das Maximum k von E, also $x \notin E$; aber wegen $x < m$ wäre aufgrund der Definition von E zugleich $x \in E$: ein Widerspruch), d. h. es gilt $k + 1 = m$, und so ist $\mathtt{Ab}(m)$ dasselbe wie $\mathtt{Ab}(k+1)$, d. h. nach Theorem 5.16.33 S. 220 dasselbe wie die Vereinigung $\mathtt{Ab}(k) \cup \{k\}$. Wegen $k \in E$ ist $\mathtt{Ab}(k)$ endlich, und das einelementige $\{k\}$ ist ebenfalls endlich, also ist auch die Vereinigung $\mathtt{Ab}(m)$ endlich. Andererseits gehört m zu U, darum ist $\mathtt{Ab}(m)$ zugleich unendlich. Dieser Widerspruch zeigt, dass die ANNAHME falsch war; $\mathtt{Ab}(s)$ ist also endlich und das Theorem ist bewiesen. □

Theorem 5.18.3 S. 249

Seien a und b irgendwelche voneinander verschiedenen Individuen. Dann gilt für jede Menge M, dass $\mathcal{P}(M) \sim \{a, b\}^M$.

Beweis. Sei $\mathtt{Cls}$ die Funktion, die jedes f aus $\{a, b\}^M$, also jede Funktion f von M in $\{a, b\}$, auf die Klasse $\mathtt{Cls}(f) := \{x \mid f(x) = a\}$ wirft, die ein Element von $\mathcal{P}(M)$ ist: Denn $\mathtt{Cls}(f)$ enthält die Individuen, die f auf a wirft, und diese gehören zum Definitionsbereich M von f; also ist $\mathtt{Cls}(f)$ eine Teilklasse von M, und weil M eine Menge ist und das Teilmengenaxiom gilt, ist $\mathtt{Cls}(f)$ sogar eine Teil*menge* von M, also ein Element von $\mathcal{P}(M)$. Somit ist $\mathtt{Cls}$ eine Funktion von $\{a, b\}^M$ in $\mathcal{P}(M)$.
$\mathtt{Cls}$ ist injektiv: Sind nämlich f, g verschiedene Funktionen von M in $\{a, b\}$, so muss es ein Element x von M geben, für das $f(x) \neq g(x)$ gilt. Es ist dann also entweder $f(x) = a$ und $g(x) = b$, oder es ist $f(x) = b$ und $g(x) = a$. Im ersten Fall ist x Element von $\mathtt{Cls}(f)$, aber kein Element von $\mathtt{Cls}(g)$; im zweiten ist x ein Element von $\mathtt{Cls}(g)$, aber kein Element von $\mathtt{Cls}(f)$. In beiden Fällen ist also $\mathtt{Cls}(f) \neq \mathtt{Cls}(g)$.
$\mathtt{Cls}$ ist surjektiv: Sei nämlich T aus $\mathcal{P}(M)$, also eine Teilmenge von M. Sei dann f die Funktion von M in $\{a, b\}$, welche die in T liegenden Elemente von M auf a wirft, und die übrigen auf b. Dann ist $\mathtt{Cls}(f) = T$.
Insgesamt ist $\mathtt{Cls}$ also eine Bijektion von $\{1, 0\}^M$ in $\mathcal{P}(M)$, so dass $\{1, 0\}^M \sim \mathcal{P}(M)$ gilt. □

Theorem 5.18.8 S. 250

Für Klassen C gilt $C^0 = \{\emptyset\}$, $C^1 \sim C$, $C^2 \sim C \times C$ und $C^{n+1} \sim C^n \times C$ für alle NEUMANNsche Zahlen n (wobei die Potenzen im Sinne von ${}_{Klasse}\!\uparrow_{Menge}$ zu verstehen sind).

Beweis. C^0 ist die Klasse der Funktionen von $\emptyset$ in C; nach Beispiel 4 S. 141 ist die einzige derartige Funktion die leere, also ist $C^0 = \{\emptyset\}$. C^1 enthält die Funktionen f, die das eine Element 0 der NEUMANNschen 1 auf ein Element von C werfen; diese haben nur einen Funktionswert $f(0)$. Die Funktion, die jede solche Funktion f auf ihren einzigen Funktionswert wirft, ist dann offenbar eine Bijektion von C^1 in C. C^2 enthält die Tupel $\leqslant x, y \geqslant$ mit x und y aus C, während $C \times C$ die $\langle x, y \rangle$ mit x und y aus C enthält. Offenbar ist die Funktion, die jedes $\leqslant x, y \geqslant$ auf $\langle x, y \rangle$ wirft, eine Bijektion von C^2 in $C \times C$. Schließlich gilt nach Theorem 5.12.8 S. 166

$C^{n\cup\{n\}} \sim C^n \times C$.[18] Nun gilt aber $n+1 = n' = n \cup \{n\}$, (vgl. Definition 5.16.37 S. 221), so dass wir in $C^{n\cup\{n\}} \sim C^n \times C$ das $C^{n\cup\{n\}}$ durch C^{n+1} ersetzen können, wodurch wir $C^{n+1} \sim C^n \times C$ erhalten. □

Theorem 5.18.10 S. 251

Seien A und B endlich, habe A n und B m Elemente und sei k eine Zahl. Dann gilt:

$A \cup B$	ist endlich und hat,	falls A und B disjunkt sind,		$m+n$ Elemente.	(5.161)
$A \times B$	ist endlich und hat	mn	Elemente.		(5.162)
A^B	ist endlich und hat	m^n	Elemente.		(5.163)
A^k	ist endlich und hat	m^k	Elemente.		(5.164)
$\mathcal{P}(A)$	ist endlich und hat	2^n	Elemente.		(5.165)

Beweis von (5.161). Dies folgt sofort aus Theorem 5.17.21 S. 241 in Verbindung mit 5.17.24 S. 242.
Für die Beweise von (5.162) bis (5.165) sei nun A eine fest gewählte endliche Klasse mit m Elementen.

Beweis von (5.162). Durch Induktion zeigt sich für alle Zahlen n: Für jedes endliche B mit n Elementen ist $A \times B$ endlich und hat mn Elemente. Induktionsanfang. Hat B 0 Elemente, so ist B leer. Dann ist $A \times B$ ebenfalls leer, also endlich und hat 0 Elemente, eine Zahl, für die man nach 5.129 S. 217 auch $m0$ (d. h. $m \cdot 0$) schreiben darf. Induktionsschluss. Voraussetzung. Für jedes B^* mit n Elementen ist $A \times B^*$ endlich und hat mn Elemente. Habe nun B $n+1$ Elemente. Gemäß Lemma 5.17.16 S. 240 entfernen wir ein Element b von B und erhalten eine Klasse B^* mit n Elementen. Nun ist $A \times B$ die Klasse aller Paare $\langle x, y\rangle$ mit erster Komponente x aus A und zweiter Komponente y aus B. Diese können wir einteilen in diejenigen, bei denen y aus B^*, und diejenigen, bei denen y gleich b (d. h. aus $\{b\}$) ist. Dann ist $A \times B$ die Vereinigung von $A \times B^*$ und $A \times \{b\}$. Nun ist $A \times B^*$ nach Voraussetzung endlich, und $A \times \{b\}$ ist nach Theorem 5.12.7 S. 166 mit der endlichen Klasse A gleichmächtig, also nach (5.143 S. 244) ebenfalls endlich. Also ist wegen (5.161) die Vereinigung $A \times B$ dieser beiden Klassen ebenfalls endlich. $A \times B^*$ und $A \times \{b\}$ haben aber kein gemeinsames Element, da ihre Elemente Paare sind, die sich in der zweiten Komponenten unterscheiden. So erhält man nach (5.161) die Anzahl der Elemente von $A \times B$ durch Addition der Anzahl der Elemente von $A \times \{b\}$ mit der Anzahl der Elemente von $A \times B^*$. Da B^* n Elemente hat, hat $A \times B^*$ nach Voraussetzung $m \cdot n$ Elemente, während $A \times \{b\}$ wegen (5.142 S. 244) ebenso wie das gleichmächtige A m Elemente hat. So ergibt sich als Anzahl der Elemente von $A \times B$ die Zahl $m + (m \cdot n)$, was nach der Rekursionsgleichung der Multiplikation (5.130 S. 217) die Zahl $m \cdot (n+1)$ ist.

Beweis von (5.163). Durch Induktion zeigt sich für alle Zahlen n: Für jedes endliche B mit n Elementen ist A^B endlich und hat m^n Elemente. Induktionsanfang. Hat B 0 Elemente, so ist B leer. Dann besitzt A^B nach Beispiel 4 auf S. 141 genau ein Element, nämlich die leere Funktion. So ist A^B die endliche Menge $\{\emptyset\}$ und die Anzahl ihrer Elemente ist 1, eine Zahl, für die man nach 5.131 S. 218 auch m^0 schreiben darf. Induktionsschluss. Voraussetzung. Für jedes B^* mit n Elementen ist A^{B^*} endlich und hat m^n Elemente. Habe nun B $n+1$ Elemente. Gemäß Lemma 5.17.16 entfernen wir ein Element b von B und erhalten ein B^* mit n Elementen, wobei $B = B^* \cup \{b\}$. Wegen $b \notin B^*$ gilt nach Theorem 5.12.8 S. 166, dass $A^{B^*\cup\{b\}} \sim A \times A^{B^*}$ und wegen $B^* \cup \{b\} = B$ heißt dies $A^B \sim A \times A^{B^*}$. Da nach Voraussetzung A^{B^*} endlich ist und m^n Elemente hat, folgt nach (5.162), dass $A \times A^{B^*}$ endlich ist und $m \cdot (m^n)$ Elemente hat, d. h. nach (5.132 S. 218) m^{n+1} Elemente. Wegen $A \times A^{B^*} \sim A^B$ ist nach (5.143 S. 244) auch A^B endlich und hat nach (5.142 S. 244) ebenfalls m^{n+1} Elemente.

Beweis von (5.164). Dies folgt aus (5.163), da k nach (5.157 S. 248) endlich ist und k Elemente hat.

Beweis von (5.165). Nach Theorem 5.18.3 S. 249 ist $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$. Da $\{0,1\}$ endlich ist und 2 Elemente hat, gilt nach (5.163), dass $\{0,1\}^A$ endlich ist und 2^m Elemente hat. Wegen $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$ ist nach (5.143 S. 244) auch $\mathcal{P}(A)$ endlich und hat nach (5.142 S. 244) ebenfalls 2^n Elemente. □

[18] Die Voraussetzung von 5.12.8 ist erfüllt: $n \notin n$, da n wegen (5.159 S. 248) nur die Vorgänger von n enthält.

Theorem 5.18.11 S. 251

Sei $\langle x \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Familie endlicher Mengen mit endlichem Indexbereich I, und $\mathfrak{M}$ eine endliche Mengenklasse mit nur endlichen Mengen als Elementen.
Dann sind $\bigcup_{i\in I}\theta_i$ und $\bigtimes_{i\in I}\theta_i$ sowie $\bigcup\mathfrak{M}$ und $\bigtimes\mathfrak{M}$ endlich.

Beweis. Es genügt die Behauptung für $\bigcup_{i\in I}\theta_i$ und $\bigtimes_{i\in I}\theta_i$ zu beweisen, denn nach Theorem 5.10.74 S. 150 ist $\bigcup\mathfrak{M}$ dasselbe wie $\bigcup_{i\in\mathfrak{M}} i$, und $\bigtimes\mathfrak{M}$ dasselbe wie $\bigtimes_{i\in\mathfrak{M}} i$, wobei $\langle i \in \mathfrak{M} \mapsto i\rangle$ eine Familie endlicher Mengen mit endlicher Indexklasse ist. Durch Induktion zeigt sich nun für alle Zahlen n, dass für alle Familien endlicher Mengen, deren Indexklasse I n Elementen hat, die Klassen $\bigcup_{i\in I}\theta(i)$ und $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ endlich sind.
Induktionsanfang. Hat I 0 Elemente, so ist $I = \emptyset$ und $\bigcup_{i\in I}\theta(i)$ ebenfalls die leere Menge, während $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ die einelementige Menge $\{\emptyset\}$ ist (siehe die Bemerkung nach Definition 5.10.73 S. 150). Beides sind endliche Mengen.
Induktionsschluss. Voraussetzung. Der Satz sei für eine Zahl n bewiesen. Habe I nun $n+1$ Elemente und sei $\langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Familie endlicher Mengen. Nach Lemma 5.17.16 S. 240 gehen wir zu einer Menge I^* mit n Elementen über, indem wir aus I ein Element j entfernen. Dann ist $\langle i \in I^* \mapsto \theta(i)\rangle$ auch eine Familie endlicher Mengen und nach Voraussetzung sind $\bigcup_{i\in I^*}\theta(i)$ sowie $\bigtimes_{i\in I^*}\theta(i)$ endliche Mengen. Auch $\theta(j)$ ist endlich: Denn $\theta(j)$ – wobei j das aus I entfernte j ist – bezeichnet eine Menge aus der Familie $\langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$, die nach Voraussetzung eine Familie «endlicher Mengen» ist. Nun ist aber $\bigcup_{i\in I}\theta(i)$ die Vereinigung der endlichen Menge $\bigcup_{i\in I^*} f_i$ mit f_j und muss daher nach (5.161 S. 251) auch selbst eine endliche Menge sein. Nach (5.162 S. 251) ist auch $\theta(j) \times \bigtimes_{i\in I^*}\theta(i)$ endlich. Wenn sich also noch zeigt, dass $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ mit dem Kreuzprodukt $\theta(j) \times \bigtimes_{i\in I^*}\theta(i)$ gleichmächtig ist, sind wir fertig, denn dann folgt aus (5.143 S. 244), dass auch $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ endlich ist. So bleibt noch zu zeigen, dass es eine Bijektion von $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ in $\theta(j)\times\bigtimes_{i\in I^*}\theta(i)$ gibt, so dass beide Klassen gleichmächtig sind.
Bezeichnen wir für jede Funktion f aus $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ mit f^* die Einschränkung von f auf I^*, so liegt f^* in $\bigtimes_{i\in I^*}\theta(i)$, so dass die Funktion F, die jedes f aus $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ auf das Paar $\langle f(j), f^*\rangle$ wirft, eine Funktion von $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ in $\theta(j) \times \bigtimes_{i\in I^*}\theta(i)$ ist.
Dieses F ist injektiv: Für verschiedene f, g aus $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$ gibt es mindestens ein x aus I, für das $f(x) \neq g(x)$ ist, und dieses x liegt entweder in I^* oder ist $= j$. Ist $x \in I^*$, so folgt $f^* \neq g^*$, d. h. die zweiten Komponenten der Paare, auf die f und g von F geworfen werden, stimmen nicht überein. Ist $x = j$, so ist $f(j) \neq g(j)$, d. h. die ersten Komponenten der Paare, auf die f und g von F geworfen werden, stimmen nicht überein. In jedem Fall sind also die Paare $F(g)$ und $F(f)$ verschieden.
F ist auch surjektiv: Ist $\langle a, h\rangle$ aus $\theta(j) \times \bigtimes_{i\in I^*}\theta(i)$, also a aus $\theta(j)$ und h ein Funktion aus $\bigtimes_{i\in I^*}\theta(i)$, so ist die Funktion f, welche die Würfe von h mitmacht und außerdem j auf a wirft, ein Element von $\bigtimes_{i\in I}\theta(i)$, und weil dann $f^* = h$ und $f(j) = a$ ist, wird f von F auf $\langle a, h\rangle$ geworfen.
So ist F eine Bijektion. □

Äquivalenz der beiden Formulierungen des Fundierungsaxioms 5.19.4 S. 254

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Es gibt keine unendliche $\in$-Kette.

(2) Jede nichtleere Mengenmenge $\mathfrak{M}$ hat ein Element M mit der Eigenschaft $M \cap \mathfrak{M} = \emptyset$.

Beweis. Es gelte zunächst (1). Angenommen, es gibt eine nichtleere Mengenmenge $\mathfrak{M}$, die *kein* Element M mit $\mathfrak{M} \cap M = \emptyset$ besitzt. Dann muss für *jedes* Element M von $\mathfrak{M}$ wahr sein, dass es ein Element X von $\mathfrak{M}$ gibt, das zugleich in M liegt; wir können also für jedes M ein solches X auswählen und M^+ nennen, so dass $M^+ \in M$ gilt. Da $\mathfrak{M}$ nichtleer ist, können wir außerdem ein Element M_0 von $\mathfrak{M}$ auswählen. Dann aber können wir eine Funktion f von ω in $\mathfrak{M}$ (d. h. ein ω-Tupel f) rekursiv wie folgt definieren: $f_0 := M_0$ und $f_{n+1} := {f_n}^+$. Ist nun i eine Zahl mit $i \neq 0$, so kürzen wir $i-1$ mit n ab. Dann gilt $n+1 = i$ und es folgt $f_i \underset{i=n+1}{=} f_{n+1} = f_n^+ \in f_n$, also $f_i \in f_n$. Nun war aber n Abkürzung von $i-1$ und wir haben $f_i \in f_{i-1}$. Damit ist gezeigt, dass f eine unendliche $\in$-Kette ist im Widerspruch zu (1). Also war die Annahme falsch und es gilt (2).

Sei umgekehrt (2) vorausgesetzt. ANGENOMMEN, es gibt eine unendliche $\in$-Kette f. Sei dann $\mathfrak{M}$ die Klasse, deren Elemente genau die f_i für $i \in \omega \setminus \{0\}$ sind. Nach (5.166 S. 253) sind alle diese f_i Mengen, so dass $\mathfrak{M}$ eine Mengenklasse ist. Außerdem ist $\mathfrak{M}$ ist eine Menge (denn die Einschränkung von f auf $\omega \setminus \{0\}$ ist eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge $\omega \setminus \{0\}$ und deren Wertebereich $\mathfrak{M}$ ist. Also ist $\mathfrak{M}$ nach dem Ersetzungsaxiom ebenfalls eine Menge), also insgesamt eine Mengenmenge. Da $\mathfrak{M}$ nichtleer ist (z. B. ist $f_1 \in \mathfrak{M}$), besitzt $\mathfrak{M}$ wegen (2) ein Element f_i, für welches $f_i \cap \mathfrak{M} = \emptyset$ gilt. Sei nun j die Zahl $i+1$, also der unmittelbare Nachfolger von i, dann ist i der unmittelbare Vorgänger von j, also $i = j-1$. Dann ist $f_i = f_{j-1}$, und da f eine unendliche $\in$-Kette ist, gilt $f_j \in f_{j-1}$, d. h. $f_j \in f_i$. Zugleich liegt f_j in $\mathfrak{M}$ (denn der Index j ist als Nachfolger von i nicht 0). Insgesamt ist also $f_j \in f_i \cap \mathfrak{M}$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die ANNAHME falsch war, und so gilt (1). □

Theorem 5.20.1 S. 258

Seien die Klassen A_1, A_2 und B_1, B_2 jeweils disjunkt, und es gelte $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$.
Dann folgt $A_1 \cup A_2 \ \sim\ B_1 \cup B_2$. Dies bleibt wahr, wenn man $\sim$ durch $\precsim$ ersetzt.

Beweis. Wegen $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$ gibt es eine Bijektion f_1 von A_1 in B_1 und eine Bijektion f_2 von A_2 in B_2. Da sowohl A_1 und A_2 wie auch B_1 und B_2 disjunkt sind, haben f_1 und f_2 weder gemeinsame Argumente noch Werte, so dass $f_1 \cup f_2$ wegen (5.39 S. 144) eine Bijektion von $A_1 \cup A_2$ in $B_1 \cup B_2$ ist. Also gilt $A_1 \cup A_2 \ \sim\ B_1 \cup B_2$. Ersetzt man nun in der Behauptung $\sim$ durch $\precsim$, so braucht man im Beweis nur «Bijektion» durch «Injektion» und $\sim$ durch $\precsim$ zu ersetzen. □

Korollar 5.20.2 S. 258

Gilt $A_1 \precsim B_1$ und $A_2 \sim B_2$	so folgt	$A_1^{A_2} \ \precsim\ B_1^{B_2}$.	(5.169)
Gilt $A_1 \precsim B_1 \neq \emptyset$ und $A_2 \precsim B_2$	so folgt	$A_1^{A_2} \ \precsim\ B_1^{B_2}$.	(5.170)

Beweis von (5.169). Aus der Voraussetzung folgt wegen (5.90 S. 200), dass es eine Injektion f_1 von A_1 in B_1 und eine Bijektion f_2 von A_2 in B_2 gibt. Dann ist die Funktion F, die jede Funktion x aus $A_1^{A_2}$ auf die Funktion $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1$ aus $B_1^{B_2}$ wirft[19] injektiv. Sind nämlich x und ξ verschiedene Funktionen aus $A_1^{A_2}$, so gibt es ein a_2 aus A_2 mit $x(a_2) \neq \xi(a_2)$. Da f_1 injektiv ist, folgt $f_1(x(a_2)) \neq f_1(\xi(a_2))$. Sei $b_2 := f_2(a_2)$, dann gilt $f_2^{\rightharpoonup}(b_2) = a_2$. Wir können also in der Formel $f_1(x(a_2)) \neq f_1(\xi(a_2))$ das a_2 durch $f_2^{\rightharpoonup}(b_2)$ ersetzen und erhalten $f_1(x(f_2^{\rightharpoonup}(b_2))) \neq f_1(\xi(f_2^{\rightharpoonup}(b_2)))$, also sind die Funktionen $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1$ und $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright \xi \looparrowright f_1$ verschieden, d. h. es gilt $F(x) \neq F(\xi)$. So ist F eine Injektion und nach (5.90 S. 200) gilt $A_1^{A_2} \precsim B_1^{B_2}$.

Beweis von (5.170)**.** Wir können den Beweis von (5.169) mit zwei Abänderungen übernehmen: Erstens ist als f_2 nun eine Injektion von A_2 in B_2 (die nicht mehr surjektiv auf B_2 sein muss); ihr Wertebereich sei B_2^*. Zweitens können wir als Funktion F nicht mehr diejenige Funktion nehmen, die jedes x aus $A_1^{A_2}$ auf die Funktion $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1$ wirft, weil die letztere nur noch eine Funktion von $A_1^{A_2}$ in $B_1^{B_2^*}$ ist. Wir können diese Funktion aber mit der Funktion g vereinigen, deren Definitionsbereich $B_2 \setminus B_2^*$ ist und die jedes Element dieses Definitionsbereichs auf irgendein beliebig ausgewähltes Element von B_1 wirft (damit ein solches g existiert, mussten wir $B_1 \neq \emptyset$ voraussetzen): Da die Definitionsbereiche von $(f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1)$ und g kein gemeinsames Element haben, ist ihre Vereinigung $(f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1) \cup g$ wegen Theorem 5.38 S. 144 eine Funktion von B_2 in B_1, die wir nun F nennen. Dieses F ist nun also eine Funktion von $A_1^{A_2}$ in $B_1^{B_2}$.
F ist injektiv: Für verschiedene Elemente x und ξ aus $A_1^{A_2}$ gilt nämlich $F(x) \neq F(\xi)$. Als Beweis hierfür können wir den im Beweis von 5.169 ausgeführten Injektivitätsbeweis übernehmen, wobei zu beachten ist, dass $b_2 := f_2(a_2)$ nun in $\mathtt{Wb}(f_2)$, d. h. in B_2^* liegt, so dass $f^{\rightharpoonup}(b_2)$ wohldefiniert ist. Es ergibt sich dann also die Verschiedenheit der Funktionen $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1$ und $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright \xi \looparrowright f_1$, d. h. die eine von ihnen (zum Beispiel $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1$) besitzt ein Element e, das nicht in der anderen (also nicht in $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright \xi \looparrowright f_1$) liegt. Ein solches e liegt auch nicht in g (sonst wäre e ein gemeinsames Element von g und $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1$, aber da

[19] Der Term $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1$ lässt zwei Interpretationen zu, nämlich $(f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x) \looparrowright f_1$ oder $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright (x \looparrowright f_1)$, aber beides bezeichnet dieselbe Funktion: diejenige, die jedes b aus B_2 auf $f_1(x(f_2^{\rightharpoonup}(b)))$ aus B_1 wirft.

die *Definitionsbereiche* von g und $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1$ kein gemeinsames Element haben, gilt dies auch für die Funktionen selbst), also liegt e weder in g noch in $f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright \xi \looparrowright f_1$, also auch nicht $(f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright \xi \looparrowright f_1) \cup g$, d. h. nicht in $F(\xi)$. Andererseits liegt e in $(f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1)$, also auch in $(f_2^{\rightharpoonup} \looparrowright x \looparrowright f_1) \cup g$, d. h. in $F(x)$. Daher sind $F(\xi)$ und $F(x)$ verschieden. So ist F injektiv und nach (5.90 S. 200) gilt $A_1^{A_2} \precsim B_1^{B_2}$. □

Theorem 5.20.3 S. 258

Seien A_1, A_2, B_1, B_2, A, B Klassen und sei n eine Zahl.

Gilt $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$	so folgt	$A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.	(5.171)
Gilt $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$	so folgt	$A_1^{A_2} \sim B_1^{B_2}$.	(5.172)
Gilt $A \sim B$	so folgt	$\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.	(5.173)
Gilt $A \sim B$	so folgt	$A^n \sim B^n$.	(5.174)

Zusatz: (5.171), (5.173) und (5.174) bleiben wahr, wenn man überall $\sim$ durch $\precsim$ ersetzt.

Beweis. **Vorbemerkung**: zum Beweis von (5.171), (5.173) und (5.174) reicht es, den Zusatz zu beweisen, d. h. den entsprechenden Satz mit $\precsim$ statt $\sim$. Denn aus der VORAUSSETZUNG, dass dieser gilt (also z. B. aus $A \precsim B$ stets $A^n \precsim B^n$ folgt), lässt sich der entsprechende $\sim$-Satz wie folgt herleiten: Aus $A \sim B$ folgt auch $B \sim A$, und dann sowohl $A \precsim B$ als auch $B \precsim A$. Nach VORAUSSETZUNG folgt daher sowohl $A^n \precsim B^n$ als auch $B^n \precsim A^n$, und wegen Theorem 5.15.5 S. 201 folgt daraus $A^n \sim B^n$.

Beweis von (5.171) (mit $\precsim$ statt $\sim$). Wegen (5.90 S. 200) können wir voraussetzen, dass eine Injektion f_1 von A_1 in B_1 und eine Injektion f_2 von A_2 in B_2 gegeben ist, und müssen zeigen, dass es eine Injektion von $A_1 \times A_2$ in $B_1 \times B_2$ Nun ist aber die Funktion F, die jedes Paar $\langle a_1, a_2 \rangle$ aus $A_1 \times A_2$ auf $\langle f_1(a_1), f_2(a_2) \rangle$ wirft, in der Tat eine Injektion von $A_1 \times A_2$ in $B_1 \times B_2$: Sind nämlich $\langle a_1, a_2 \rangle$ und $\langle \widehat{a_1}, \widehat{a_2} \rangle$ verschiedene Paare aus $A_1 \times A_2$, so ist $a_1 \neq \widehat{a_1}$ oder $a_2 \neq \widehat{a_2}$, und da f_1 bzw. f_2 injektiv ist, ist dann $f_1(a_1) \neq f_1(\widehat{a_1})$ bzw. $f_2(a_2) \neq f_2(\widehat{a_2})$. Auf jeden Fall ist also $\langle f_1(a_1), f_2(a_2) \rangle \neq \langle f_1(\widehat{a_1}), f_2(\widehat{a_2}) \rangle$, d. h. $F(\langle a_1, a_2 \rangle) \neq F(\langle \widehat{a_1}, \widehat{a_2} \rangle)$.

Beweis von (5.172). Wegen $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$ folgt per Symmetrie von $\sim$, dass auch $B_1 \sim A_1$ und $B_2 \sim A_2$ gilt, und daher sowohl $\ll A_1 \precsim B_1$ und $A_2 \sim B_2 \gg$ als auch $\ll B_1 \precsim A_1$ und $B_2 \sim A_2 \gg$ gilt. Daraus folgt mittels (5.169), dass sowohl $A_1^{A_2} \precsim B_1^{B_2}$ als auch $B_1^{B_2} \precsim A_1^{A_2}$ ist, und daraus erhalten wir mittels Theorem 5.15.5 S. 201, dass $A_1^{A_2} \sim B_1^{B_2}$ gilt.

Beweis von (5.173) (mit $\precsim$ statt $\sim$). Seien a und b zwei verschiedene Individuen. Per Reflexivität von $\precsim$ gilt $\{a, b\} \precsim \{a, b\}$, wobei $\{a, b\}$ nichtleer ist, und nach Voraussetzung gilt außerdem $A \precsim B$, also folgt nach (5.170), dass $\{a, b\}^A \precsim \{a, b\}^B$. Nach Theorem 5.18.3 S. 249 ist $\mathcal{P}(A) \sim \{a, b\}^A$ und $\mathcal{P}(B) \sim \{a, b\}^B$. Nach Theorem 5.15.4 S. 201 können wir also in $\{a, b\}^A \precsim \{a, b\}^B$ das $\{a, b\}^A$ durch $\mathcal{P}(A)$ und das $\{a, b\}^B$ durch $\mathcal{P}(B)$ ersetzen und erhalten $\mathcal{P}(A) \precsim \mathcal{P}(B)$.

Beweis von (5.174) (mit $\precsim$ statt $\sim$). Da wir nach Vereinbarung 5.18.9 S. 251 mit A^n und B^n die Potenz der Klasse mit der Menge n meinen, folgt dies aus (5.169) (und weil $n \sim n$ gilt).[20] □

Theorem 5.20.6 S. 259

C ist unendlich	$\Leftrightarrow$	C hat eine abzählbar unendliche Teilklasse.	(5.175)
C ist höchstens abzählbar unendlich	$\Leftrightarrow$	C ist endlich oder abzählbar unendlich.	(5.176)
C ist überabzählbar	$\Leftrightarrow$	C ist unendlich und liegt nicht auf $\llbracket \omega \rrbracket$.	(5.177)

Beweis von (5.175). Ist C unendlich, so gilt nach (5.146 S. 245) $\omega \prec C$, weshalb es nach (5.90 S. 200) eine Injektion f von ω in C gibt. Diese ist eine Bijektion von ω in die Teilklasse $\mathtt{Wb}(f)$ von C. So ist $Wb(f)$ mit ω

[20] Aber auch, wenn man A^n im Sinne von $A_{Klasse} \uparrow_{Zahl} n$ verstehen möchte, wäre die Behauptung wegen Theorem 5.18.7 S. 250 und Theorem 5.15.4 S. 201 richtig.

gleichmächtig, also nach Theorem 5.20.5 abzählbar unendlich: Es handelt sich um eine abzählbar unendliche Teilklasse von C. Ist umgekehrt vorausgesetzt, dass C eine unendliche Teilklasse besitzt, so ist C als Oberklasse einer unendlichen Klasse nach (5.144 S. 244) auch selbst unendlich.

Beweis von (5.176). Nach Theorem 5.17.38 S. 245 ist C genau dann endlich, wenn $C \prec \omega$, und per Definition genau dann abzählbar unendlich, wenn $C \sim \omega$. Somit ist C genau dann endlich oder abzählbar unendlich, wenn $C \precsim \omega$, d. h. wenn C höchstens abzählbar unendlich ist.

Beweis von (5.177). Sei C überabzählbar unendlich. Dann gilt $\omega \prec C$, so dass C nicht auf $\llbracket\omega\rrbracket$ liegt, und erst recht $\omega \precsim C$, so dass C nach Kriterium (5.153 S. 247) unendlich ist. Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass C eine unendliche nicht auf $\llbracket\omega\rrbracket$ liegende Klasse ist. Da C unendlich ist, gilt nach dem genannten Kriterium $\omega \precsim C$, also $\omega \prec C$ oder $\omega \sim C$. Da aber C nicht auf $\llbracket\omega\rrbracket$ liegt, gilt $\omega \sim C$ *nicht*, also gilt $\omega \prec C$, d. h. C ist überabzählbar unendlich. □

Lemma 5.20.7 S. 259

Ist U unendlich und $\{a\}$ einelementig, so ist U mit $U \cup \{a\}$ gleichmächtig.

Beweis. Falls $a \in U$, ist dies trivial, denn dann ist $U \cup \{a\}$ dasselbe wie U, also gilt $U \sim U \cup \{a\}$ per Reflexivität von $\sim$. Sei also $a \notin U$. Da U unendlich ist, ist U mit einer echten Teilklasse U^* von U gleichmächtig. Da U^* echte Teilklasse von U ist, gibt es ein u aus U, das nicht in U^* liegt, und aus $u \notin U^*$, $a \notin U$ und $U^* \sim U$ folgt (nach Theorem 5.12.4 S. 165) $U \cup \{a\} \sim U^* \cup \{u\}$.
Damit können wir aber in der wahren Aussage $U^* \cup \{u\} \precsim U$ (die gemäß 5.89 S. 200 daraus folgt, dass $U^* \cup \{u\}$ eine Teilklasse von U ist) gemäß Theorem 5.15.4 S. 201) das $U^* \cup \{u\}$ durch das gleichmächtige $U \cup \{a\}$ ersetzen, und erhalten $U \cup \{a\} \precsim U$. Andererseits gilt auch $U \precsim U \cup \{a\}$ (dies folgt wieder aus 5.89, weil U eine Teilklasse von $U \cup \{a\}$ ist), also folgt insgesamt mit Theorem 5.15.5 S. 201, dass $U \sim U \cup \{a\}$. □

Theorem 5.20.8 S. 259

Ist U unendlich und E endlich, so ist U mit $U \cup E$ und mit $U \setminus E$ gleichmächtig.

Beweis. Induktion über die Anzahl der Elemente von E zeigt, dass $U \sim U \cup E$. Induktionsanfang. Hat E 0 Elemente, so ist E leer, also ist $U = U \cup E$, und $U \sim U \cup E$ gilt per Reflexivität von $\sim$. Induktionsschluss. Voraussetzung. $U \sim U \cup E^*$ gilt, wann immer E^* n Elemente hat. Habe nun E $n+1$ Elemente. Gemäß Lemma 5.17.16 S. 240 gehen wir von E zu einer Menge E^* mit n Elementen über, indem wir aus E ein Element e entfernen. Dann ist nach Voraussetzung $U \sim U \cup E^*$. Nun ist $U \cup E^*$ als Oberklasse des unendlichen U unendlich, also folgt nach Lemma 5.20.7 S. 259, dass $(U \cup E^*) \sim (U \cup E^*) \cup \{e\}$, das heißt $(U \cup E^*) \sim (U \cup E)$. Zusammen mit $U \sim U \cup E^*$ ergibt sich per Transitivität von $\sim$, dass $U \sim U \cup E$. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen und die erste Behauptung bewiesen.
Um auch $U \sim (U \setminus E)$ zu zeigen, betrachten wir nun $E^* := U \cap E$. Da dies der in U liegenden Teil von E ist, gilt $U \setminus E = U \setminus E^*$, und somit genügt es, $U \sim (U \setminus E^*)$ zu zeigen. Da E^* gemäß (5.143 S. 244) als Teilklasse von E endlich ist, während $U \setminus E^*$ unendlich ist (denn wäre $U \setminus E^*$ ebenso wie E^* endlich, so wäre U als Vereinigung dieser Mengen gemäß 5.161 S. 251 ebenfalls endlich), folgt aus dem bewiesenen Teil des Satzes, dass $(U \setminus E^*) \cup E^* \sim U \setminus E^*$. Wegen $U = (U \setminus E^*) \cup E^*$ heißt dies, dass $U \sim U \setminus E^*$. □

Theorem 5.20.9 S. 260

Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$.
Sind dann U_1 und U_2 mit U gleichmächtig, so gilt dies auch für $U_1 \cup U_2$.

Beweis. **Vorbemerkung**: Die Behauptung ist mit $U \sim U \times 2$ äquivalent (wobei die Zahl 2 die Menge $\{0, 1\}$ ist). Um dies zu sehen, beachte man zunächst, dass die Klassen $U \times \{0\}$ und $U \times \{1\}$ sind mit U gleichmächtig (die Funktion, die jedes Element u aus U auf $\langle u, 0\rangle$ bzw. auf $\langle u, 1\rangle$ wirft, ist eine Bijektion von U in $U \times \{0\}$ bzw. in $U \times \{1\}$), und sind (daher) ebenfalls unendliche Mengen oder gehören zur Stufe $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\mathbb{D}$.

Wenn also die Behauptung zutrifft, muss die Vereinigung dieser beiden Klassen mit U gleichmächtig sein. Diese Vereinigung ist aber die Klasse $U \times \{0,1\}$, d. h. die Klasse $U \times 2$, und somit muss $U \sim U \times 2$ gelten.
Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass $U \sim (U \times 2)$ gilt. Dann gibt es eine g Bijektion von U in $U \times 2$, eine Bijektion f_0 von $U \times \{0\}$ in das gleichmächtige U_1, und ebenso eine Bijektion f_1 von $U \times \{1\}$ in U_2. Also ist $f := f_0 \cup f_1$ eine Funktion von $U \times 2$ in $U_1 \cup U_2$, die nicht injektiv sein muss (denn U_1 und U_2 könnten gemeinsame Elemente haben), wohl aber surjektiv ist; daher ist $g \looparrowright f$ eine Surjektion von U in $U_1 \cup U_2$, so dass (gemäß 5.91 S. 200) $U \succsim U_1 \cup U_2$ gilt. Außerdem gibt es wegen $U \sim U_1$ eine Bijektion von U in U_1; diese ist eine Injektion von U in $U_1 \cup U_2$, so dass (gemäß 5.90 S. 200) $U_1 \cup U_2 \precsim U$. Insgesamt folgt mit Theorem 5.15.5 S. 201, dass $U \sim U_1 \cup U_2$.

Wir zeigen also, dass $U \sim U \times 2$. Hierbei unterscheiden wir vier Fälle.
1. Fall: U liegt auf Stufe $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$. Dann gilt $U \sim \mathbb{D}$, also $\mathbb{D} \sim U$, also wegen $2 \sim 2$ mittels (5.171 S. 258) $(\mathbb{D} \times 2) \sim (U \times 2)$. Außerdem gilt $\mathbb{D} \sim \mathbb{D} \times 2$, denn wegen $\mathbb{D} \times 2 \subseteq \mathbb{D}$ gilt $\mathbb{D} \precsim \mathbb{D} \times 2$, und da die Funktion, die jedes x aus $\mathbb{D}$ auf $\langle x, 0\rangle$ wirft, eine Injektion von $\mathbb{D}$ in $\mathbb{D} \times 2$ ist, gilt auch $\mathbb{D} \times 2 \precsim \mathbb{D}$, so dass mit Theorem 5.15.5 S. 201 folgt, dass $\mathbb{D} \sim (\mathbb{D} \times 2)$. Insgesamt gilt also $U \sim \mathbb{D} \sim (\mathbb{D} \times 2) \sim (U \times 2)$.
2. Fall: U liegt auf der Stufe $\llbracket \Omega \rrbracket$ der wohlordnungstragenden Unmengen. Wir haben nun im Beweis von Theorem 5.15.19 auf S. 417 gezeigt, dass über $\mathtt{On} \times \mathtt{On}$ eine Wohlordnungsrelation existiert; diese ist auch über der Teilklasse $\mathtt{On} \times 2$ eine solche, weshalb gemäß Theorem 5.15.19 S. 205 $\mathtt{On} \sim \mathtt{On} \times 2$ gilt. Weiter gilt wegen $U \in \llbracket \Omega \rrbracket$, dass $U \sim \mathtt{On}$, also $\mathtt{On} \sim U$, und wegen 2×2 folgt mittels (5.171 S. 258), dass $(\mathtt{On} \times 2) \sim (U \times 2)$. Insgesamt folgt nun $U \sim \mathtt{On} \sim (\mathtt{On} \times 2) \sim (U \times 2)$.
3. Fall: U ist abzählbar unendlich, also Trägerklasse eines Modells der Arithmetik. Dann sind die Klassen U_g und U_u der geraden bzw. ungeraden Zahlen dieses Modells sind ebenfalls Träger von Modellen der Arithmetik (siehe 5.16.56 S. 229), also abzählbar unendlich, und dasselbe gilt auch für $U \times \{0\}$ und $U \times \{1\}$. Daher folgt $U_u \sim U \times \{0\}$ und $U_g \sim U \times \{1\}$, und da einerseits U_u und U_g und andererseits $U \times \{0\}$ und $U \times \{1\}$ disjunkt sind (Ersteres nach Theorem 5.16.57 S. 230, Letzteres trivialerweise), folgt mit Theorem 5.20.1 S. 258, dass $U_u \cup U_g \sim (U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\})$, das heißt $U \sim U \times 2$.
4. Fall: U ist eine beliebige unendliche Menge.[21] Sei dann $\mathfrak{F}$ die Klasse aller Funktionen f, die als Definitionsbereich eine Menge $X \times 2$ für eine unendliche Teilmenge X von U haben und Bijektionen von $X \times 2$ in X sind. Jedes solche f ist Teilklasse der Menge $(U \times 2) \times U$, also ist f per Teilmengenaxiom eine Menge und liegt in $\mathcal{P}((U \times 2) \times U)$, was per Potenzmengenaxiom ebenfalls eine Menge ist. Schließlich ist $\mathfrak{F}$ dann als Teilklasse dieser Menge ebenfalls eine Menge. Die Menge $\mathfrak{F}$ ist nun nichtleer, denn U besitzt gemäß (5.175 S. 259) eine abzählbar unendliche Teilmenge N. Nach Teil (3) des Beweises gilt also $N \times 2 \sim N$, so dass es eine Bijektion f von $N \times 2$ in N gibt. Diese liegt in $\mathfrak{F}$.
Wir betrachten nun die Relation $<$ in $\mathfrak{F}$ mit $f_1 < f_2$ genau dann wenn $f_1 \subset f_2$. Diese Relation ist eine Halbordnung über $\mathfrak{F}$ und jede $<$-Kette $\mathfrak{K}$ besitzt in $\mathfrak{F}$ eine obere Schranke: Falls $\mathfrak{K} = \emptyset$, ist jedes Element von $\mathfrak{F}$ eine solche, und im Fall $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ zeigt sich wie folgt, dass $\bigcup \mathfrak{K}$ eine obere $<$-Schranke von $\mathfrak{K}$ ist. $\bigcup \mathfrak{K}$ Für jedes f aus $\mathfrak{K}$ gilt $f \subseteq \bigcup \mathfrak{K}$, und das bedeutet $f \leq \bigcup \mathfrak{K}$, falls $\bigcup \mathfrak{K} \in \mathfrak{F}$ ist. So müssen wir nur noch zeigen, dass $\bigcup \mathfrak{K}$ in $\mathfrak{F}$ liegt. Sei hierzu $\mathfrak{X}$ die Klasse aller unendlichen Teilmengen X von U, für die $X \times 2$ Definitionsbereich eines Elements f von $\mathfrak{K}$ ist; $\mathfrak{X}$ ist als Teilklasse von $\mathcal{P}(U)$ eine Menge, und $\bigcup \mathfrak{X}$ ist eine Teilmenge von U. Da die Elemente X von $\mathfrak{X}$ unendlich sind und $\mathfrak{X}$ nichtleer ist (da $\mathfrak{K}$ in dem hier betrachteten Fall nichtleer ist), ist $\bigcup \mathfrak{X}$ als Oberklasse eines unendlichen X auch selbst unendlich. Ferner ist die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{K}$ eine Relation, die alle Aktionen der in ihr enthaltenen Funktionen ausführt, und wenn man beachtet, dass je zwei Elemente f, g der Kette $\mathfrak{K}$ Injektionen mit $f \subseteq g$ oder $g \subseteq f$ sind (weil per Linearität $f \leq g$ oder $g \leq f$ gilt), so sieht man, dass diese Relation links– und rechtseindeutig ist ($\bigcup \mathfrak{K}$ ist linkseindeutig: andernfalls gäbe es x, y, z mit $y \neq z$, so dass $\langle x, y\rangle$ und $\langle x, z\rangle$ in $\bigcup \mathfrak{K}$ liegen, also gäbe es Injektionen f, g aus $\mathfrak{K}$, so dass $\langle x, y\rangle \in f$ und $\langle x, z\rangle \in g$, aber wegen $f \subseteq g$ oder $g \subseteq f$ müsste dann auch $\langle x, y\rangle \in g$ bzw. $\langle x, z\rangle \in f$ gelten, so dass f bzw. g nicht linkseindeutig wäre; analog beweist man die Rechtseindeutigkeit von $\bigcup \mathfrak{K}$). So ist also die Relation $\bigcup \mathfrak{K}$ eine Injektion. Diese hat als Definitionsbereich offensichtlich $\bigcup \mathfrak{X} \times 2$ und als Wertebereich $\bigcup \mathfrak{X}$: Es handelt sich also um eine Bijektion von $\bigcup \mathfrak{X} \times 2$ in $\bigcup \mathfrak{X}$. Daher muss $\bigcup \mathfrak{K}$ (nach Definition von $\mathfrak{F}$) in $\mathfrak{F}$ liegen. In der Tat hat also jede $<$-Kette in $\mathfrak{F}$ eine obere Schranke.
Damit sind aber die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas 5.14.20 gegeben und $\mathfrak{F}$ besitzt deshalb ein maximales Element $f_{\max}$, welches eine Bijektion von $X_{\max} \times 2$ in $X_{\max}$ ist, so dass $X_{\max} \sim X_{\max} \times 2$ gilt; dabei ist $X_{\max}$ eine unendliche Teilmenge von U. Nun zeigt sich aber, dass $U \setminus X_{\max}$ endlich ist: Denn bei Annahme des Gegenteils gibt es nach (5.175 S. 259) eine abzählbar unendliche Teilmenge N von $U \setminus X_{\max}$,

[21] Die Beweisidee für diesen Fall fand ich bei Halmos, *Set Theory* S. 121.

für die nach Teil (3) des Beweises $N \sim (N \times 2)$ gilt. Dann gibt es eine Bijektion f von $N \times 2$ in N, so dass $f_{\max} \cup f$ eine Bijektion von $(X_{\max} \cup N) \times 2$ in $X_{\max} \cup N$ ist. Diese liegt in $\mathfrak{F}$ und ist bezüglich $<$ größer als f im Widerspruch zur Maximalität von f. Also war die ANNAHME falsch und $U \setminus X_{\max}$ ist endlich. Dann muss aber gemäß Theorem 5.20.8 $X_{\max} \sim X_{\max} \cup (U \setminus X_{\max})$ gelten, das heißt aber $X_{\max} \sim U$. Daraus (und weil $2 \sim 2$) aber folgt mittels (5.171 S. 258), dass $X_{\max} \times 2 \sim U \times 2$, so dass insgesamt gilt: $U \sim X_{\max} \sim (X_{\max} \times 2) \sim (U \times 2)$. □

Korollar 5.20.10 S. 260

Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket \Omega \rrbracket$ oder $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$, und sei $A \precsim U$.
Dann ist $U \cup A$ mit U gleichmächtig.

Beweis. Zunächst gilt das **Lemma**, dass es *zu disjunkten Klassen X, Y mit $X \precsim Y$ stets eine Oberklasse X^+ von X gibt mit $X^+ \sim Y$.*

Beweis des Lemmas: Wegen $X \precsim Y$ gibt es eine Injektion f von X in Y. Diese ist eine Bijektion von X in eine Teilklasse Y^* von Y. Sei g die Funktion, die jedes x aus $Y \setminus Y^*$ auf sich selbst wirft. Da weder X und $Y \setminus Y^*$ noch Y^* und $Y \setminus Y^*$ noch gemeinsame Elemente haben (beachte die vorausgesetzte Disjunktheit von X und Y), ist $h := f \cup g$ gemäß (5.39 S. 144) eine Injektion, genauer eine Bijektion von $X \cup (Y \setminus Y^*)$ in Y. Daher besitzt die Oberklasse $X^+ := X \cup (Y \setminus Y^*)$ von X die Eigenschaft, dass $X^+ \sim Y$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun sind $A_0 := A \times \{0\}$ und $U_1 := U \times \{1\}$ disjunkt, und es gilt $A_0 \sim A$ und $U_1 \sim U$. Wegen $A \precsim U$ folgt also gemäß Theorem 5.15.4 S. 201, dass $A_0 \precsim U_1$. Folglich gibt es nach obigem Lemma eine Oberklasse A^+ von A_0 mit $A^+ \sim U_1$. Da A^+ Oberklasse von A_0 ist, gilt $(U_1 \cup A_0) \subseteq (U_1 \cup A^+)$, weshalb gemäß (5.89 S. 200) $(U_1 \cup A_0) \precsim (U_1 \cup A^+)$ ist. Außerdem gilt $(U \cup A) \precsim (U_1 \cup A_0)$, denn wegen $U_1 \sim U$ und $A_0 \sim A$ gibt eine Bijektion f_1 von U_1 in U und eine Bijektion f_0 von A_0 in A, und es ist dann $f_1 \cup f_0$ eine Surjektion von in $U_1 \cup A_0$ in $U \cup A$ (die injektiv ist, wenn U und A disjunkt sind). Also gilt nach (5.91 S. 200), dass $(U_1 \cup A_0) \succsim (U \cup A)$, d. h. $(U \cup A) \precsim (U_1 \cup A_0)$. Insgesamt gilt also $(U \cup A) \precsim (U_1 \cup A_0) \precsim (U_1 \cup A^+)$ und somit $(U \cup A) \precsim (U_1 \cup A^+)$. In dieser Aussage können wir aber nach Theorem 5.15.4 S. 201 das $U_1 \cup A^+$ durch U ersetzen (denn weil U unendlich ist oder der Stufe $\llbracket \omega \rrbracket$ oder $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$ angehört, ist U nach Theorem 5.20.9 mit $U_1 \cup A^+$ gleichmächtig).[22] So erhalten wir $U \cup A \precsim U$. Andererseits gilt wegen (5.89) auch $U \precsim U \cup A$, und mittels Theorem 5.15.5 S. 201 folgt schließlich $U \sim U \cup A$. □

Korollar 5.20.11 S. 260

Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufe $\llbracket \Omega \rrbracket$, und sei $A \prec U$.
Dann ist U mit $U \setminus A$ gleichmächtig.

Beweis. Sei $A^* := A \cap U$ der in U gelegene Teil von A. Dann ist $U \setminus A = U \setminus A^*$, so dass nur zu zeigen bleibt, dass $U \setminus A^* \sim U$. ANGENOMMEN, $U \setminus A^* \sim U$ ist falsch. Nun ist aber $U \setminus A^*$ eine Teilklasse von U, weshalb $U \setminus A^* \precsim U$ gilt, und zusammen mit der ANNAHME ergibt sich gemäß (5.88 S. 200), dass $U \setminus A^* \prec U$. Ferner ist A^* Teilklasse von A, weshalb $A^* \precsim A$ gilt, und da nach Voraussetzung $A \prec U$ ist, folgt mit (5.97 S. 201), dass $A^* \prec U$. Sowohl A^* als auch $U \setminus A^*$ sind demnach $\prec U$, und beides müssen dann *Mengen* sein: Da nämlich U nach Voraussetzung eine Menge oder mit Ω ($= \mathtt{On}$) gleichmächtig ist, gilt wegen (5.105 S. 203), dass in jedem Fall $U \precsim \mathtt{On}$ ist, also folgt $A^* \prec U \precsim \mathtt{On}$, also nach (5.97 S. 201) $A^* \prec \mathtt{On}$, weshalb A^* gemäß (5.106 S. 203) eine Menge ist. Da auch $(U \setminus A^*) \prec U \precsim \mathtt{On}$ ist, folgt analog, dass auch $U \setminus A^*$ eine Menge ist.[23] Ferner ist $(U \setminus A^*) \cup A^*$ mit U identisch, weshalb mindestens eine der beiden Klassen $U \setminus A^*$ und A^* unendlich sein muss (wären beide endlich, so wäre nach (5.161 S. 251) auch ihre Vereinigung U endlich). Da nun A^* und $U \setminus A^*$ beides Mengen sind, gilt wegen (5.99 S. 201) genau eine der beiden Alternativen $U \setminus A^* \precsim A^*$ oder $A^* \precsim U \setminus A^*$. Wenn $U \setminus A^* \precsim A^*$ gilt, so zeigt sich, dass die Menge A^* unendlich ist, denn wir haben ja schon festgestellt, dass eine der Mengen A^* und $U \setminus A^*$ unendlich ist: Ist nun A^* unendlich, gilt bereits,

[22] Theorem 5.20.9 ist anwendbar, weil U_1 und A^+ mit U gleichmächtig sind.

[23] Beides wäre nicht mehr gewährleistet, wenn U einer höheren Stufe als $\llbracket \Omega \rrbracket$ angehören würde, und deshalb könnte der Beweis dann nicht in dieser Weise geführt werden.

was wir zeigen wollen; ist aber $U \setminus A^*$ unendlich, folgt aus $U \setminus A^* \precsim A^*$ mittels (5.144 S. 244), dass A^* auch jetzt unendlich ist. Da A^* also in jedem Fall unendlich ist, können wir können mit Korollar 5.20.10 S. 260 schließen, dass die Vereinigung $A^* \cup (U \setminus A^*)$ (das ist U) mit A^* gleichmächtig ist: Es gilt $U \sim A^*$. Dann können wir aber in der wahren Aussage $A^* \prec U$ das A^* durch das gleichmächtige U ersetzen und erhalten $U \prec U$, was falsch ist.
Wenn aber $A^* \precsim U \setminus A^*$ gilt, dann folgt analog, dass $U \setminus A^*$ unendlich ist, und wir können mit Korollar 5.20.10 schließen, dass die Vereinigung $A^* \cup (U \setminus A^*)$ (das ist U) mit $U \setminus A^*$ gleichmächtig ist. Es gilt dann $U \sim U \setminus A^*$ und wir können wir aber in der wahren Aussage $U \setminus A^* \prec U$ das $U \setminus A^*$ durch das gleichmächtige U ersetzen und erhalten wieder $U \prec U$, was falsch ist. Da sich somit in jedem Fall ein Widerspruch ergibt, war die Annahme falsch und das Theorem ist bewiesen. □

Lemma 5.20.12 S. 261

Ist N abzählbar unendlich, so ist $N \times N$ mit N gleichmächtig.

Beweis. N ist Trägerklasse eines Modells der Arithmetik, die Elemente von N können also als Zahlen aufgefasst werden. Ist nun $\langle m, n\rangle$ ein Zahlenpaar aus $N \times N$, so soll $m+n$ die *Komponentensumme* des Zahlenpaares heißen, während D_k die Teilklasse von $N \times N$, bezeichnen soll, welche genau die Zahlenpaare enthält, deren Komponentensumme $= k$ ist. Wir können D_k die *k-te Diagonalklasse von $N \times N$* nennen, denn sie enthält offensichtlich genau diejenigen Zahlen, die in unserer anschaulichen Darstellung von $N \times N$ (S. 260) auf der k-te Diagonalen des Rechtecks lagen.

Die Diagonalklasse D_k enthält nun *keine* Zahlenpaare, deren zweite Komponente größer als k ist: Angenommen, $\langle \ell, m\rangle$ ist ein solches Paar, so ist $k < m$, und nach Definition von $<$ gibt es eine von Null verschiedene Zahl x mit $k + x = m$. Dann folgt $k + (x + \ell) = (k + x) + \ell \underset{k+x=m}{=} m + \ell = k$, also $k + (x + \ell) = k$. Da $x + \ell$ von Null verschieden ist (wegen 5.127 S. 217, weil x von Null verschieden ist) folgt nach Definition von $<$, dass $k < k$, also war die Annahme falsch.

D_k enthält außerdem für jedes i, das kleiner oder gleich k ist, *genau ein* Zahlenpaar mit i als zweiter Komponente: Ist nämlich i kleiner als k, folgt nach Definition von $<$, dass es eine von Null verschiedene Zahl x gibt, mit $i + x = k$. Ist i gleich k, gibt es ebenfalls eine Zahl x mit $i + x = k$, nämlich die Zahl 0. In jedem Fall gibt es also eine Zahl x mit $i + x = k$. Das heißt aber: Die Komponentensumme von $\langle x, i\rangle$ ist k, so dass $\langle x, i\rangle$ Element von D_k ist. Doch kann D_k außer $\langle x, i\rangle$ nicht noch ein *weiteres* Zahlenpaar mit zweiter Komponente i enthalten: Ist nämlich auch $\langle y, i\rangle$ ein solches Paar, so folgt $i + y = k$. Da auch $i + x = k$, folgt mittels (5.128 S. 217), dass $x = y$, also sind $\langle x, i\rangle$ und $\langle y, i\rangle$ ein und dasselbe Paar. Wenn wir daher nun für Zahlen i und k mit $i \leq k$ definieren:

$D_{k,i}$ sei das zur Diagonalklasse D_k gehörigen Zahlenpaar mit zweiter Komponente i,

so sind die Elemente von D_k genau *die Zahlenpaare $D_{k,i}$ mit $i \leq k$*. Und da nun ferner *jedes* Zahlenpaar $\langle m, n\rangle$ aus $N \times N$ einer Diagonalklasse angehört (nämlich D_{m+n}), können wir jetzt jedes Zahlenpaar p als ein $D_{x,y}$ bezeichnen für gewisse Zahlen x, y mit $x \leq y$. Dabei ist y die zweite Komponente von p und x die Komponentensumme von p, und es soll x und y die *erste* bzw. *zweite Diagonalkomponente* von p heißen. Wir definieren nun eine Ordnungsrelation $\sqsubset$ über $N \times N$ wie folgt: Für Zahlenpaare $D_{a,b}$ und $D_{c,d}$ gelte $D_{a,b} \sqsubset D_{c,d}$ genau dann, wenn eine der beiden Aussagen «$a < c$» oder «$a = c$ und $b < d$» gilt. Dieses $\sqsubset$ ist offensichtlich irreflexiv und transitiv, also eine Ordnungsrelation, und bezüglich $\sqsubset$ gibt es kein maximales Feldobjekt: Wir können nämlich wie folgt zu jedem Zahlenpaar p ein p^+ mit $p \sqsubset p^+$ angeben:

- falls $p = D_{n,m}$ für Zahlen m und n mit $m < n$ ist, sei p^+ das Paar $D_{n,m+1}$,[24] und
- falls $p = D_{n,n}$ für eine Zahl n ist, sei p^+ das Paar $D_{n+1,0}$.

Aufgrund von Theorem 5.16.55 S. 229 gibt es nun ein Modell der Arithmetik, dessen Zahlen die Werte der rekursiv definierten Funktion

$$f\colon \omega \longrightarrow N \times N \text{ mit } f(\emptyset) := D_{0,0} \text{ und } f(k') := f(k)^+$$

sind. Der Wertebereich $\mathtt{Wb}(f)$ ist dann also als Trägerklasse eines Modells der Arithmetik nach Theorem

[24] Im Fall $m < n$ gilt auch $m + 1 \leq n$ (Lemma 5.134 S. 219), so dass $D_{n,m+1}$ wohldefiniert ist.

5.16.53 S. 228 mit N gleichmächtig: $\mathtt{Wb}(f) \sim N$. Da aber $\mathtt{Wb}(f)$ nur Zahlenpaare aus $N \times N$ enthält, gilt $\mathtt{Wb}(f) \subseteq N \times N$. Wenn wir noch zeigen können, dass $N \times N \subseteq \mathtt{Wb}(f)$, also jedes Zahlenpaar $D_{x,y}$ in $\mathtt{Wb}(f)$ liegt, so ist also $N \times N$ mit dem abzählbar unendlichen $\mathtt{Wb}(f)$ identisch und der Beweis des Satzes ist erbracht: Denn wir können dann in der schon bewiesenen Aussage $\mathtt{Wb}(f) \sim N$ das $\mathtt{Wb}(f)$ durch $N \times N$ ersetzen und erhalten $N \times N \sim N$.

Angenommen also, $N \times N \subseteq \mathtt{Wb}(f)$ ist falsch. Dann gibt es mindestens ein Zahlenpaar $D_{x,y}$ außerhalb des Wertebereichs von f; solche Zahlenpaare sollen „Nichtwerte“ heißen. Aufgrund der angenommenen Existenz mindestens eines Nichtwertes $D_{x,y}$ ist die Klasse aller ersten Diagonalkomponenten von Nichtwerten nichtleer und hat nach Theorem 5.16.36 ein Minimum n. Ebenso hat die dann ebenfalls nichtleere Klasse der Nichtwerte mit n als erster Diagonalkomponente ein Minimum. Dieses nennen wir m. Dann ist also $D_{n,m}$ ein Nichtwert, aber:

es gibt keinen Nichtwert, dessen erste Diagonalkomponente kleiner als n ist, (7.49)

und es gibt auch keinen Nichtwert $D_{n,x}$ mit $x < m$. (7.50)

Nun kann n nicht 0 sein (andernfalls läge D_{nm} in der Diagonalklasse D_0, in der aber nur $D_{0,0}$ liegt, und $D_{0,0}$ ist wegen $f(\emptyset) = D_{0,0}$ ein *Wert* von f), also gibt es nach Theorem 5.16.13 S. 213 eine Zahl ν mit $\nu + 1 = n$. Da dann $\nu < n$ ist, sind wegen (7.49) alle in D_ν liegenden Zahlenpaare Werte von f. So ist auch $D_{\nu,\nu}$ ein Wert von f, d. h. es gibt eine Zahl x mit $f(x) = D_{\nu,\nu}$ und es folgt $f(x') = D^+_{\nu,\nu} = D_{\nu+1,0} = D_{n,0}$, also ist $D_{n,0}$ ein Wert von f, so dass die zweite Diagonalkomponente m des Nichtwertes $D_{n,m}$ nicht 0 sein kann. Wieder nach Theorem 5.16.13 gibt es also eine Zahl μ mit $\mu + 1 = m$. Da dann $\mu < m$ ist, muss wegen (7.50) $D_{n,\mu}$ ein Wert von f sein. Es gibt also eine Zahl y, so dass $f(y) = D_{n,\mu}$. Da $\mu < m$ und $m \leq n$ ist (denn m und n waren ja die zweite bzw. erste Diagonalkomponenten von $D_{n,m}$, und nach Definition der $D_{k,i}$ ist die zweite Diagonalkomponente i stets kleinergleich der ersten k), folgt $\mu < n$, also ist $D^+_{m,\mu} = D_{m,\mu+1}$. So folgt $f(y') = D^+_{n,\mu} = D_{m,\mu+1} \underset{\mu+1=n}{=} D_{m,n}$, und der *Nichtwert* $D_{n,m}$ ist ein *Wert* von f. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war. □

Theorem 5.20.13 S. 261

Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$.
Dann gilt $U \times U \sim U$, und wenn U_1 und U_2 mit U gleichmächtig sind, gilt dies auch für $U_1 \times U_2$.

Beweis. Zu zeigen ist nur $U \times U \sim U$: Ist dann $U_1 \sim U$ und $U_2 \sim U$, so gilt wegen (5.171 S. 258) $(U_1 \times U_2) \sim (U \times U) \sim U$. Wir zeigen also, dass $U \times U \sim U$. Hierzu unterscheiden wir vier Fälle:
1. Fall: U liegt auf Stufe $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$. Dann gilt $U \sim \mathbb{D}$, also auch $\mathbb{D} \sim U$. Daraus folgt mit (5.171 S. 258), dass $(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \sim (U \times U)$. Außerdem ist $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ wie jede Klasse eine Teilklasse von $\mathbb{D}$ ist, so dass $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \precsim \mathbb{D}$, und da $\langle x \in \mathbb{D} \mapsto \langle x, 0\rangle\rangle$ eine Injektion von $\mathbb{D}$ in $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ ist, gilt auch $\mathbb{D} \precsim \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, so dass mit Theorem 5.15.5 S. 201 folgt, dass $\mathbb{D} \sim (\mathbb{D} \times \mathbb{D})$. Insgesamt gilt also $U \sim \mathbb{D} \sim (\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \sim (U \times U)$.
2. Fall: U liegt auf der Stufe $\llbracket\Omega\rrbracket$ der wohlordnungstragenden Unmengen, d. h. es gilt $U \sim \Omega$, also $\Omega \sim U$ und nach (5.171 S. 258) auch $\Omega \times \Omega \sim U \times U$. Nun liegt auch $\Omega \times \Omega$ nach Theorem 5.15.19 S. 205 auf $\llbracket\Omega\rrbracket$, d. h. es gilt $\Omega \sim (\Omega \times \Omega)$, und so folgt insgesamt $U \sim \Omega \sim (\Omega \times \Omega) \sim (U \times U)$.
3. Fall: U ist abzählbar unendlich. Dieser Fall wurde in Lemma 5.20.12 behandelt.
4. Fall: U ist eine beliebige unendliche Menge.[25] Der folgende Beweis ist im Wesentlichen analog zum entsprechenden Beweises von Theorem 5.20.9 auf S. 438–439. Sei $\mathfrak{F}$ die Klasse aller Funktionen f, die als Definitionsbereich eine Menge $X \times X$ für eine unendliche Teilmenge X von U haben und Bijektionen von $X \times X$ in X sind. Jedes solche f ist Teilklasse der Menge $(U \times U) \times U$, also ist f per Teilmengenaxiom eine Menge und liegt in $\mathcal{P}((U \times U) \times U)$, was per Potenzmengenaxiom ebenfalls eine Menge ist. Schließlich ist $\mathfrak{F}$ dann als Teilklasse dieser Menge ebenfalls eine Menge. Die Menge $\mathfrak{F}$ ist nun nichtleer, denn U besitzt gemäß (5.175 S. 259) eine abzählbar unendliche Teilmenge N. Nach Teil (3) des Beweises gilt also $N \times N \sim N$, so dass es eine Bijektion f von $N \times 2$ in N gibt. Diese liegt in $\mathfrak{F}$.
Wir betrachten nun die Relation $<$ in $\mathfrak{F}$ mit $f_1 < f_2$ genau dann wenn $f_1 \subset f_2$. Diese Relation ist eine Halbordnung über $\mathfrak{F}$ und jede $<$-Kette $\mathfrak{K}$ besitzt in $\mathfrak{F}$ eine obere Schranke: Falls $\mathfrak{K} = \emptyset$, ist jedes Element von $\mathfrak{F}$ eine solche, und im Fall $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ zeigt sich wie folgt, dass $\bigcup \mathfrak{K}$ eine obere $<$-Schranke von $\mathfrak{K}$ ist. $\bigcup \mathfrak{K}$ Für jedes

[25] Die Beweisidee für diesen Fall fand ich bei Halmos, *Set Theory* S. 122.

f aus $\mathfrak{K}$ gilt $f \subseteq \bigcup \mathfrak{K}$, und das bedeutet $f \leq \bigcup \mathfrak{K}$, falls $\bigcup \mathfrak{K} \in \mathfrak{F}$ ist. So müssen wir nur noch zeigen, dass $\bigcup \mathfrak{K}$ in $\mathfrak{F}$ liegt. Sei hierzu $\mathfrak{X}$ die Klasse aller unendlichen Teilmengen X von U, für die $X \times X$ Definitionsbereich eines Elements f von $\mathfrak{K}$ ist; $\mathfrak{X}$ ist als Teilklasse von $\mathcal{P}(U)$ eine Menge, und $\bigcup \mathfrak{X}$ ist eine Teilmenge von U. Da die Elemente X von $\mathfrak{X}$ unendlich sind und $\mathfrak{X}$ nichtleer ist (da $\mathfrak{K}$ in dem hier betrachteten Fall nichtleer ist), ist $\bigcup \mathfrak{X}$ als Oberklasse eines unendlichen X auch selbst unendlich. Ferner ist die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{K}$ eine Relation, die alle Aktionen der in ihr enthaltenen Funktionen ausführt, und wenn man beachtet, dass je zwei Elemente f, g der Kette $\mathfrak{K}$ Injektionen mit $f \subseteq g$ oder $g \subseteq f$ sind (weil per Linearität $f \leq g$ oder $g \leq f$ gilt), so sieht man, dass diese Relation links– und rechtseindeutig ist. So ist also die Relation $\bigcup \mathfrak{K}$ eine Injektion. Diese hat als Wertebereich $\bigcup \mathfrak{X}$. Ihr Definitionsbereich $\mathtt{Db}(\bigcup \mathfrak{K})$ aber ist $\bigcup \mathfrak{X} \times \bigcup \mathfrak{X}$: Das ihr $\mathtt{Db}(\bigcup \mathfrak{K}) \subseteq \bigcup \mathfrak{X} \times \bigcup \mathfrak{X}$ ist, ist trivial; dass aber auch $\bigcup \mathfrak{X} \times \bigcup \mathfrak{X} \subseteq \mathtt{Db}(\bigcup \mathfrak{K})$ ist, zeigt sich wie folgt. Ist $\langle x, y \rangle$ aus $\bigcup \mathfrak{X} \times \bigcup \mathfrak{X}$, so gibt es Mengen X und Y aus $\mathfrak{X}$ und Funktionen f und g aus $\mathfrak{K}$, derart dass $f\colon X \times X \longrightarrow X$, $g\colon Y \times Y \longrightarrow Y$, $x \in X$ und $y \in Y$. Nun ist aber $f \subseteq g$ oder $g \subseteq f$, und je nachdem liegen x und y beide in Y oder beide in X und es folgt $\langle x, y \rangle \in \mathtt{Db}(g)$ oder $\langle x, y \rangle \in \mathtt{Db}(f)$. In beiden Fällen liegt aber $\langle x, y \rangle$ im Definitionsbereich von $\bigcup \mathfrak{K})$. Somit ist $\bigcup \mathfrak{K}$ eine Bijektion von $\bigcup \mathfrak{X} \times \bigcup \mathfrak{X}$ in $\bigcup \mathfrak{X}$, weshalb $\bigcup \mathfrak{K}$ (nach Definition von $\mathfrak{F}$) in $\mathfrak{F}$ liegt. In der Tat hat also jede $<$-Kette in $\mathfrak{F}$ eine obere Schranke.
Folglich sind die Voraussetzungen des ZORNschen Lemmas 5.14.20 erfüllt und $\mathfrak{F}$ besitzt deshalb ein maximales Element $f_{\max}$, welches eine Bijektion von $X_{\max} \times X_{\max}$ in $X_{\max}$ ist, so dass $X_{\max} \times X_{\max} \sim X_{\max}$ gilt, wobei $X_{\max}$ eine unendliche Teilmenge von U ist. Nun ist nur noch zu zeigen, dass $X_{\max} \sim U$, denn dann folgt wegen (5.171 S. 258), dass $X_{\max} \times X_{\max} \sim U \times U$, also insgesamt $U \sim X_{\max} \sim X_{\max} \times X_{\max} \sim U \times U$ und wir sind fertig. Wegen $X_{\max} \subseteq U$ ist nun nach (5.89 S. 200) zunächst $X_{\max} \precsim U$, und so ist (wegen 5.88 S. 200) nur noch die ANNAHME $X_{\max} \prec U$ zu widerlegen.
Unter dieser ANNAHME muss auch $X_{\max} \prec (U \setminus X_{\max})$ sein, denn andernfalls wäre nach (5.99 S. 201) $U \setminus X_{\max} \precsim X_{\max}$, also wäre nach Korollar 5.20.10 die Vereinigung $X_{\max} \cup (U \setminus X_{\max})$ (das ist U) mit $X_{\max}$ gleichmächtig, was der ANNAHME $X_{\max} \prec U$ widerspricht.
Wegen $X_{\max} \prec (U \setminus X_{\max})$ gibt es nun eine Injektion von $X_{\max}$ in $U \setminus X_{\max}$, und deren Wertebereich W ist dann eine mit $X_{\max}$ gleichmächtige Teilmenge von $U \setminus X_{\max}$. Dann sind aber die drei Mengen $X_{\max} \times W$, $W \times X_{\max}$ und $W \times W$ aufgrund von (5.171 S. 258) mit $X_{\max} \times X_{\max}$ gleichmächtig, somit auch mit $X_{\max}$ und daher mit W, und nach Theorem (5.20.9 S. 260) ist die Vereinigung V dieser drei Mengen ebenfalls mit W gleichmächtig. Also existiert eine Bijektion g von V in W. Nun haben aber g und $f_{\max}$ keine gemeinsamen Argumente und Werte, so dass wegen (5.39 S. 144) $f_{\max} \cup g$ eine Injektion ist, und zwar eine Bijektion von $\mathtt{Db}(f_{\max}) \cup \mathtt{Db}(g)$ in $\mathtt{Wb}(f_{\max}) \cup \mathtt{Wb}(g)$. Nun ist aber $\mathtt{Db}(f_{\max}) \cup \mathtt{Db}(g)$ die Menge $(X_{\max} \times X_{\max}) \cup V$, d. h. die Vereinigung der vier Mengen $X_{\max} \times X_{\max}$, $X_{\max} \times W$, $W \times X_{\max}$ und $W \times W$, das aber ist $= (X_{\max} \cup W) \times (X_{\max} \cup W)$. Also ist $f_{\max} \cup g$ eine Bijektion von der unendlichen Teilmenge $(X_{\max} \cup W) \times (X_{\max} \cup W)$ von U in $X_{\max} \cup W$.Somit gehört $f_{\max} \cup g$ zu $\mathfrak{F}$ und ist bezüglich $<$ größer als $f_{\max}$, im Widerspruch zur Maximalität von $f_{\max}$. Also war die ANNAHME falsch und das Theorem ist bewiesen. □

Korollar 5.20.14 S. 261

Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket \Omega \rrbracket$ oder $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$, und sei $A \precsim U$.
Dann sind $U \times A$ und $A \times U$ leer (falls A leer ist) oder mit U gleichmächtig (sonst).

Beweis. Die Behauptung für leeres A ist trivial, sei also A nichtleer und a ein Element von A. Dann ist die Funktion, die jedes u aus U auf $\langle a, u \rangle$ wirft, eine Injektion von U in $A \times U$, weshalb $U \precsim (A \times U)$. Andererseits folgt aus $A \precsim U$ und $U \precsim U$ gemäß dem Zusatz zu (5.171 S. 258) in Theorem 5.20.3 zunächst $(A \times U) \precsim (U \times U)$, und da man in dieser Aussage $U \times U$ durch U ersetzen darf (denn nach Theorem 5.20.13 gilt $U \times U \sim U$, also darf man dies gemäß Theorem 5.15.4 S. 201), ist $(A \times U) \precsim U$. Wegen Theorem 5.15.5 S. 201 gilt also insgesamt $U \sim (A \times U)$, und wegen Theorem 5.12.7 S. 166 ist dann auch $U \sim (U \times A)$. □

Theorem 5.20.15 S. 261

Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket \Omega \rrbracket$ oder $\llbracket \mathbb{D} \rrbracket$.
Sei $\langle i \in D \mapsto \theta(i) \rangle$ eine Klassenfamilie, wobei D und die $\theta(i)$ alle $\sim U$ bzw. alle $\precsim U$ sind.
Dann gilt auch $\bigcup_{i \in D} \theta(i) \sim U$ bzw. $\bigcup_{i \in D} \theta(i) \precsim U$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt in jedem Fall $D \precsim U$ und für jedes i aus D in jedem Fall $\theta(i) \precsim U$. Wir

nehmen nun zuerst *zusätzlich* an, dass alle $\theta(i)$ nichtleer sind. Nun gilt nach (5.85 S. 200), dass $U \succsim \theta(i)$, und da $\theta(i) \neq \emptyset$ ist, folgt gemäß (5.91 S. 200) die Existenz einer Surjektion f_i von U in $\theta(i)$. Die Funktion F, die jedes Paar $\langle i, j\rangle$ aus $D \times U$ auf das Element $f_i(j)$ von $\theta(i)$ wirft, ist dann aber eine Surjektion von $D \times U$ in $\bigcup_{i\in D} \theta(i)$: Denn wann immer y aus $\bigcup_{i\in D} \theta(i)$ ist, gibt es ein i aus D, so dass y der Klasse $\theta(i)$ angehört; da f_i surjektiv ist, gib es ein j aus U mit $f_i(j) = y$, und dann wirft F das Paar $\langle i, j\rangle$ auf $f_i(j)$, also auf y.
Die Existenz der Surjektion F zeigt nun aber nach (5.91 S. 200), dass $(D \times U) \succsim \bigcup_{i\in D} \theta(i)$, also $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \precsim (D \times U)$ gilt. Weiter gilt aber $(D \times U) \precsim (U \times U)$ (dies folgt wegen $D \times U \subseteq U \times U$ aus 5.89 S. 200), so dass insgesamt $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \precsim (D \times U) \precsim (U \times U)$ gilt. Wegen $U \times U \sim U$ (Theorem 5.20.13 S. 261) gilt erst recht $U \times U \precsim U$, und per Transitivität von $\precsim$ (5.95 S. 201) folgt $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \precsim U$.
Wir lassen nun die Voraussetzung $\theta(i) \neq \emptyset$ fallen, setzen $\widehat{\theta}(i) := \theta(i) \cup \{\emptyset\}$ und betrachten die Klassenfamilie $\langle i \in D \mapsto \widehat{\theta}(i)\rangle$, die nur nichtleere Klassen besitzt. Da stets $\widehat{\theta}(i) \precsim U$ ist (für endliches $\theta(i)$ ist auch $\widehat{\theta}(i)$ endlich, und für unendliches $\theta(i)$ gilt nach Lemma 5.20.7 S. 259, dass $\widehat{\theta}(i) \sim \theta(i)$; in beiden Fällen ist also $\widehat{\theta}(i) \precsim U$), gilt nach dem gerade bewiesenen Teil der Behauptung, dass $\bigcup_{i\in D} \widehat{\theta}(i) \precsim U$, und da auch $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \precsim \bigcup_{i\in D} \widehat{\theta}(i)$ ist (für jedes i aus D gilt $\theta(i) \subseteq \widehat{\theta}(i)$, daraus folgt $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \subseteq \bigcup_{i\in D} \widehat{\theta}(i)$ und daraus nach (5.89 S. 200) $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \precsim \bigcup_{i\in D} \widehat{\theta}(i)$), folgt per Transitivität von $\precsim$ auch jetzt, dass $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \precsim U$.
Im Fall schließlich, dass D und alle $\theta(i)$ sogar mit U gleichmächtig sind, haben wir noch nachzuweisen, dass dann auch $U \precsim \bigcup_{i\in D} \theta(i)$ gilt, so dass insgesamt mit Theorem 5.15.5 S. 201 $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \sim U$ folgt. Nun können wir in diesem Fall aus dem unendlichen D ein d auswählen und die Klasse $\theta(d)$ betrachten: Da diese $\sim U$ ist, gilt erst recht $U \precsim \theta(d)$, und da $\theta(d) \subseteq \bigcup_{i\in D} \theta(i)$ ist, gilt nach (5.89 S. 200) außerdem $\theta(d) \precsim \bigcup_{i\in D} \theta(i)$, insgesamt also $U \precsim \theta(d) \precsim \bigcup_{i\in D} \theta(i)$, und per Transitivität von $\precsim$ folgt $U \precsim \bigcup_{i\in D} \theta(i)$. □

Theorem 5.20.17 S. 262

Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$.
Ist E eine nichtleere endliche Menge oder eine von Null verschiedene natürliche Zahl, so ist $U \sim U^E$, und ist E die leere Menge bzw. die Zahl 0, so ist U^E das einelementige $\{\emptyset\}$.

Beweis. Die Behauptung für die leere Menge bzw. für Null ist trivial: Wegen $0 = \emptyset$ und Theorem 5.18.8 S. 250 ist $U^\emptyset = U^0 = \{\emptyset\}$.
Zur Behauptung für von Null verschiedene Zahlen zeigen wir durch vollständige Induktion, dass für alle Zahlen n von den Aussagen $n = 0$ oder $U \sim U^n$ mindestens eine gilt. Induktionsanfang. $0 = 0$.
Induktionsschluss. Voraussetzung. Für eine Zahl n ist $n = 0$ oder $U \sim U^n$.
Fall 1. $n = 0$. Dann ist $n + 1 = 1$, und nach Theorem 5.18.8 S. 250 gilt $U \sim U^1$.
Fall 2. $U \sim U^n$. Da dann $U \sim U^n$ und $U \sim U$, gilt nach Theorem 5.20.13 S. 261, dass $U \sim (U^n \times U)$, während nach Theorem 5.18.8 S. 250 $(U^n \times U) \sim U^{n+1}$ ist, also insgesamt $U \sim U^{n+1}$.
Damit ist $U \sim U^n$ für von 0 verschiedene natürliche Zahlen n bewiesen. Ist schließlich E eine nichtleere endliche Menge, so ist E mit einer von 0 verschiedenen Zahl n gleichmächtig, und da auch $U \sim U$, folgt gemäß (5.172 S. 258) $U^n \sim U^E$. Zusammen mit $U \sim U^n$ folgt daraus $U \sim U^E$. □

Korollar 5.20.18 S. 262

Sei U eine unendliche Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$, und sei $\langle i \in D \mapsto \theta(i)\rangle$ eine Klassenfamilie mit endlichem D und $\theta(i) \precsim U$ für alle i aus U. Dann folgt $\bigtimes_{i\in I} \theta(i) \precsim U$.
Analog sei $\mathfrak{M}$ eine endliche Mengenklasse, deren Elemente $\precsim U$ sind. Dann folgt $\bigtimes \mathfrak{M} \precsim U$.

Beweis. Jedes f aus $\bigtimes_{i\in D} \theta(i)$ wirft jedes i aus D auf ein Element von $\theta(i)$, ist also eine Funktion von D in $\bigcup_{i\in D} \theta(i)$; also ist $\bigtimes_{i\in D} \theta(i)$ eine Teilklasse von $(\bigcup_{i\in D} \theta(i))^D$, und nach (5.89 S. 200) folgt $\bigtimes_{i\in D} \theta(i) \precsim (\bigcup_{i\in D} \theta(i))^D$. Da D endlich ist, gilt nach (5.156 S. 248) für eine Zahl n, dass $D \sim n$, und per Reflexivität von $\sim$ ist $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \sim \bigcup_{i\in D} \theta(i)$; daher folgt gemäß (5.172 S. 258) $(\bigcup_{i\in D} \theta(i))^D \sim (\bigcup_{i\in D} \theta(i))^n$; nach Theorem 5.15.4 S. 201 können wir daher in der wahren Aussagen $\bigtimes_{i\in D} \theta(i) \precsim (\bigcup_{i\in D} \theta(i))^D$ das $(\bigcup_{i\in D} \theta(i))^D$ durch das gleichmächtige $(\bigcup_{i\in D} \theta(i))^n$ ersetzen und erhalten $\bigtimes_{i\in D} \theta(i) \precsim (\bigcup_{i\in D} \theta(i))^n$.
Die rechte Menge ist nun aber $\precsim U$: Da D nämlich endlich ist, gilt $D \precsim U$, und für jedes i aus D ist nach Voraussetzung $\theta(i) \precsim U$, also folgt nach Theorem 5.20.15 S. 261, dass $\bigcup_{i\in D} \theta(i) \precsim U$. Nach dem Zusatz von

(5.174) in Theorem (5.20.3 S. 258) folgt daraus $(\bigcup_{i\in D}\theta(i))^n \precsim U^n$. Hierin kann man gemäß Theorem 5.15.4 das U^n durch das (wegen Theorem 5.20.17 mit U^n gleichmächtige) U ersetzen.
Also folgt insgesamt $(\bigtimes_{i\in D}\theta(i))^n \precsim U$ per Transitivität von $\precsim$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen, und die zweite folgt aus der ersten, da $\bigtimes\mathfrak{M} = \bigtimes_{i\in\mathfrak{M}} i$ ist. □

Theorem 5.20.21 S. 264

U sei eine unendliche Menge und C habe mindestens zwei Elemente.
Dann ist $U \prec C^U$, und solange $C \precsim \mathcal{P}(U)$ ist, gilt $C^U \sim \mathcal{P}(U)$.

Beweis. Sind a und b verschiedene Elemente von C, so ist jede Funktion von U in $\{a,b\}$ auch eine solche von U in C, also ist $\{a,b\}^U$ eine Teilklasse von C^U, also gilt $\{a,b\}^U \precsim C^U$. Nun ist $\{a,b\}^U$ nach Theorem 5.18.3 S. 249 mit $\mathcal{P}(U)$ gleichmächtig; also kann man gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 in Aussage $\{a,b\}^U \precsim C^U$ das $\{a,b\}^U$ durch $\mathcal{P}(U)$ ersetzen und erhält $\mathcal{P}(U) \precsim C^U$. Zusammen mit dem Satz von Cantor (5.20.19 S. 262) ergibt sich $U \prec \mathcal{P}(U) \precsim C^U$, und somit nach (5.97 S. 201) $U \prec C^U$.
Unter der zusätzlichen Voraussetzung $C \precsim \mathcal{P}(U)$ ist nun noch $C^U \sim \mathcal{P}(U)$ zu zeigen. Da wir gerade sahen, dass $\mathcal{P}(U) \precsim C^U$, ist nur noch $C^U \precsim \mathcal{P}(U)$ zu zeigen, dann folgt mit Theorem 5.15.5 S. 201, dass $C^U \sim \mathcal{P}(U)$. Nun folgt aber aus $C \precsim \mathcal{P}(U)$, $U \precsim U$ und $\mathcal{P}(U) \neq \emptyset$ gemäß (5.170 S. 258), dass $C^U \precsim \mathcal{P}(U)^U$. In dieser Formel darf $\mathcal{P}(U)^U$ durch das (gemäß Korollar 5.20.20 S. 264 mit $\mathcal{P}(U)^U$ gleichmächtige) $\mathcal{P}(U)$ ersetzen (Theorem 5.15.4 S. 201) und erhält $C^U \precsim \mathcal{P}(U)$. □

Theorem 5.21.9 S. 270

Sei $\mathcal{A} := \langle A, < \rangle$ eine vollgeordnete Klasse, welche die „Vollständigkeitsbedingung“ erfüllt:

> Ist T eine nichtleere Teilklasse von A, die eine oberen Schranke hat, so
> hat T auch eine kleinste obere Schranke (d. h. besitzt ein Supremum).

Aus dieser Bedingung folgt logisch, dass auch die folgende erfüllt ist:

> Ist T eine nichtleere Teilklasse von A, die eine untere Schranke hat, so
> hat T auch eine größte untere Schranke (d. h. besitzt ein Infimum).

Beweis. Sei T nichtleer und habe eine untere Schranke. Dann ist die Klasse S der unteren Schranken von T nichtleer. Außerdem ist sie nach oben beschränkt, denn jedes Element von T ist eine obere Schranke von S. Weil nun G nach Voraussetzung vollständig geordnet ist, besitzt also S eine kleinste obere Schranke (ein Supremum). Es lässt sich nun zeigen, dass dieses Supremum $\sup S$ zugleich eine größte untere Schranke von T, also das Infimum von T ist. Hierzu ist zweierlei zu zeigen: (1) $\sup S$ ist eine untere Schranke von T und (2) keine untere Schranke von T kann größer als $\sup S$ sein.
Zu (1). Angenommen, $\sup S$ ist keine untere Schranke von T. Dann gibt es ein t aus T mit $t < \sup S$. Ein solches t kann aber als Element von T nicht kleiner als eine untere Schranke von T (d. h. nicht kleiner als ein Element von S) sein, also gilt für jedes Element s von S, dass $s \leq t$. Das aber heißt: t ist eine obere Schranke von S. Da nun $\sup S$ die *kleinste* obere Schranke von S ist, folgt $\sup S \leq t$ im Widerspruch zu $t < \sup S$. Somit war die Annahme falsch und $\sup S$ ist eine untere Schranke von T.
Zu (2). Jede untere Schranke s von T liegt in S, kann also nicht größer als eine obere Schranke von S sein. Nun ist $\sup S$ aber eine obere Schranke von S. Also ist s nicht größer als $\sup S$. □

Theorem 5.21.18 S. 274

Zu jedem p aus $[a,\infty)$ gibt es ein n aus $\mathbb{N}_a$ mit $p < n$.

Beweis. Angenommen, das ist falsch, so gilt für alle n aus $\mathbb{N}_a$, dass $n \leq p$. Dann ist $\mathbb{N}_a$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der Geraden g, auf welcher der Strahl $[a,\infty)$ liegt, so dass $\mathbb{N}_a$ wegen des Vollständigkeitsaxioms 5.21.10 S. 270 ein Supremum s hat, d. h. eine kleinste obere Schranke. Da s obere Schranke von $\mathbb{N}_a$ ist, gilt $n \leq s$ für alle n aus $\mathbb{N}_a$. Sei nun r der Punkt $s \ominus (p,q)$; dann gilt nach (5.183

S. 273), dass $\langle r,s\rangle \cong \langle p,q\rangle$ und dass s größer als r ist. Da s die *kleinste* obere Schranke von $\mathbb{N}_a$ ist, kann das kleinere r *keine* obere Schranke von $\mathbb{N}_a$ mehr sein. Also muss es eine Zahl n geben mit $r < n$. Andererseits ist $n \leq s$, weil s obere Schranke von $\mathbb{N}_a$ ist, insgesamt gilt also $r < n \leq s$. Nun ist $n+1$ der Punkt $n \oplus (p,q)$, welcher nach (5.182 S. 273) größer als n ist. Doch muss $n+1$ zugleich $\leq s$ sein, insgesamt ist also $r < n < n+1 \leq s$. So ist $[n, n+1]$ eine echte Teilklasse von $[r,s]$, so dass wegen Axiom (S3) $\langle n, n+1\rangle \overset{\sim}{<} \langle r,s\rangle$ gilt. Hier darf man $\langle r,s\rangle$ gemäß (S4) durch das kongruente $\langle p,q\rangle$ ersetzen, also ist $\langle n, n+1\rangle \overset{\sim}{<} \langle p,q\rangle$. Wegen $n+1 = n \oplus (p,q)$ ist nun $\langle n, n+1\rangle$ mit $\langle p,q\rangle$ kongruent (Satz 5.182), und so können wir $\langle n, n+1\rangle$ in der Aussage $\langle n, n+1\rangle \overset{\sim}{<} \langle p,q\rangle$ durch das kongruente $\langle p,q\rangle$ ersetzen. Also ist $\langle p,q\rangle \overset{\sim}{<} \langle p,q\rangle$, was der durch Axiom (S1) verbürgten Irreflexivität von $\overset{\sim}{<}$ widerspricht. So war die Annahme falsch und die Behauptung gilt. □

Theorem 5.21.19 S. 274

Zu jedem p aus $[a,\infty)$ gibt es genau ein Element n von $\mathbb{N}_a$, so dass p in $[n, n+1)$ liegt.

Beweis. Sei C die Klasse aller Elemente von $\mathbb{N}_a$, die größer als p sind. Wegen Theorem 5.21.18 gibt es solche Elemente, so dass C nichtleer ist. Aufgrund von Theorem 5.16.36 S. 220 hat C also ein Minimum m. Weil m zu C gehört, gilt $p < m$, weshalb m nicht die Null von $\mathbb{N}_a$ (das ist a) sein kann: Es gilt ja $a \leq p < m$. Also ist m Nachfolger einer Zahl n, so dass $m = n+1$ gilt. Infolgedessen können wir für $p < m$ auch $p < n+1$ schreiben. Weil aber m das *Minimum* von C ist, gehört der Vorgänger n von m *nicht* mehr zu C, weshalb $p < n$ falsch ist, also $n \leq p$ wahr. Zusammen mit $p < n+1$ ergibt sich $n \leq p < n+1$, also $p \in [n, n+1)$. Schließlich zeigt sich wie folgt, dass es *nicht mehrere* Zahlen gibt, die hier die Rolle von n übernehmen können. Angenommen, das wäre falsch, so lassen sich Zahlen k und ℓ, finden, derart dass $k < \ell$ und zugleich $p \in [k, k+1)$ sowie $p \in [\ell, \ell+1)$. Aus $k < \ell$ folgt aber mit Lemma 5.134 S. 219, dass $k+1 \leq \ell$. Nun bedeutet $p \in [k, k+1)$ und $p \in [\ell, \ell+1)$, dass $k \leq p < k+1$ und $\ell \leq p < \ell+1$, also folgt insgesamt $k \leq p < k+1 \leq \ell \leq p < \ell+1$, woraus $p < p$ folgt, was falsch ist. Also war die Annahme falsch und es gibt nur *ein* n, so dass $p \in [n, n+1)$. □

Theorem 5.21.20 S. 274

Für Punkte a und b mit $a < b$ sind die Intervalle $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ und (a,b) mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig.

Beweis. Wir definieren rekursiv eine Funktion f, die Neumannsche Zahlen auf Teilklassen von $[a,b]$ wirft: $f(0) := \{a,b\}$ und $f(n+1) :=$ die Klasse aller Mittelpunkte $\mathfrak{m}(x,y)$ für x und y aus $f(n)$.

Lemma 1. *Für jedes n aus ω ist $f(n)$ eine endliche Menge, und für jedes k mit $k \leq n$ gilt $f(k) \subseteq f(n)$.*

Beweis durch Induktion. Induktionsanfang. $f(0)$ ist die endliche Menge $\{A,B\}$. Das einzige k mit $k \leq 0$ ist 0, und $f(k) = f(0) \subseteq f(0)$. Induktionsschluss. Voraussetzung. Sei das Lemma für ein n wahr. Werfen wir nun alle Paare $\langle x,y\rangle$ aus $f(n) \times f(n)$ auf $\mathfrak{m}(x,y)$, so ist das eine Surjektion von $f(n) \times f(n)$ in $f(n+1)$. Infolgedessen gilt $f(n) \times f(n) \succsim f(n+1)$ (Theorem 5.91 S. 200), also $f(n+1) \precsim f(n) \times f(n)$. Da $f(n)$ nach Voraussetzung endlich ist, ist nach (5.162 S. 251) auch $f(n) \times f(n)$ endlich, also zeigt $f(n+1) \precsim f(n) \times f(n)$ gemäß (5.143 S. 244), dass auch $f(n+1)$ endlich ist. Ferner ist $f(n)$ eine Teilklasse von $f(n+1)$: Denn ist x aus $f(n)$, so enthält $f(n+1)$ den Mittelpunkt $\mathfrak{m}(x,x)$; dieser ist nach Definition 5.21.13 S. 273 jedoch x selbst. So ist $f(n) \subseteq f(n+1)$. Damit lässt sich aber für jedes k mit $k \leq n+1$ zeigen, dass $f(k) \subseteq f(n+1)$ gilt. Ist nämlich $k \leq n+1$, so ist $k = n+1$ oder $k < n+1$. Im Fall $k = n+1$ ist natürlich $f(k) = f(n+1)$ und erst recht $f(k) \subseteq f(n+1)$. Im Fall $k < n+1$ aber folgt (gemäß 5.16.29 S. 219), dass $k \leq n$, so dass nach Voraussetzung $f(k) \subseteq f(n)$ gilt, und wegen $f(n) \subseteq f(n+1)$ folgt auch jetzt $f(k) \subseteq f(n+1)$. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Im Folgenden sei nun $\mathbb{A}$ die Vereinigung aller Mengen $f(n)$ für $n \in \omega$, d. h. $\mathbb{A} := \bigcup_{n\in\omega} f(n)$.

Lemma 2. *Liegen x und y in $\mathbb{A}$ liegen, so auch der Mittelpunkt $\mathfrak{m}(x,y)$.*

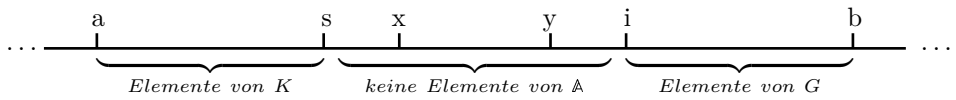
Beweis. Liegen x und y in $\mathbb{A}$, so gibt es Zahlen n und m, so dass $x \in f(n)$ und $y \in f(m)$. Sei p das Maximum von $\{m,n\}$, dann gilt $m \leq p$ und $n \leq p$, also gilt wegen Lemma 1 auch $f(m) \subseteq f(p)$ und $f(n) \subseteq f(p)$, so dass also x und y beide in $f(p)$ liegen. Nach der Rekursionsgleichung von f enthält aber $f(p+1)$ den Mittelpunkt $\mathfrak{m}(x,y)$, der als Element von $f(p+1)$ auch in $\mathbb{A}$ liegt. So ist Lemma 2 bewiesen.

Lemma 3. *$\mathbb{A}$ ist eine abzählbar unendliche Teilklasse von $[a, b]$.*

Beweis. Da die Elemente von $\mathbb{A}$ die Elemente der Teilklassen $f(n)$ von $[a, b]$ sind, ist $\mathbb{A}$ selbst eine Teilklasse von $[a, b]$. Wegen Lemma 1 ist $\mathbb{A}$ eine Vereinigung *endlicher* Mengen; als Vereinigung abzählbar vieler endlicher Mengen ist $\mathbb{A}$ also nach Theorem 5.20.15 S. 261 höchstens abzählbar unendlich, d. h. endlich oder abzählbar unendlich. Wir müssen also nur zeigen, dass sie nicht endlich ist. Hierzu genügt es, eine Injektion von der abzählbar unendlichen Menge ω in $\mathbb{A}$ anzugeben, dann gilt wegen Theorem 5.90 S. 200, dass $\omega \precsim A$ und so kann A dann wegen Theorem 5.17.38 S. 245 nicht endlich sein. So bleibt nur die Existenz einer Injektion h von ω in $\mathbb{A}$ zu zeigen. Hierzu definieren wir rekursiv eine Funktion h von ω in die Gerade g (auf der unsere Punkte a und b liegen): $h(0) := a$ und $h(n+1) := \mathfrak{m}(h(n), b)$. Durch Induktion folgt nun für jedes n aus ω: (1) $h(n) \in \mathbb{A}$ und (2) für jedes k aus ω mit $k < n$ gilt $h(k) < h(n)$.
Induktionsanfang. $h(0) = a \in f(0)$, also $h(0) \in \mathbb{A}$, und Behauptung (2) hat nun die Gestalt «für jedes k aus ω mit $k < 0 \ldots$». Da es keine solchen k gibt, gilt die Behauptung nach Lemma 5.9.3 S. 117.
Induktionsschluss. Voraussetzung. Die Behauptung gilt für n. Wegen $h(n) \in \mathbb{A}$ und $b \in \mathbb{A}$ (was wegen $b \in f(0)$ gilt) folgt nach Lemma 2, dass $\mathfrak{m}(h(n), b) \in \mathbb{A}$, d. h. $h(n+1) \in \mathbb{A}$. Für die k mit $k < n+1$ aber gilt (nach 5.16.29 S. 219), dass $k \leq n$, also $k < n$ oder $k = n$. Falls $k < n$, gilt nach Voraussetzung $h(k) < h(n)$. Nun ist aber $h(n+1)$ der Mittelpunkt $\mathfrak{m}(h(n), b)$ von $h(n)$ und b, also gilt $h(n) < h(n+1) < b$. Per Transitivität von $<$ folgt also $h(k) < h(n+1)$. Falls aber $k = n$ gilt, ist $h(k) = h(n)$, und wegen $h(n) < h(n+1)$ ist wieder $h(k) < h(n+1)$.
So ist h eine Funktion von ω in $\mathbb{A}$, und für alle k und n aus ω mit $k < n$ gilt $h(k) < h(n)$. Dieses h ist injektiv: Denn sind verschiedene Zahlen aus ω gegeben, so ist die eine von ihnen (nennen wir sie k) kleiner als die andere (nennen wir sie n), und es folgt $h(k) < h(n)$, also insbesondere $h(k) \neq h(n)$. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Lemma 4. *Sind x und y beliebige Elemente von $[a, b]$ mit $x < y$, so liegt stets ein Element von $\mathbb{A}$ dazwischen, d. h. es gibt ein Element m von $\mathbb{A}$ mit $x \leq m \leq y$.*

Beweis. Angenommen, es gibt Punkte x und y aus $[a, b]$ mit $x < y$, für die es kein m aus $\mathbb{A}$ gibt mit $x \leq m \leq y$. Nun ist die Klasse G der Punkte von $\mathbb{A}$, die größergleich y sind, nichtleer (b ist ein solcher Punkt), besitzt also ein Infimum (eine größte untere Schranke) $i := \inf G$. Da y untere Schranke von G ist, gilt $y \leq i$. Ebenso ist die Klasse K der Punkte von $\mathbb{A}$, die kleinergleich x sind, nichtleer (a ist ein solcher Punkt), besitzt also ein Supremum (eine kleinste obere Schranke) $s := \sup K$. Da x obere Schranke von K ist, gilt $s \leq x$. Alle Elemente von K sind dann kleinergleich s, alle von G größergleich i, und zwischen s und i – genauer: im offenen Intervall (s, i) – liegen weder Punkte von G noch von K, also keine Punkte von $\mathbb{A}$, die kleiner als x bzw. größer als y sind. Da es aber nach Annahme auch keine Punkte m von $\mathbb{A}$ mit $x \leq m \leq y$ gibt, gilt insgesamt, dass im offenen Intervall (s, i) überhaupt keine Punkte von $\mathbb{A}$ liegen. Diese Situation kann man so veranschaulichen:



Dass s die *kleinste* obere Schranke von K ist, bedeutet aber auch, dass jeder Punkt p mit $p < s$ *keine* obere Schranke von K mehr ist. Also gibt es zu jedem solchen p ein größeres Element k von K, und dieses ist dann natürlich zugleich kleinergleich der oberen Schranke s, so dass insgesamt $p < k \leq s$. Als Element von K ist k ferner ein Element von $\mathbb{A}$. Somit gilt:

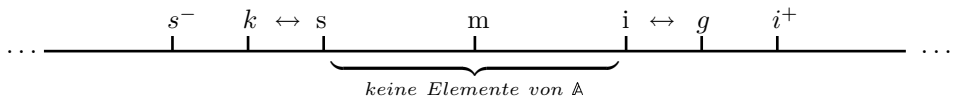
Zu jedem p mit $p < s$ gibt es ein k aus $\mathbb{A}$ mit $p < k \leq s$. (7.51)

Analog folgt daraus, dass i die *größte* untere Schranke von G ist, dass jeder Punkt p mit $i < p$ *keine* untere Schranke von G mehr ist. Also gibt es zu jedem solchen p ein kleineres Element g von G, und dieses ist dann natürlich zugleich größergleich der unteren Schranke i, so dass insgesamt $i \leq g < p$. Als Element von G ist g ferner ein Element von $\mathbb{A}$. Somit gilt:

Zu jedem p mit $i < p$ gibt es ein g aus $\mathbb{A}$ mit $i \leq g < p$. (7.52)

Sei nun m der Mittelpunkt $\mathfrak{m}(s, i)$:	Es gilt also $s < m < i$;			
Sei i^+ der Punkt $i \oplus (s, m)$:	Es gilt also $i < i^+$	und	$\langle s, m\rangle \cong \langle i, i^+\rangle$;	(7.53)
Sei s^- der Punkt $s \ominus (s, m)$:	Es gilt also $s^- < s$	und	$\langle s, m\rangle \cong \langle s^-, s\rangle$.	(7.54)

Wegen (7.51) gibt es nun ein k aus $\mathbb{A}$ mit $s^- < k \leq s$, und wegen (7.52) ein g aus $\mathbb{A}$ mit $i \leq g < i^+$. Die Situation kann man sich nun wie folgt veranschaulichen (wobei der Doppelpfeil $\leftrightarrow$ zwischen k und s sowie zwischen i und g die mögliche Identität dieser Punkte andeuten soll):

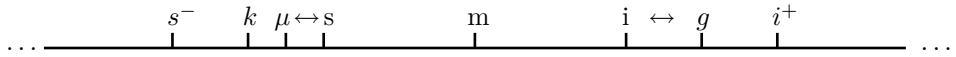


Weil k und g Elemente von $\mathbb{A}$ sind, muss nach Lemma 2 auch der Mittelpunkt $\mu := \mathfrak{m}(k, g)$ von k und g in $\mathbb{A}$ liegen. Wegen $k < \mu < g$ gibt es dann drei zu erwägende Möglichkeiten:

(1) Der Mittelpunkt μ von k und g liegt in $(k, s]$, d. h. $k < \mu \leq s$,
(2) Der Mittelpunkt μ von k und g liegt in (s, i), d. h. $s < \mu < i$,
(3) Der Mittelpunkt μ von k und g liegt in $[i\,, g)$, d. h. $i \leq \mu < g$.

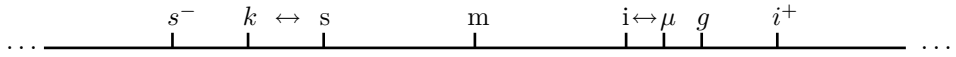
Da aber in (s, i) keine Elemente von $\mathbb{A}$ liegen, ist (2) bereits als nicht zutreffend erwiesen. Wenn wir auch die beiden anderen Möglichkeiten ausschließen können, muss also unsere Annahme falsch sein.

Um nun Möglichkeit (1) zu widerlegen, setzen wir diese als gegeben voraus, was dann wie folgt aussieht (der Doppelpfeil deutet wieder mögliche Identität an):



Weil $[k, \mu]$ dann eine echte Teilklasse von $[s^-, s]$ ist, muss nach Axiom (S3) zunächst $\langle k, \mu\rangle \overset{\sim}{<} \langle s^-, s\rangle$ sein. Wegen Axiom (S4) können wir in dieser Aussage $\langle s^-, s\rangle$ durch das gemäß (7.54) kongruente $\langle s, m\rangle$ ersetzen, und erhalten $\langle k, \mu\rangle \overset{\sim}{<} \langle s, m\rangle$. Nun ist $[s, m]$ wiederum eine echte Teilklasse von $[\mu, g]$, also gilt $\langle s, m\rangle \overset{\sim}{<} \langle \mu, g\rangle$. Insgesamt ist also $\langle k, \mu\rangle \overset{\sim}{<} \langle s, m\rangle \overset{\sim}{<} \langle \mu, g\rangle$ und per Transitivität von $\overset{\sim}{<}$ folgt $\langle k, \mu\rangle \overset{\sim}{<} \langle \mu, g\rangle$. In dieser Aussage können wir aber $\langle k, \mu\rangle$ durch $\langle \mu, g\rangle$ ersetzen (denn da μ der Mittelpunkt von k und g ist, muss $\langle k, \mu\rangle \cong \langle \mu, g\rangle$ gelten). Also folgt $\langle \mu, g\rangle \overset{\sim}{<} \langle \mu, g\rangle$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $\overset{\sim}{<}$. So ist diese Möglichkeit widerlegt.

Trifft Möglichkeit (3) zu, so sieht schließlich die Situation wie folgt aus:



$[\mu, g]$ ist nun eine echte Teilklasse von $[i, i^+]$, also ist $\langle \mu, g\rangle \overset{\sim}{<} \langle i, i^+\rangle$. In dieser Aussage können wir $\langle i, i^+\rangle$ durch das gemäß (7.53) kongruente $\langle s, m\rangle$ ersetzen, und erhalten $\langle \mu, g\rangle \overset{\sim}{<} \langle s, m\rangle$. Nun ist $[s, m]$ echte Teilklasse von $[k, \mu]$, also gilt $\langle s, m\rangle \overset{\sim}{<} \langle k, \mu\rangle$, insgesamt $\langle \mu, g\rangle \overset{\sim}{<} \langle s, m\rangle \overset{\sim}{<} \langle k, \mu\rangle$ und per Transitivität $\langle \mu, g\rangle \overset{\sim}{<} \langle k, \mu\rangle$. In dieser Aussage können wir $\langle k, \mu\rangle$ durch das kongruente $\langle \mu, g\rangle$ ersetzen, und so folgt wieder $\langle \mu, g\rangle \overset{\sim}{<} \langle \mu, g\rangle$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $\overset{\sim}{<}$. Damit sind alle Möglichkeiten widerlegt und Lemma 4 ist bewiesen.

Lemma 5. *Sind x und y beliebige Elemente von $[a, b]$ mit $x < y$, so liegt stets ein Element von $\mathbb{A}$ auch „im strengen Sinn“ dazwischen, d. h. es gibt ein Element m von $\mathbb{A}$ mit $x < m < y$.*

Beweis. Sei ξ der Mittelpunkt zwischen x und y, und η der zwischen ξ und y: Dann gilt $x < \xi < \eta < y$, und es gibt nach Lemma 4 ein m mit $\xi \leq m \leq \eta$, insgesamt ist also $x < \xi \leq m \leq \eta < y$, insbesondere $x < m < y$. Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Lemma 6. *Es gilt $[a, b] \precsim \mathcal{P}(\omega)$.*

Beweis. Sei F die Funktion, die jedes x aus $[a, b]$ auf die Klasse $F(x)$ aller Elemente von $\mathbb{A}$ wirft, die größer als x sind. Dies ist eine Funktion von $[a, b]$ in $\mathcal{P}(\mathbb{A})$, und diese ist injektiv: Liegen nämlich verschiedene Elemente von $[a, b]$ vor, so ist eines (nennen wir es x) kleiner als das andere (nennen wir es y). Nach Lemma 5 gibt es also ein Element n von $\mathbb{A}$ mit $x < n < y$. Da dieses n größer als x, aber nicht größer als y ist, liegt es in $F(x)$, aber nicht in $F(y)$, und somit gilt $F(x) \neq F(y)$.
Da somit F injektiv ist, gilt $[a, b] \precsim \mathcal{P}(\mathbb{A})$. Nun ist aber $\mathbb{A}$ nach Lemma 3 abzählbar unendlich, also gilt $\mathbb{A} \sim \omega$. Daraus folgt gemäß (5.173 S. 258), dass $\mathcal{P}(\mathbb{A}) \sim \mathcal{P}(\omega)$. So dürfen wir gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 in der Aussage $[a, b] \precsim \mathcal{P}(\mathbb{A})$ das $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ durch $\mathcal{P}(\omega)$ ersetzen und erhalten $[a, b] \precsim \mathcal{P}(\omega)$. Damit ist Lemma 6 bewiesen.

Lemma 7. *Es gilt* $\{0,1\}^\omega \precsim [a,b]$.

Beweis.[26] Zu jeder Funktion x aus $\{0,1\}^\omega$ definieren wir rekursiv eine Funktion $\overset{x}{F}$ von ω in $[a,b]^3$.
$\overset{x}{F}$ soll jede Zahl n auf ein 3-Tupel $\overset{x}{F}(n) := \langle\!\langle \overset{x}{F}_0(n), \overset{x}{F}_1(n), \overset{x}{F}_2(n) \rangle\!\rangle$ aus $[a,b]^3$ werfen, und zwar sei

$\overset{x}{F}(0) := \langle\!\langle \overset{x}{F}_0(0), \overset{x}{F}_1(0), \overset{x}{F}_2(0) \rangle\!\rangle$, wobei $\overset{x}{F}_0(0) = a$ und $\overset{x}{F}_1(0) = \mathfrak{m}(a,b)$ und $\overset{x}{F}_2(0) = b$ ist, und
$\overset{x}{F}(n+1) := \langle\!\langle \overset{x}{F}_0(n+1), \overset{x}{F}_1(n+1), \overset{x}{F}_2(n+1) \rangle\!\rangle$, wobei

im Falle $x(n) = 0$ $\quad \overset{x}{F}_0(n+1) := \overset{x}{F}_0(n)$,
$\overset{x}{F}_1(n+1)$ die Mitte von $\overset{x}{F}_0(n)$ und $\overset{x}{F}_2(n)$, und
$\overset{x}{F}_2(n+1)$ die Mitte der gerade definierten Punkte $\overset{x}{F}_0(n+1)$ und $\overset{x}{F}_1(n+1)$ ist;
im Falle $x(n) = 1$ $\quad \overset{x}{F}_2(n+1) := \overset{x}{F}_2(n)$,
$\overset{x}{F}_1(n+1)$ die Mitte von $\overset{x}{F}_0(n)$ und $\overset{x}{F}_2(n)$, und
$\overset{x}{F}_0(n+1)$ die Mitte der gerade definierten Punkte $\overset{x}{F}_1(n+1)$ und $\overset{x}{F}_2(n+1)$ ist.

Nun gilt für jede Zahl n:Nun gilt für jede Zahl n: $\overset{x}{F}_0(n) < \overset{x}{F}_1(n+1) < \overset{x}{F}_2(n)$, (7.55)

wenn $x(n) = 0$, so ist $\overset{x}{F}_0(n+1) < \overset{x}{F}_2(n+1) < \overset{x}{F}_1(n+1)$, (7.56)

wenn $x(n) = 1$, so ist $\overset{x}{F}_1(n+1) < \overset{x}{F}_0(n+1) < \overset{x}{F}_2(n+1)$, (7.57)

wenn $m \leq n$, so ist $\overset{x}{F}_0(m) \leq \overset{x}{F}_0(n)$, und (7.58)

wenn $m \leq n$, so ist $\overset{x}{F}_2(n) \leq \overset{x}{F}_2(m)$. (7.59)

Beweis von (7.55): Wir zeigen zunächst durch Induktion, dass $\overset{x}{F}_0(n) < \overset{x}{F}_2(n)$ gilt.
Induktionsanfang. $\overset{x}{F}_0(0) = a$, $\overset{x}{F}_2(0) = b$, und $a < b$.
Induktionsschluss. Voraussetzung: Für ein n ist $\overset{x}{F}_0(n) < \overset{x}{F}_2(n)$. Sei M der Mittelpunkt zwischen $\overset{x}{F}_0(n)$ und $\overset{x}{F}_2(0)$, es gilt also $\overset{x}{F}_0(n) < M < \overset{x}{F}_2(0)$.
Im Fall $x(n) = 0$ ist nun $\overset{x}{F}_0(n+1) = \overset{x}{F}_0(n)$, $\overset{x}{F}_1(n+1) = M$ und $\overset{x}{F}_2(n+1)$ der Mittelpunkt zwischen $\overset{x}{F}_0(n+1)$ und $\overset{x}{F}_1(n+1)$, d. h. zwischen $\overset{x}{F}_0(n)$ und M, also folgt $\overset{x}{F}_0(n+1) = \overset{x}{F}_0(n) < \overset{x}{F}_2(n+1) < M$.
Im Fall $x(n) = 1$ aber ist $\overset{x}{F}_2(n+1) = \overset{x}{F}_2(n)$, $\overset{x}{F}_1(n+1) = M$ und $\overset{x}{F}_0(n+1)$ der Mittelpunkt zwischen $\overset{x}{F}_1(n+1)$ und $\overset{x}{F}_2(n+1)$, d. h. zwischen M und $\overset{x}{F}_2(n)$, also folgt $M < \overset{x}{F}_0(n+1) < \overset{x}{F}_2(n) = \overset{x}{F}_2(n+1)$.
Im jedem Fall gilt also $\overset{x}{F}_0(n+1) < F_2(n+1)$.
Durch diesen Induktionsbeweis ist also $\overset{x}{F}_0(n) < \overset{x}{F}_2(n)$ sichergestellt, und da $\overset{x}{F}_1(n{+}1)$ in jedem Fall als Mittelpunkt zwischen $\overset{x}{F}_0(n)$ und $\overset{x}{F}_2(n)$ definiert ist, folgt $\overset{x}{F}_0(n) < \overset{x}{F}_1(n{+}1) < \overset{x}{F}_2(n)$. Damit ist (7.55) ist bewiesen.

Beweis von (7.56) und (7.57):
Im Fall $x(n) = 0$ ist $\overset{x}{F}_0(n+1) = \overset{x}{F}_0(n)$, man kann in der linken Teilformel von (7.55) das $\overset{x}{F}_0(n)$ durch $\overset{x}{F}_0(n+1)$ ersetzen, und erhält $\overset{x}{F}_0(n+1) < \overset{x}{F}_1(n+1)$. Außerdem ist $\overset{x}{F}_2(n+1)$ im Fall $x(n) = 0$ die Mitte von $\overset{x}{F}_0(n+1)$ und $\overset{x}{F}_1(n+1)$, so dass $\overset{x}{F}_0(n+1) < \overset{x}{F}_2(n+1) < \overset{x}{F}_1(n+1)$. So ist (7.56) bewiesen.
Im Fall $x(n) = 1$ ist $\overset{x}{F}_2(n+1) = \overset{x}{F}_2(n)$, man kann in der rechten Teilformel von (7.55) das $\overset{x}{F}_2(n)$ durch $\overset{x}{F}_2(n+1)$ ersetzen und erhält $\overset{x}{F}_1(n+1) < \overset{x}{F}_2(n+1)$. Außerdem ist $\overset{x}{F}_0(n+1)$ im Fall $x(n) = 1$ die Mitte von $\overset{x}{F}_1(n+1)$ und $\overset{x}{F}_2(n+1)$, so dass $\overset{x}{F}_1(n+1) < \overset{x}{F}_0(n+1) < \overset{x}{F}_2(n+1)$. So ist (7.57) bewiesen.

Beweis von (7.58) und (7.59). Wir beweisen durch Induktion über n die Aussage, dass für alle m mit $m \leq n$ die Aussagen $\overset{x}{F}_0(m) \leq \overset{x}{F}_0(n)$ und $\overset{x}{F}_2(n) \leq \overset{x}{F}_2(m)$ richtig sind.

[26] Dieser Beweis ist eine Bearbeitung der bei Potter, *Sets* Satz 5.5.4 S. 109 gegebenen Argumentation.

INDUKTIONSANFANG. Das einzige m mit $m \leq 0$ ist 0, und für dieses m (also $m = 0$) gilt natürlich $\overset{x}{F}_0(m) = \overset{x}{F}_0(0)$ und $\overset{x}{F}_2(0) = \overset{x}{F}_2(m)$, erst recht $\overset{x}{F}_0(m) \leq \overset{x}{F}_0(0)$ und $\overset{x}{F}_2(0) \leq \overset{x}{F}_2(m)$.

INDUKTIONSSCHLUSS. VORAUSSETZUNG: Für ein n treffe zu, dass für alle m mit $m \leq n$ stets $\overset{x}{F}_0(m) \leq \overset{x}{F}_0(n)$ und $\overset{x}{F}_2(n) \leq \overset{x}{F}_2(m)$ ist. Sei nun ein m gegeben mit $m \leq n+1$. Dann gibt es zwei Fälle.

FALL 1: $m = n+1$. Dann ist $\overset{x}{F}_0(m) = \overset{x}{F}_0(n+1)$ und $\overset{x}{F}_2(n+1) = \overset{x}{F}_2(m)$, also erst recht $\overset{x}{F}_0(m) \leq \overset{x}{F}_0(n+1)$ und $\overset{x}{F}_2(n+1) \leq \overset{x}{F}_2(m)$.

FALL 2: $m < n+1$, d. h. wegen Theorem 5.16.29 S. 219 $m \leq n$, so dass nach VORAUSSETZUNG gilt:

$$\text{(Vor 0)} \quad \overset{x}{F}_0(m) \leq \overset{x}{F}_0(n) \quad \text{sowie} \quad \text{(Vor 2)} \quad \overset{x}{F}_2(n) \leq \overset{x}{F}_2(m)$$

Wir unterscheiden jetzt wieder zwei Fälle.

FALL 2a: $x(n) = 0$. Dann ist nach der Rekursionsgleichung $\overset{x}{F}_0(n+1)$ mit $\overset{x}{F}_0(n)$ identisch, wir ersetzen daher in (Vor 0) das $\overset{x}{F}_0(n)$ durch $\overset{x}{F}_0(n+1)$ und erhalten $\overset{x}{F}_0(m) \leq \overset{x}{F}_0(n+1)$.
Außerdem gilt $\overset{x}{F}_2(n+1) \underset{(7.56)}{<} \overset{x}{F}_1(n+1) \underset{(7.55)}{<} \overset{x}{F}_2(n) \underset{(\text{Vor2})}{\leq} \overset{x}{F}_2(m)$, also $\overset{x}{F}_2(n+1) \leq F_2\overset{x}{(m)}$.

FALL 2b: $x(n) = 1$. Dann gilt $\overset{x}{F}_0(m) \underset{(\text{Vor 1})}{\leq} \overset{x}{F}_0(n) \underset{(7.55)}{<} \overset{x}{F}_1(n+1) \underset{(7.57)}{<} \overset{x}{F}_0(n+1)$, also $\overset{x}{F}_0(m) \leq \overset{x}{F}_0(n+1)$.
Außerdem ist nun nach der Rekursionsgleichung $\overset{x}{F}_2(n+1) = \overset{x}{F}_2(n)$, wir ersetzen daher in (Vor 2) das $\overset{x}{F}_2(n)$ durch $\overset{x}{F}_2(n+1)$ und erhalten $\overset{x}{F}_2(n+1) \leq \overset{x}{F}_2(m)$. Damit sind die Aussagen (7.58) und (7.59) bewiesen.

Wir betrachten nun die Klasse $\overset{x}{\mathbb{F}}$ aller Werte $\overset{x}{F}_0(n)$ für Zahlen n. Diese ist eine nichtleere und nach oben beschränkte Klasse: Eine obere Schranke ist ja das Maximum b des Intervalls $[a, b]$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom besitzt $\overset{x}{\mathbb{F}}$ daher ein Supremum (kleinste obere Schranke) $\sup \overset{x}{\mathbb{F}}$, und dieses Supremum liegt im Intervall $[a, b]$: Denn als *kleinste* obere Schranke ist $\sup \overset{x}{\mathbb{F}}$ einerseits kleinergleich der oberen Schranke b von $\overset{x}{\mathbb{F}}$, und als *obere Schranke* ist $\sup \overset{x}{\mathbb{F}}$ andererseits größergleich eines jeden Elements $\overset{x}{F}_0(n)$ von $\overset{x}{\mathbb{F}}$, insbesondere größergleich dem Element $\overset{x}{F}_0(0)$, was nach Definition a ist. Da also $\sup \overset{x}{\mathbb{F}}$ in $[a, b]$ liegt, ist die Funktion S, die jedes x aus $\{0, 1\}^\omega$ auf $\sup \overset{x}{\mathbb{F}}$ wirft, eine Funktion von $\{0, 1\}^\omega$ in $[a, b]$ und wir müssen nur noch zeigen, dass S eine Injektion ist: Dann folgt wegen (5.90 S. 200), dass $\{0, 1\}^\omega \precsim [a, b]$, was den Beweis beendet.

Zum Nachweis der Injektivität von S seien x und y verschiedene Elemente von $\{0, 1\}^\omega$, also Funktionen von ω in $\{0, 1\}$. Es gibt dann mindestens eine Zahl n, für die $x(n) \neq y(n)$ ist, und nach Theorem 5.16.36 S. 220 hat die Klasse dieser Zahlen ein Minimum m: Dann ist also $x(m) \neq y(m)$, während aber für jede Zahl k, die kleiner als m ist, $x(k) = y(k)$ gilt.
Darüber hinaus gilt sogar $\overset{x}{F}(k) = \overset{y}{F}(k)$ für alle k mit $k \leq m$. Zum Beweis sei ANGENOMMEN, dass dies falsch ist. Dann ist die Klasse C aller k mit $k \leq m$, für die $\overset{x}{F}(k) \neq \overset{y}{F}(k)$ ist, nicht leer, hat also nach Theorem 5.16.36 ein Minimum μ. Es gilt also $\mu \leq m$ und $\overset{x}{F}(\mu) \neq \overset{y}{F}(\mu)$. Dieses μ kann nicht 0 sein, denn $\overset{x}{F}(0)$ ist mit $\overset{y}{F}(0)$ identisch (beides ist nach Definition das 3-Tupel $\leqslant a, \mathfrak{m}(a, b), b \geqslant$). Sei nun ν der Vorgänger von μ, dann gilt $\nu < \mu \leq m$, erst recht $\nu < m$. Da jedoch ν kleiner als das Minimum μ von C ist, liegt ν nicht in C, also muss $\overset{x}{F}(\nu) = \overset{y}{F}(\nu)$ sein. Da nun ν aber auch zu den Zahlen gehört, die kleiner als m sind, gilt auch $x(\nu) = y(\nu)$. Aus den beiden Tatsachen, dass $\overset{x}{F}(\nu) = \overset{y}{F}(\nu)$ und $x(\nu) = y(\nu)$ gilt, folgt aber mit Blick auf die Rekursionsgleichungen von $\overset{x}{F}$ und $\overset{y}{F}$, dass diese für $\overset{x}{F}(\nu + 1)$ und für $\overset{y}{F}(\nu + 1)$ genau denselben Wert festlegen; wegen $\nu + 1 = \mu$ bedeutet dies, dass $\overset{x}{F}(\mu) = \overset{y}{F}(\mu)$ gilt, im Widerspruch zum obigen Resultat $\overset{x}{F}(\mu) \neq \overset{y}{F}(\mu)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die ANNAHME falsch und die Behauptung richtig war. Da nun also $\overset{x}{F}(k) = \overset{y}{F}(k)$ für alle k mit $k \leq m$ gilt, ist insbesondere ist $\overset{x}{F}(m)$ und $\overset{y}{F}(m)$ ein und dasselbe 3-Tupel. Sei

nun M die Mitte zwischen seiner 0-ten und 2-ten Komponente. Dann gilt nach den Rekursionsgleichungen

$$\overset{x}{F}_1(m+1) = M \text{ und } \overset{y}{F}_1(m+1) = M. \tag{7.60}$$

Wegen $x(m) \neq y(m)$ gilt nun im Fall $x(m) = 0$, dass $y(m) = 1$, und im Fall $x(m) = 1$, dass $y(m) = 0$:

Fall 1: $x(m) = 0$ und $y(m) = 1$. Dann folgt für alle Zahlen n mit $m+1 \leq n$, dass $\overset{x}{F}_0(n) \underset{(7.55)}{<} \overset{x}{F}_2(n) \underset{(7.59)}{\leq} \overset{x}{F}_2(m+1) \underset{(7.56)}{<} \overset{x}{F}_1(m+1) \underset{(7.60)}{=} M$, und für alle Zahlen n mit $n < m+1$, dass $\overset{x}{F}_0(n) \underset{(7.58)}{<} \overset{x}{F}_0(m+1) \underset{(7.56)}{<} \overset{x}{F}_1(m+1) \underset{(7.60)}{=} M$, so dass für alle Zahlen n schlechthin $\overset{x}{F}_0(n) \leq M$ gilt. Das aber heißt: M ist eine obere Schranke der Klasse $\overset{x}{\mathbb{F}}$ aller $\overset{x}{F}_0(n)$, also ist die *kleinste* obere Schranke $\sup \overset{x}{\mathbb{F}}$ dieser Klasse kleinergleich M: Es gilt $\sup \overset{x}{\mathbb{F}} \leq M$. Andererseits ist $\sup \overset{y}{\mathbb{F}}$ die kleinste obere Schranke der Klasse $\overset{y}{\mathbb{F}}$ und darum größergleich $\overset{y}{F}_0(m+1)$, weil dies ein Element dieser Klasse ist. So ist $\overset{y}{F}_0(m+1) \leq \sup \overset{y}{\mathbb{F}}$. Außerdem ist $M \underset{(7.60)}{=} \overset{y}{F}_1(m+1) \underset{(7.57)}{<} \overset{y}{F}_0(m+1)$, insgesamt also $M < \overset{y}{F}_0(m+1) \leq \sup \overset{y}{\mathbb{F}}$, also $M < \sup \overset{y}{\mathbb{F}}$. Mit $\sup \overset{x}{\mathbb{F}} \leq M$ folgt $\sup \overset{x}{\mathbb{F}} \leq M < \sup \overset{y}{\mathbb{F}}$, also $\sup \overset{x}{\mathbb{F}} < \sup \overset{y}{\mathbb{F}}$ und daher $\sup \overset{x}{\mathbb{F}} \neq \sup \overset{y}{\mathbb{F}}$.

Fall 2: $x(m) = 0$ und $y(m) = 1$. Wie in Fall 1 ergibt sich $\sup \overset{x}{\mathbb{F}} \neq \sup \overset{y}{\mathbb{F}}$ auch hier, und zwar ganz analog: Man braucht in dem für den Fall 1 durchgeführten Beweis nur x und y zu vertauschen.
So ist die Injektivität von S und damit Lemma 7 bewiesen.

Lemma 8. *Es gilt* $[a, b] \sim \mathcal{P}(\omega)$.

Beweis. Nach Lemma 7 ist $\{0,1\}^\omega \precsim [a, b]$. Hier dürfen wir wegen Theorem 5.15.4 S. 201 das $\{0,1\}^\omega$ durch das gleichmächtige $\mathcal{P}(\omega)$ (vgl. Theorem 5.18.3 S. 249) ersetzen und erhalten $\mathcal{P}(\omega) \precsim [a, b]$. Nach Lemma 6 gilt $[a, b] \precsim \mathcal{P}(\omega)$, insgesamt also $[a, b] \sim \mathcal{P}(\omega)$ wegen Theorem 5.15.5 S. 201. So ist Lemma 8 bewiesen.

Beweis des Satzes. Sei nun I eines der Intervalle $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$. Dann ist es möglich, Strecken $[u, v]$ und $[x, y]$ anzugeben, derart dass $[u, v] \subset I \subset [x, y]$ gilt, und zwar gleichgültig, welches der vier Intervalle I sein mag: Z. B. sei $x := a \ominus (a, b)$ und $y := b \oplus (a, b)$, dann ist $x < a < b < y$, also ist I eine Teilklasse von $[x, y]$. Ferner sei $u := \mathfrak{m}(a, b)$ und $v := \mathfrak{m}(u, b)$, dann gilt $a < u < v < b$, und so ist $[u, v]$ eine Teilklasse von I. Wegen Satz (5.89 S. 200) gilt also $[u, v] \precsim I \precsim [x, y]$, und nach Lemma 8 ist $[u, v]$ und ebenso $[x, y]$ mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig; wir können also in der Aussage $[u, v] \precsim I \precsim [x, y]$ nach Theorem 5.15.4 S. 201 das $[u, v]$ und auch das $[x, y]$ durch das gleichmächtige $\mathcal{P}(\omega)$ ersetzen und erhalten $\mathcal{P}(\omega) \precsim I \precsim \mathcal{P}(\omega)$. Daraus folgt mit Theorem 5.15.5 S. 201, dass $I \sim \mathcal{P}(\omega)$. □

Theorem 5.21.21 S. 274

Für Punkte a ist jedes der Intervalle (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$ und $(-\infty, a]$ mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig.

Beweis. Der Beweis kann in drei Teilen geführt werden.

1. Für jedes a ist $[a, \infty) \sim \mathcal{P}(\omega)$. Um dies zu zeigen, sei für jede Zahl n aus $\mathbb{N}_a$ mit I_n das Intervall $[n, n+1)$ bezeichnet. Nach Theorem 5.21.20 gilt für jedes n, dass $I_n \sim \mathcal{P}(\omega)$, wir können also eine Bijektion f_n von I_n in $\mathcal{P}(\omega)$ wählen. Ferner sei h die Funktion, die jedes x aus $[a, \infty)$ auf diejenige nach Theorem 5.21.19 S. 274 eindeutig bestimmte Zahl n aus $\mathbb{N}_a$ wirft, für die wahr ist, dass x in I_n liegt. Sei schließlich F die Funktion, die jedes Element x aus $[a, \infty)$ auf das Paar $\langle h(x), f_{h(x)}(x)\rangle$ wirft, welches ein Element von $\mathbb{N}_a \times \mathcal{P}(\omega)$ ist. So ist also F eine Funktion von $[a, \infty)$ in $\mathbb{N}_a \times \mathcal{P}(\omega)$.
F ist eine Injektion: Sind nämlich x und y verschiedene Punkte aus $[a, \infty)$, so ist entweder $h(x) \neq h(y)$ oder $h(x) = h(y)$. Im ersten Fall sind die ersten Komponenten von $F(x)$ und $F(y)$ verschieden. Im zweiten Fall ist $h(x)$ und $h(y)$ ein und dieselbe Zahl n, und es liegen dann x und y beide im Intervall I_n. Wegen der Injektivität von f_n ist dann aber $f_n(x) \neq f_n(y)$, wofür man wegen $n = h(x) = h(y)$ auch $f_{h(x)}(x) \neq f_{h(y)}(y)$ schreiben kann. Also sind nun die zweiten Komponenten von $F(x)$ und $F(y)$ verschieden. In jedem Fall gilt also $F(x) \neq F(y)$.
F ist auch eine Surjektion: Sei nämlich $\langle n, T\rangle$ aus $\mathbb{N}_a \times \mathcal{P}(\omega)$, also n aus $\mathbb{N}_a$ und T aus $\mathcal{P}(\omega)$. Wegen der Surjektivität von f_n gibt es ein x aus dem Intervall I_n, also aus $[n, n+1)$, so dass $f_n(x) = T$. Da x in I_n liegt, gilt $h(x) = n$. Daher wirft F dieses x auf $\langle h(x), f_{h(x)}(x)\rangle$, das heißt auf $\langle n, f_n(x)\rangle$, d. h. auf $\langle n, T\rangle$.

Insgesamt ist also F eine Bijektion. Somit ist $[a,\infty)$ mit $\mathbb{N}_a \times \mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig, dies ist nach (5.178 S. 265) gleichmächtig mit $\mathcal{P}(\omega)$, weil $\mathbb{N}_a$ abzählbar unendlich und $\mathcal{P}(\omega)$ kontinuierlich unendlich ist. Damit ist $[a,\infty) \sim \mathcal{P}(\omega)$ für jedes a bewiesen.

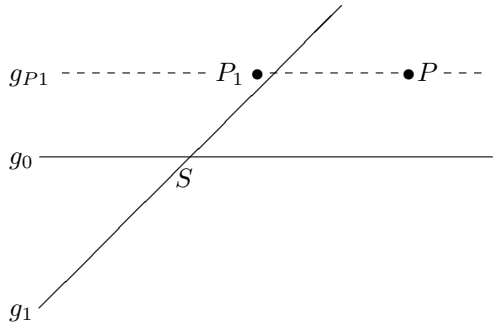
2. Für jedes a ist auch $(a,\infty) \sim \mathcal{P}(\omega)$. Denn (a,∞) ist eine Teilklasse von $[a,\infty)$, und wir können einen Punkt x finden, so dass $[x,\infty)$ eine Teilklasse von (a,∞) ist (hierzu muss nur $x > a$ sein), also insgesamt $[x,\infty) \subseteq (a,\infty) \subseteq [a,\infty)$ gilt. Wegen (5.89 S. 200) gilt also $[x,\infty) \precsim (a,\infty) \precsim [a,\infty)$. Da nach dem schon bewiesenen Teil 1 des Beweises $[x,\infty)$ und ebenso $[a,\infty)$ mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig ist, können wir in $[x,\infty) \precsim (a,\infty) \precsim [a,\infty)$ nach Theorem 5.15.4 S. 201 das $[x,\infty)$ und auch das $[a,\infty)$ durch das gleichmächtige $\mathcal{P}(\omega)$ ersetzen und erhalten $\mathcal{P}(\omega) \precsim (a,\infty) \precsim \mathcal{P}(\omega)$. Daraus folgt mit Theorem 5.15.5 S. 201, dass $I \precsim \mathcal{P}(\omega)$.

3. Schließlich ist die Gleichmächtigkeit der Intervalle $(-\infty,a)$ und $(-\infty,a]$ mit $\mathcal{P}(\omega)$ zu beweisen. Hierzu genügt es zu zeigen, dass das erste mit (a,∞) und das zweite mit $[a,\infty)$ gleichmächtig ist: Dann müssen beide ebenso wie (a,∞) und $[a,\infty)$ mit $\mathcal{P}(\omega)$ gleichmächtig sein. Für x aus (a,∞) sei $-x$ der Punkt $a \ominus (x,a)$. Da dieser nach Satz (5.183) kleiner als a ist, liegt er in $(-\infty,a)$. Die Funktion f, die alle x aus (a,∞) auf $-x$ wirft, ist also eine Funktion von (a,∞) in $(-\infty,a)$.
Dieses F ist eine Injektion: Sind zwei verschiedene Punkte aus (a,∞) gegeben, so muss der eine (nennen wir ihn x) kleiner sein als der andere (nennen wir ihn y), und dann müssen auch $-x$ (also $a \ominus (a,x)$) und $-y$ (also $a \ominus (a,y)$) verschieden sein. Denn ANGENOMMEN, $a \ominus (a,x)$ und $a \ominus (a,y)$ sind ein und derselbe Punkt z von $(-\infty,a)$, so gilt wegen (5.183 S. 273) sowohl $\langle z,a\rangle \cong \langle a,x\rangle$ als auch $\langle z,a\rangle \cong \langle a,y\rangle$, und weil $\cong$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt $\langle a,x\rangle \cong \langle a,y\rangle$. Wegen $x < y$ ist aber $[a,x]$ eine echte Teilklasse von $[a,y]$, so dass nach Axiom (S3) $\langle a,x\rangle \overset{\sim}{<} \langle a,y\rangle$ gelten muss. In dieser Aussage kann man $\langle a,y\rangle$ nach Axiom (S4) durch das kongruente $\langle a,x\rangle$ ersetzen und erhält $\langle a,x\rangle \overset{\sim}{<} \langle a,x\rangle$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $\overset{\sim}{<}$. Also war die ANNAHME falsch.
F ist auch eine Surjektion: Ist nämlich ein z aus $(-\infty,a)$ gegeben, so ist $z < a$. Der Punkt $x := a \oplus (z,a)$ ist dann nach (5.182 S. 273) größer als a, liegt also in (a,∞), und es gilt $\langle a,x\rangle \cong \langle z,a\rangle$. Diesen Punkt x wirft aber f auf den Punkt $a \ominus (a,x)$. Das ist nach Definition von $\ominus$ und Axiom (S5) der eindeutig bestimmte Punkt ζ, der kleiner als a ist und für den $\langle a,x\rangle \cong \langle \zeta,a\rangle$ gilt. Nun ist z aber ein solcher Punkt: Wir sahen ja, dass $z < a$ und $\langle a,x\rangle \cong \langle z,a\rangle$. Also muss z dieser Punkt ζ sein, auf den f das Element x von (a,∞) wirft.
Insgesamt ist F also eine Bijektion. So ist $(-\infty,a)$ mit (a,∞) gleichmächtig.
So bleibt nur noch $(-\infty,a] \sim [a,\infty)$ zu zeigen. Nun folgt aber aus $(-\infty,a) \sim (a,\infty)$ wegen Theorem 5.12.4 S. 165 (und weil a in keiner der beiden Klassen liegt), dass $(-\infty,a) \cup \{a\}$ mit $(-\infty,a) \cup \{a\}$ gleichmächtig ist, wobei die linke Klasse mit $(-\infty,a]$ identisch ist und die rechte mit $[a,\infty)$. □

Theorem 5.21.37 S. 279

Ist $\langle g_0, g_1 \rangle$ ein Koordinatensystem von Ebene $\mathcal{E}$, so gilt $\mathcal{E} \sim g_0 \times g_1$.

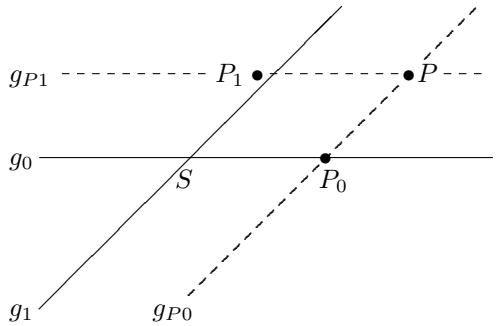
Beweis. Zu jedem Punkt P von $\mathcal{E}$ betrachten wir die Parallele zu g_0 durch den Punkt P, die nach Lemma 5.21.34 S. 277 zusammen mit g_0 und g_1 ebenfalls in Ebene $\mathcal{E}$ liegen muss und in nebenstehendem Schaubild als gestrichelte Linie dargestellt ist. Wir nennen sie g_{P1}, und es ist anschaulich klar, dass sie g_1 in genau einem Punkt schneidet, den wir P_1 nennen wollen. Dass g_{P1} die Gerade g_1 nun tatsächlich in genau einem Punkt P_1 schneidet, dürfen wir hier natürlich nicht der Anschauung entnehmen, sondern müssen es aus den Axiomen ableiten.



Sei also ANGENOMMEN, dass die in derselben Ebene liegenden Geraden g_{P1} und g_1 sich *nicht* in genau einem Punkt schneiden, so sind sie nach Lemma 5.21.33 S. 277 parallel, während andererseits g_{P1} nach Definition auch zu g_0 parallel ist; also sind dann auch g_1 und g_0 zueinander parallel, da ja Parallelität nach unserem Parallelenaxiom (P3) eine Äquivalenzrelation ist,[27] aber das ist falsch. Also war die ANNAHME falsch und es schneiden sich g_{P1} und g_1 in genau einem Punkt.

[27] Zu den Parallelenaxiomen siehe 5.21.35 S. 278, zu Äquivalenzrelationen 5.12.1 S. 164.

Nun betrachten wir weiter die Parallele zu g_1 durch den Punkt P, die nach Lemma 5.21.34 ebenfalls in Ebene $\mathcal{E}$ liegen muss, und nennen sie g_{P0}, weil sie mit g_0 genau einen Punkt gemeinsam hat, den wir P_0 nennen wollen. Dass sie mit g_0 genau einen Punkt gemeinsam hat, beweist man genauso wie die eben bewiesene Tatsache, dass g_{P_1} und g_1 sich in genau einem Punkt schneiden: Würden sich die Geraden g_{PO} und g_0 nicht schneiden, so müsste g_{P0} außer mit der Geraden g_1 auch mit der Geraden g_0 parallel sein, und somit wären insbesondere die Geraden g_1 und g_0 parallel, was falsch ist.



Für jeden Punkt P der Ebene bezeichnen wir nun P_0 als die 0-*te Projektion* von P und P_1 als die 1-*te Projektion* von P bezüglich des Koordinatensystems $\ll g_1, g_2 \gg$. Es gilt nun:

- *Die Punkte von g_{P1} und nur diese haben den Punkt P_1 als* 1-*te Projektion. und* (7.61)
- *Die Punkte von g_{P0} und nur diese haben den Punkt P_0 als* 0-*te Projektion.* (7.62)

Zum Beweis von (7.61) ist für jedes X aus $\mathcal{E}$ zu zeigen:

(a) Liegt X auf g_{P1}, so ist $X_1 = P_1$, und

(b) liegt X nicht auf g_{P1}, so ist $X_1 \neq P_1$.

Nun ist die erste Projektion X_1 von X nach Definition der Schnittpunkt von g_{X1} mit g_1, wobei g_{X1} «die Parallele zu g_0 durch den Punkt X» ist. Da g_{P_1} ebenfalls zu g_0 parallel ist, folgt aufgrund von Parallelenaxiom (P3), dass g_{P_1} und g_{X_1} auch zueinander parallel sein müssen; also sind sie (nach Definition der Parallelität) entweder identisch oder haben kein gemeinsames Element. Liegt nun X auf g_{P1}, so ist X aber ein gemeinsames Element von g_{P1} und g_{X1}, also sind dann die Geraden g_{P_1} und g_{X_1} identisch. Folglich ist auch deren Schnittpunkt mit g_1 ein und derselbe, so dass $X_1 = P_1$ gilt. Damit ist (a) bewiesen.
Liegt aber X nicht auf g_{P1}, müssen die Geraden g_{P1} und g_{X1} verschieden sein (wären sie identisch, läge das auf g_{X1} liegende X auch auf g_{P1}), und als voneinander verschiedene parallele Geraden können sie dann kein gemeinsames Element haben. Folglich müssen die Elemente X_1 von g_{X1} und P_1 von g_{P1} jetzt verschieden sein. Damit ist (b) bewiesen.

Zum Beweis von (7.62) vertausche man nun in obigem Beweis von (7.61) die Indizes 0 und 1 und ersetze «erste Projektion» durch «nullte Projektion».

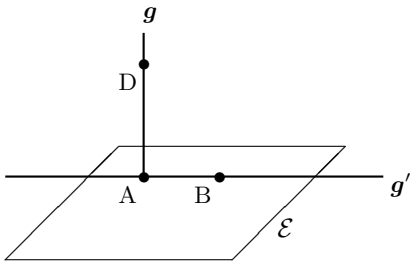
Sei nun f die Funktion, die jeden Punkt P der Ebenen auf das Paar $\langle P_0, P_1\rangle$ wirft. Dies ist eine Funktion von E in $g_0 \times g_1$, und wir wollen zeigen, dass sie sogar eine Bijektion ist. Hierzu genügt es zu zeigen, dass es zu jedem Punktepaar $\langle P, Q\rangle$ aus $g_0 \times g_1$ *genau einen* Punkt der Ebenen gibt, den f auf $\langle P, Q\rangle$ wirft: Denn wenn es *mindestens* einen solchen Punkt gibt, ist f surjektiv, und wenn *höchstens* einen, injektiv; wenn es also *genau* einen gibt, ist f sowohl surjektiv als auch injektiv und damit bijektiv. Wir müssen uns daher davon überzeugen, dass es genau einen Punkt gibt, dessen 0-te Projektion P und dessen 1-te Q ist.

Sei also ein $\langle P, Q\rangle$ mit $P \in g_0$ und $Q \in g_1$ gegeben. Dann muss $P_0 = P$ und $Q_1 = Q$ gelten: Denn P_0 ist nach Definition der Schnittpunkt von g_{P0} mit g_0, und da P sowohl auf g_0 als auch auf g_{P0} liegt (Letzteres gilt nach Definition von g_{P0}), muss P dieser Schnittpunkt sein. Analog folgt $Q_1 = Q$. Weiter sind nach (7.62) diejenigen Punkte, deren 0-te Projektion der Punkt P $(= P_0)$ ist, genau die auf g_{P0} liegenden Punkte. Ebenso sind nach (7.61) diejenigen Punkte, deren 1-te Projektion der Punkt Q $(= Q_1)$ ist, genau die auf g_{Q1} liegenden. Folglich sind diejenigen Punkte, für die zugleich gilt, dass ihre 0-te Projektion P und ihre 1-te Projektion Q ist, genau diejenigen, die zugleich auf g_{P0} und g_{Q1} liegen. Um zu zeigen, dass es genau einen solchen Punkt gibt, ist also zu zeigen, dass sich g_{P0} und g_{Q1} in genau einem Punkt schneiden. In der Tat muss dies so sein: Andernfalls wären nach Lemma 5.21.33 beide Geraden parallel; und da g_{P0} zu g_1 und g_{Q1} zu g_0 parallel ist, würde mit Parallelenaxiom (P3) folgten, dass die Geraden g_1 und g_0 parallel sind, was falsch ist. Also ist f eine Bijektion, und somit gilt $E \sim g_1 \times g_2$. □

Lemma 5.21.40 S. 280

Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene und g eine Gerade, die $\mathcal{E}$ in genau einem Punkt schneidet.
Dann schneidet g auch jede Parallelebene von $\mathcal{E}$ in genau einem Punkt.

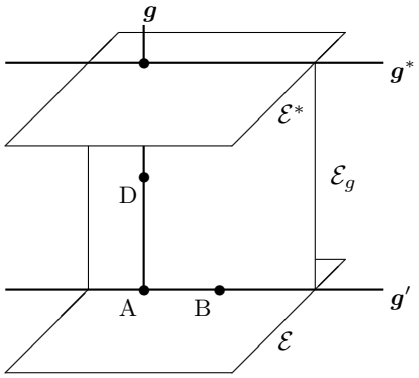
Beweis. Der eine Punkt, in dem g und $\mathcal{E}$ sich schneiden, heiße A. Nach Inzidenzaxiom (I1) können wir auf g einen von A verschiedenen Punkt D wählen: Dieser liegt dann nicht auf $\mathcal{E}$. Wegen Axiom (I4) können wir auf $\mathcal{E}$ außer A noch einen weiteren Punkt B wählen. Wegen (I5) liegt dann die durch A und B gehende Gerade g' ebenfalls auf $\mathcal{E}$. Da g die Ebene $\mathcal{E}$ selbst bereits nach Voraussetzung in genau einem Punkt schneidet, ist nur noch zu zeigen, dass g auch jede *von $\mathcal{E}$ verschiedene* Parallelebene $\mathcal{E}^*$ in genau einem Punkt schneidet, wobei $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}^*$ als verschiedene Parallelebenen keine gemeinsamen Punkte haben.



Der Beweis kann nun durch Widerlegung der beiden ANNAHMEN geführt werden, dass g mit $\mathcal{E}^*$ mehrere oder gar keine Punkte gemeinsam hat.

Sei also ERSTENS ANGENOMMEN, das g die Ebene $\mathcal{E}^*$ in *mehreren* Punkten schneidet: Dann liegt g nach (I5) ganz auf $\mathcal{E}^*$ und könnte mit $\mathcal{E}$ keinen gemeinsamen Punkt haben, was falsch ist und die sc Annahme widerlegt.

Sei ZWEITENS ANGENOMMEN, dass g die Ebene $\mathcal{E}^*$ *nicht* schneidet. Man betrachte dann die durch A, B und D gehende Ebene $\mathcal{E}_g$. Ihre Existenz ist durch (I3) verbürgt, da A, B und D nicht auf ein und derselben Geraden liegen: Denn wäre h eine Gerade, auf der A, B und D liegen, so läge h ganz in der Ebene $\mathcal{E}$ (wegen (I5) und weil die Punkte A und B in $\mathcal{E}$ liegen), und somit läge auch ihr Punkt D in $\mathcal{E}$, was falsch ist. Auf $\mathcal{E}_g$ liegt nun nach (I5) die ganze Gerade g, da die Punkte A und D von $\mathcal{E}_g$ zu g gehören. Eine zweite auf $\mathcal{E}_g$ liegende Gerade ist die durch A und B gehende Gerade g', die zugleich auf $\mathcal{E}$ liegt. Nun ist die Ebene $\mathcal{E}_g$ von $\mathcal{E}$ verschieden (da ihr der Punkt D angehört, der $\mathcal{E}$ nicht angehört) und hat mit ihr dennoch Punkte gemeinsam. Daher ist $\mathcal{E}_g$ zu $\mathcal{E}$ *nicht* parallel. $\mathcal{E}_g$ ist dann auch zu $\mathcal{E}^*$ nicht parallel: Sonst wäre $\mathcal{E}_g$ zu $\mathcal{E}^*$ und $\mathcal{E}^*$ zu $\mathcal{E}$, also nach Axiom (P3) auch $\mathcal{E}_g$ zu $\mathcal{E}$ parallel. Daher ist nach (I6) die Schnittklasse $\mathcal{E}_g \cap \mathcal{E}^*$ eine Gerade g^*. Auch die Gerade g^* liegt dann (ebenso wie g und g') auf Ebene $\mathcal{E}_g$. Nun folgt aber aus unserer ANNAHME, dass g^* und g keinen gemeinsamen Punkt haben können (anders als in obigem Bild!), denn ein solcher Punkt wäre auch ein gemeinsamer Punkt von g und $\mathcal{E}^*$, den es nach ANNAHME nicht gibt. Aber auch g^* und g' können keinen gemeinsamen Punkt haben: Denn sie liegen auf parallelen Ebenen $\mathcal{E}^*$ und $\mathcal{E}$ ohne gemeinsamen Punkt. Also ist g^* sowohl mit g als auch mit g' parallel, und so wären g und g' parallel. Da sie aber den gemeinsamen Punkt A haben, müssten sie dann identisch sein (denn parallele Geraden sind identisch oder haben keinen gemeinsamen Punkt). Dann müsste aber der auf g liegende Punkt D auch auf g' liegen, und weil g' auf $\mathcal{E}$ liegt, läge D auf $\mathcal{E}$, was falsch ist. So war die ZWEITE ANNAHME ebenfalls falsch, und das Lemma ist bewiesen. □

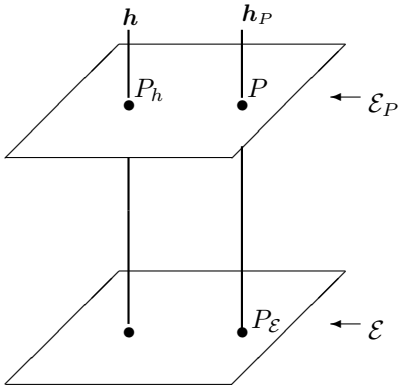


Theorem 5.21.41 S. 280

Ist $\mathcal{E}$ ein Ebene und h eine Gerade, die $\mathcal{E}$ in genau einem Punkt schneidet, so gilt $\mathcal{R} \sim \mathcal{E} \times h$.

Beweis (vgl. den analogen Beweis von Theorem 5.21.37 S. 279 auf Seite S. 451–452).

Sei P ein Punkt des Raumes. Sei dann $\mathcal{E}_P$ die nach Axiom (P2) existierende und eindeutig bestimmte Parallelebene zu $\mathcal{E}$ durch P; und sei h_P die nach Axiom (P1) existierende und eindeutig bestimmte Parallele zu h durch P. Dann hat $\mathcal{E}_P$ nach Lemma 5.21.40 S. 280 mit h genau einen Punkt gemeinsam, den wir den *Höhenpunkt* P_h von P nennen wollen. Da h mit $\mathcal{E}_P$ nur einen Punkt gemeinsam hat, können auch h_P und $\mathcal{E}_P$ außer dem Punkt P keinen weiteren gemeinsamen Punkt haben (andernfalls läge h_P nach (I5) ganz in $\mathcal{E}_P$, und nach Lemma 5.21.34 S. 277 läge h dann ebenfalls ganz in $\mathcal{E}_P$; damit hätte h aber wegen (I1) mit $\mathcal{E}_P$ mehr als einen Punkt gemeinsamen, was falsch ist) und nach Lemma 5.21.40 hat daher h_P auch mit jeder Parallelebene zu $\mathcal{E}_P$, insbesondere mit $\mathcal{E}$ einen und nur einen gemeinsamen Punkt. Diesen nennen wir den *Fußpunkt* $P_{\mathcal{E}}$ von P.



Nun gilt:

- *Die Punkte von h_P und nur diese haben den Punkt $P_\mathcal{E}$ als Fußpunkt.* (7.63)
- *Die Punkte von $\mathcal{E}_P$ und nur diese haben den Punkt P_h als Höhenpunkt.* (7.64)

Zum Beweis von (7.63) ist für jeden Punkt X des Raumes zu zeigen:

(a) Liegt X auf h_P, so ist $X_\mathcal{E} = P_\mathcal{E}$, und

(b) liegt X nicht auf h_P, so ist $X_\mathcal{E} \neq P_\mathcal{E}$.

Dabei ist $X_\mathcal{E}$ der Schnittpunkt von h_X mit $\mathcal{E}$, wobei h_X die Parallele zu h durch X ist, und $P_\mathcal{E}$ der Schnittpunkt von h_P mit $\mathcal{E}$, wobei h_P die Parallele zu h durch P ist.
Liegt nun X auf h_P, so ist h_P eine Parallele zu h, die durch X geht, wegen (P1) muss daher h_P «die durch X gehende Parallele zu h» sein, d. h. h_P ist mit h_X identisch. Dann bedeutet «Schnittpunkt von h_X mit $\mathcal{E}$» dasselbe wie «Schnittpunkt von h_P mit $\mathcal{E}$», d. h. $X_\mathcal{E} = P_\mathcal{E}$. Damit ist (a) bewiesen.
Liegt aber X nicht auf h_P, so ist die Parallele zu h durch X *nicht* mit h_P identisch. Da aber h_P und h_X beide zu h und daher wegen Axiom (P3) auch zueinander parallel sind, können h_P und h_X dann nach Definition der Parallelität kein gemeinsames Element haben, also müssen die Elemente $X_\mathcal{E}$ von h_X und $P_\mathcal{E}$ von h_P jetzt verschieden sein. Somit ist (b) bewiesen.

Zum Beweis von (7.64) vertausche man in obigem Beweis von (7.63) die Symbole h und $\mathcal{E}$ und ersetze (P1) durch (P2) sowie «Parallele» durch «Parallelebene».

Nun ist die Funktion f, die jeden Punkt P des Raumes auf $\langle P_\mathcal{E}, P_h\rangle$ wirft, eine Funktion von $\mathcal{R}$ in $\mathcal{E} \times h$, und wir behaupten, dass sie sogar eine Bijektion ist. Hierzu ist zu zeigen, dass es zu jedem Punktepaar $\langle P, Q\rangle$ aus $\mathcal{E} \times h$ *genau einen* Punkt gibt, den f auf $\langle P, Q\rangle$ wirft.

Sei also ein $\langle P, Q\rangle$ mit $P \in \mathcal{E}$ und $Q \in h$ gegeben. Dann ist $P_\mathcal{E} = P$ (denn $P_\mathcal{E}$ ist der Schnittpunkt von h_P mit $\mathcal{E}$, wobei h_P die durch P gehende Parallele zu h ist; nun gilt $P \in \mathcal{E}$, und P liegt natürlich auf jeder «durch P gehenden» Parallelen, ist also jener Schnittpunkt) und $Q_h = Q$ (denn Q_h ist der Schnittpunkt von $\mathcal{E}_Q$ mit h, wobei $\mathcal{E}_Q$ die Parallelebene zu $\mathcal{E}$ durch Q ist; nun gilt $Q \in h$, und Q liegt natürlich auf jeder «durch Q gehenden» Parallelebenen, ist also jener Schnittpunkt). Nun sind nach (7.63) die Punkte, deren Fußpunkt P $(= P_\mathcal{E})$ ist, genau die auf h_P liegenden Punkte. Ebenso sind nach (7.64) die Punkte, deren Höhenpunkt Q $(= Q_h)$ ist, genau die auf $\mathcal{E}_Q$ liegenden. Also sind die Punkte mit Fußpunkt P *und* Höhenpunkt Q die Schnittpunkte von h_P und $\mathcal{E}_Q$. Da nun h_P, wie schon festgestellt, mit $\mathcal{E}$ genau einen gemeinsamen Punkt hat, folgt nach Lemma 5.21.40, das h_P auch mit jeder Parallelebene von $\mathcal{E}$, also auch mit $\mathcal{E}_Q$ genau einen gemeinsamen Punkt hat. So ist f eine Bijektion und es gilt $\mathcal{R} \sim \mathcal{E} \times h$. □

Theorem 5.22.1 S. 282

Sind $\kappa, \kappa_1, \kappa_2$ kontinuierlich unendlich, sind $\mathcal{P}(\kappa)$ und ${\kappa_1}^{\kappa_2}$ gleichmächtig, und mächtiger als $\mathbb{R}$.

Beweis. (1) Es gilt $\mathbb{R} \prec \mathcal{P}(\kappa)$. Denn da κ und $\mathbb{R}$ kontinuierlich unendlich sind, gilt $\kappa \sim \mathbb{R}$, also ist nach (5.173 S. 258) auch $\mathcal{P}(\kappa) \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Also kann man nach Theorem 5.15.4 S. 201 in der wahren Aussage $\mathbb{R} \prec \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (Theorem 5.20.19 S. 262) das $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ durch $\mathcal{P}(\kappa)$ ersetzt und erhält $\mathbb{R} \prec \mathcal{P}(\kappa)$.
(2) Es gilt $\mathcal{P}(\kappa) \sim {\kappa_1}^{\kappa_2}$. Denn da κ kontinuierlich unendlich ist, gilt $\kappa \sim \mathcal{P}(\omega)$, also folgt wieder mit (5.173), dass $\mathcal{P}(\kappa) \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$, gemäß (5.181 S. 265) ist $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \sim \mathcal{P}(\omega)^{\mathcal{P}(\omega)}$, und gemäß (5.172 S. 258) wegen $\mathcal{P}(\omega) \sim \kappa_1$ und $\mathcal{P}(\omega) \sim \kappa_2$ schließlich $\mathcal{P}(\omega)^{\mathcal{P}(\omega)} \sim {\kappa_1}^{\kappa_2}$: Insgesamt gilt also $\mathcal{P}(\kappa) \sim {\kappa_1}^{\kappa_2}$.
(3) Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathbb{R} \prec {\kappa_1}^{\kappa_2}$. In der unter (1) bewiesenen Aussage, dass $\mathbb{R} \prec \mathcal{P}(\kappa)$, können wir aber gemäß Theorem 5.15.4 $\mathcal{P}(\kappa)$ durch (das nach Teil (2) des Beweises mit $\mathcal{P}(\kappa)$ gleichmächtige) ${\kappa_1}^{\kappa_2}$ ersetzen und erhalten $\mathbb{R} \prec {\kappa_1}^{\kappa_2}$. □

Theorem 5.23.2 S. 286

Für jede Ordinalzahl α ist $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\alpha$ eine mit $\mathbb{R}^\alpha$ gleichmächtige (also α-dimensionale) Menge, $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_{\alpha+1}$ setzt sich aus kontinuierlich unendlich vielen disjunkten α-dimensionalen Mengen zusammen, von denen $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\alpha$ eine ist, und für Ordinalzahlen α und β mit $\alpha < \beta$ gilt stets $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\alpha \subset \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\beta \subset \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$.

Beweis. Sei F die Funktion von $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ in $\mathbb{R}^\alpha$, die jedes ξ-Tupel t aus $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ (mit $\xi \leq \alpha$) auf dasjenige Element $F(t)$ aus $\mathbb{R}^\alpha$ wirft, für welches gilt:
(1) $F(t)(x) = t(x)$ für alle x aus ξ (d. h. alle x mit $x < \xi$), und
(2) $F(t)(x) = 0_\mathbb{N}$ für alle x aus $\alpha \setminus \xi$ (d. h. mit $\xi \leq x < \alpha$).

Dieses F ist injektiv: Seien t_1 und t_2 verschiedene Elemente von $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$, nämlich t_1 ein ξ_1– und t_2 ein ξ_2-Tupel ($\xi_1 \leq \alpha$ und $\xi_2 \leq \alpha$). Zu zeigen ist, dass $F(t_1)$ und $F(t_2)$ verschieden sind.
Fall 1. Ist $\xi_1 < \xi_2$, so gilt für alle x mit $\xi_1 \leq x < \xi_2$, dass $\xi_1 \leq x < \alpha$, und wegen (2) gilt $F(t_1)(x) = 0$. Gilt also für ein solches x, dass $F(t_2)(x) \neq 0$, so sind $F(t_1)$ und $F(t_2)$ verschieden. Nun gilt für alle x mit $\xi_1 \leq x < \xi_2$ wegen (1), dass $F(t_2)(x) = t_2(x)$, und für mindestens ein solches x muss in der Tat $t_2(x) \neq 0$ (und somit $F(t_2)(x) \neq 0$) sein: Denn entweder gilt $t_2(\xi_1) \neq 0$ und somit $t_2(x) \neq 0$ für $x = \xi_1$, oder andernfalls (wenn $t_2(\xi_1) = 0$ ist) gibt es, weil t_2 als Element von $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ «als letzte Komponenten keine Nullen hat» ein x mit $x \in \xi_2$ und $\xi_1 < x$ (also mit $\xi_1 < x < \xi_2$), so dass $t_2(x) \neq 0$.
Fall 2. Ist $\xi_2 < \xi_1$, so vertauschen wir in obiger Argumentation die Indizes 1 und 2.
Fall 3. Ist $\xi_1 = \xi_2$, haben t_1 und t_2 den gemeinsamen Definitionsbereich $\xi := \xi_1 = \xi_2$, und es gibt wegen $t_1 \neq t_2$ mindestens ein x aus ξ mit $t_1(x) \neq t_2(x)$. Daraus folgt $F(t_1)(x) = t_1(x) \neq t_2(x) = F(t_2)(x)$, also $F(t_1) \neq F(t_2)$. Damit ist die Injektivität von F bewiesen.

F ist auch surjektiv: Sei t ein Tupel aus $\mathbb{R}^\alpha$. Hat t «als letzte Komponenten keine Nullen», so ist t ein α-Tupel aus $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$, und es folgt aus (1), dass $F(t)(x) = t(x)$ für alle x aus α, und somit $F(t) = t$. Hat aber t «als letzte Komponenten Nullen», so heißt dies gemäß Definition 5.23.1 S. 286, dass es ein ξ aus α gibt, so dass $t(\xi) = 0$ und auch $t(\eta) = 0$ für alle η aus α mit $\xi < \eta$; kurz gesagt, dass es ein ξ aus α gibt mit $t(x) = 0$ für alle x mit $\xi \leq x < \alpha$. Sei nun ξ_0 das Minimum der Klasse aller derartigen Ordinalzahlen ξ. Dann gilt also $t(x) = 0$ für alle x mit $\xi_0 \leq x < \alpha$. Sei ferner t^* das ξ_0-Tupel mit $t^*(x) = t(x)$ für alle x mit $x < \xi_0$ (falls $\xi_0 = 0$ ist, ist t^* das leere Tupel). Wegen der Minimalität von ξ_0 hat t^* «als letzte Komponenten keine Nullen», liegt also in $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$, und wegen (1) und (2) gilt nun $F(t^*)(x) = t(x)$ sowohl für x aus ξ_0 als auch für x aus $\alpha \setminus \xi_0$, und somit $F(t^*) = t$.

Damit ist F eine Bijektion und es gilt $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}} \sim \mathbb{R}^\alpha$, also ist $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ eine α-dimensionale Menge (eine Menge wegen 5.12.10 S. 167, da $\mathbb{R}$ und α und somit $\mathbb{R}^\alpha$ nach 5.10.62 S. 142 eine Menge ist).

Sei f die Familie mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$, die $0_\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ wirft und jedes x aus $\mathbb{R}$ mit $x \neq 0_\mathbb{N}$ auf die Menge $f_x := \{g \mid g \in \mathbb{R}^{\alpha+1} \wedge g_\alpha = x\}$ aller Elemente von $\mathbb{R}_{\alpha+1}^{\mathtt{ord}}$ mit x als α-ter Komponente.

Die Mengen der Familie f sind α-dimensional: $f_{0_\mathbb{N}}$ ist ja das α-dimensionale $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$, und für $x \neq 0_\mathbb{N}$ ist die Funktion, die jedes g aus $\mathbb{R}^\alpha$ auf $g \cup \{\langle \alpha, x \rangle\}$ wirft, offensichtlich eine Bijektion von $\mathbb{R}^\alpha$ in f_x, und so ist auch f_x α-dimensional.

Ferner ist die Familie f ist disjunkt: Die Elemente von f_{x_1} und f_{x_2} mit $x_1 \neq x_2$ unterscheiden sich (a) im Fall $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{N}\}$ dadurch, dass x_1 die α-te Komponente der Elemente von f_{x_1} und x_2 die α-te Komponente der Elemente von f_{x_2} ist, und (b) im Fall $0_\mathbb{N} = x_1 \neq x_2$ oder $0_\mathbb{N} = x_2 \neq x_1$ dadurch, dass die Elemente der einen Menge $\alpha + 1$-Tupel, die der anderen aber nur ξ-Tupel mit einem $\xi \leq \alpha$ sind.

Weiter gilt $\mathbb{R}_{\alpha+1}^{\mathtt{ord}} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} f_x$, d. h. $\mathbb{R}_{\alpha+1}^{\mathtt{ord}}$ setzt sich aus den kontinuierlich unendlich vielen disjunkten Mengen f_x für $x \in \mathbb{R}$ zusammen: $\mathbb{R}_{\alpha+1}^{\mathtt{ord}}$ enthält ja genau die ξ-Tupel mit $\xi \leq \alpha + 1$ mit Werten aus $\mathbb{R}$, die «als letzte Komponenten keine Nullen haben», und dies sind genau (a) die ξ-Tupel mit $\xi \leq \alpha$ mit Werten aus $\mathbb{R}$, die «als letzte Komponenten keine Nullen haben» (also die Elemente von $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$, d. h. von $f_{0_\mathbb{N}}$), und (b) und zusätzlich die $\alpha + 1$-Tupel mit Werten aus $\mathbb{R}$ und einem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{N}\}$ als letzter (α-ter) Komponente (das sind die f_x mit $x \neq 0_\mathbb{N}$).
Schließlich ist im Fall $\alpha < \beta$ stets $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ eine Teilklasse von $\mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}}$. Denn jedes f aus $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ ist eine Funktion von einem ξ mit $\xi \leq \alpha$ in $\mathbb{R}$, die als letzte Komponenten keine Nullen hat; und wegen $\alpha < \beta$ gilt auch $\xi \leq \beta$ und so liegt f in $\mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}}$. Genauer ist $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$ sogar eine *echte* Teilklasse von $\mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}}$. Denn aus $\alpha < \beta$ folgt, dass $\alpha + 1 \leq \beta$, aber nicht $\alpha + 1 \leq \alpha$ ist, und so ist jede Funktion von $\alpha + 1$ in $\mathbb{R}$, die jedes Element von $\alpha + 1$ auf ein von $0_\mathbb{N}$ verschiedenes Element von $\mathbb{R}$ wirft, ein Element von $\mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}}$, aber nicht von $\mathbb{R}_\alpha^{\mathtt{ord}}$. Aus demselben Grund ist wegen $\beta < \beta + 1$ die Menge $\mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}}$ ihrerseits eine echte Teilklasse von $\mathbb{R}_{\beta+1}^{\mathtt{ord}}$ ist, und da die Elemente von $\mathbb{R}_{\beta+1}^{\mathtt{ord}}$ in $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ liegen, ist $\mathbb{R}_{\beta+1}^{\mathtt{ord}}$ wieder eine Teilklasse von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$, und somit $\mathbb{R}_\beta^{\mathtt{ord}}$ eine *echte* Teilklasse von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$. □

Zur Schlussbemerkung in Fußnote 707 auf S. 287

$\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ ist Träger eines Vektorraums, der für jede unendliche Kardinalzahl κ aus Ω einen κ-dimensionalen Untervektorraum besitzt.

Beweis (ich setze hier die Kenntnis des Vektorraum-Theorie ebenso wie der Theorie der Kardinalzahlen aus Abschnitt 5.30 voraus). Für jedes x aus $\mathbb{R}^\alpha$ (mit $\alpha \in \mathtt{On}$) sei x^* das Tupel, das man aus x erhält, wenn man „alle letzten Komponenten von x, die Nullen sind, streicht“, d. h.

(a) falls es keine Ordinalzahl γ gibt mit $\ll x(\xi) = 0$ für alle ξ mit $\gamma \leq \xi \in \alpha \gg$, sei $x^* :\equiv x$
(b) andernfalls sei $x^* :\equiv x/\gamma_0$, wobei γ_0 das kleinste derartige γ sei.

Nun definieren wir eine Addition und Skalarmultiplikation $\boxplus$ bzw. $\boxdot$, so dass $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ mit diesen Operationen ein Vektorraum ist: Für x und y aus $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ sei $\alpha := \min(\mathtt{Db}(x), \mathtt{Db}(y))$, $\beta := \max(\mathtt{Db}(x), \mathtt{Db}(y))$ und z das β-Tupel, welches jedes ξ aus α auf $x_\xi + y_\xi$ wirft, und jedes ξ aus $\beta \setminus \alpha$ auf x_ξ oder y_ξ, je nachdem, ob $\beta = \mathtt{Db}(x)$ oder $\beta = \mathtt{Db}(y)$ ist, und es sei $x \boxplus y :\equiv z^*$; für λ aus $\mathbb{R}$ und x aus $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$ sei ferner z das α-Tupel mit $z_\xi = \lambda x_\xi$ für alle ξ aus α, und es sei $\lambda \boxdot x :\equiv z^*$. Die Menge $\mathcal{U}$ der Tupel aus $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\kappa$ mit nur endlich vielen von $0_\mathbb{N}$ verschiedenen Komponenten ist nun ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathtt{ord}}$, und dieser ist κ-dimensional: Ist $e^{(\xi)}$ für jedes ξ aus κ das $\xi + 1$-Tupel, dessen „letzte“ Komponente $e^{(\xi)}{}_\xi$ mit 1 identisch ist und dessen übrigen Komponenten 0 sind (da unendliche Kardinalzahlen Limeszahlen sind, ist $\xi + 1 < \kappa$ und daher $e^{(\xi)} \in \mathbb{R}^{\mathtt{ord}}_\kappa$, also $e^{(\xi)} \in \mathcal{U}$), so ist der Wertebereich der Injektion $e := \langle \xi \in \kappa \mapsto e^{(\xi)} \rangle$ eine Basis von κ Vektoren aus $\mathcal{U}$. □

Theorem 5.29.2 S. 305

Für jede Ordinalzahl α ist $\mathbb{V}_\alpha$ eine Mengenmenge, und $\mathbb{V}$ ist eine Mengenklasse.	(5.194)
$\mathbb{V}_\alpha$ und $\mathbb{V}$ sind $\in$-transitiv: Aus $x \in y \in \mathbb{V}_\alpha$ folgt $x \in \mathbb{V}_\alpha$ und aus $x \in y \in \mathbb{V}$ $x \in \mathbb{V}$.	(5.195)
Jedes Element von $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$ ist eine Mengenmenge und eine Teilmenge von $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$.	(5.196)
Wenn $\alpha < \beta$, ist sowohl $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$ als auch $\mathbb{V}_\alpha \subset \mathbb{V}_\beta$, und wenn $\alpha \leq \beta$, ist $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\beta$.	(5.197)
Jedes $\mathbb{V}_\alpha$ ist sowohl ein *Element* als auch eine *echte Teilmenge* von $\mathbb{V}$.	(5.198)
Aus $x \subseteq y \in \mathbb{V}_\alpha$ folgt $x \in \mathbb{V}_\alpha$, und aus $x \subseteq y \in \mathbb{V}$ folgt $x \in \mathbb{V}$.	(5.199)
Jede Ordinalzahl α ist Element von $\mathbb{V}$ und es gilt $\alpha \subseteq \mathbb{V}_\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{V}_\alpha$ und $\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$.	(5.200)

Beweis von (5.194). Dass die $\mathbb{V}_\alpha$ Mengen sind, haben wir schon Anschluss an die Definition 5.29.1 S. 305 gesehen. Nun zeigen wir durch Induktion für jede Ordinalzahl α, dass $\mathbb{V}_\alpha$ *keine Elemente besitzt, die keine Mengen sind*, was dann natürlich auch für die Vereinigung $\mathbb{V}$ aller $\mathbb{V}_\alpha$ gelten muss, so dass die Menge $\mathbb{V}_\alpha$ ein Mengenmenge und die Klasse $\mathbb{V}$ eine Mengenklasse ist: Für $\mathbb{V}_0$ (d. h. für $\emptyset$) ist das klar. Der Sukzessor-Schritt ist auch trivial, weil $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ die Klasse der Teilmengen von $\mathbb{V}_\alpha$ ist, also eine Klasse von Mengen. Im Limes-Schritt ist $\mathbb{V}_\lambda$ die Vereinigung aller $\mathbb{V}_\alpha$ mit $\alpha \in \lambda$, für die wir Voraussetzen, dass sie höchstens Mengen als Elemente haben. Dann hat auch deren Vereinigung höchstens Mengen als Elemente.

Beweis von (5.195). Die $\in$-Transitivität aller $\mathbb{V}_\alpha$ folgt durch Sukzessor-Limes-Rekursion:
Induktionsanfang. $\emptyset$ ist eine Ordinalzahl (Theorem 5.14.2 S. 190) und daher $\in$-transitiv .
Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: $\mathbb{V}_\alpha$ ist $\in$-transitiv. Zu zeigen ist, dass $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ $\in$-transitiv ist. Sei also $x \in y \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$, das heißt $x \in y \in \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)$, also $x \in y \subseteq \mathbb{V}_\alpha$. Daraus folgt $x \in \mathbb{V}_\alpha$, und weil $\mathbb{V}_\alpha$ nach (5.194) eine Mengenmenge ist, ist x eine Menge. Nun gilt für jedes Element u von x, dass $u \in x \in \mathbb{V}_\alpha$, also nach Voraussetzung $u \in \mathbb{V}_\alpha$. Folglich ist x eine Teilmenge von $\mathbb{V}_\alpha$, d. h. es gilt $x \in \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha) = \mathbb{V}_{\alpha+1}$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Für eine Limeszahl λ ist jedes $\mathbb{V}_\xi$ mit $\xi < \lambda$ $\in$-transitiv. Zu zeigen ist, dass $\mathbb{V}_\lambda$ $\in$-transitiv ist. Sei also $x \in y \in \mathbb{V}_\lambda$, wegen $\mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\xi\in\lambda} \mathbb{V}_\xi$ gibt es ein ξ mit $\xi \in \lambda$ so dass $x \in y \in \mathbb{V}_\xi$. Nach Voraussetzung folgt $x \in \mathbb{V}_\xi$, und daher $x \in \bigcup_{\xi\in\lambda} \mathbb{V}_\xi = \mathbb{V}_\lambda$. Auch $\mathbb{V}$ ist $\in$-transitiv: Da $\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathbb{V}_\alpha$, folgt aus $x \in y \in \mathbb{V}$, dass $x \in y \in \mathbb{V}_\alpha$ für ein α aus Ω, also $x \in \mathbb{V}_\alpha$ (per $\in$-Transitivität von $\mathbb{V}_\alpha$) und daher $x \in \mathbb{V}$.

Beweis von (5.196). Wegen (5.194) sind $\mathbb{V}_\alpha$ und $\mathbb{V}$ Mengenklassen. Ist daher M Element von $\mathbb{V}_\alpha$ oder $\mathbb{V}$, so ist M eine Menge, und wegen der $\in$-Transitivität von $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$ liegt jedes Element x von M in $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$. Daher ist M *Teilmenge* von $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$, und es muss jedes Element x von M, weil es zugleich in $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$ liegt und $\mathbb{V}_\alpha$ bzw. $\mathbb{V}$ nur Mengen als Elemente hat, auch selbst eine Menge sein. So ist M eine *Mengenmenge*.

Beweis von (5.197). Angenommen, für ein α gibt es ein größeres β, so dass $\mathbb{V}_\alpha \notin \mathbb{V}_\beta$. Dann gibt es auch ein kleinstes solches β, so dass also $\mathbb{V}_\alpha \notin \mathbb{V}_\beta$ ist, aber für alle ξ mit $\alpha < \xi < \beta$ (falls es solche gibt) $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\xi$ gilt. Entweder ist nun β eine Limeszahl oder eine Sukzessorzahl.
Fall 1: β ist Limeszahl. Dann gibt es eine Ordinalzahl ξ mit $\alpha < \xi < \beta$ (sonst wäre β der Nachfolger von α). Es gilt also $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\xi$. Weil aber β eine Limeszahl ist, ist $\mathbb{V}_\beta$ nach Definition die Vereinigung aller Teiluniversen, deren Index Element von (also kleiner als) β ist. Also enthält $\mathbb{V}_\beta$ alle Elemente dieser Universen, insbesondere die Elemente von $\mathbb{V}_\xi$, und da $\mathbb{V}_\alpha$ zu diesen gehört, folgt $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$ im Widerspruch zur Annahme.
Fall 2: β ist Sukzessorzahl. Dann gibt es eine Ordinalzahl ξ mit $\beta = \xi + 1$. Dieses ξ ist dann kleiner als β, und wegen $\alpha < \beta$ ist also entweder $\alpha < \xi < \beta$ oder $\xi \leq \alpha < \beta$. In beiden Fällen zeigt sich aber zunächst, dass $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\xi$ gilt: Ist $\alpha < \xi < \beta$, so gilt (wie zu Anfang des Beweises festgestellt) $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\xi$, und daraus folgt (weil wegen der $\in$-Transitivität von $\mathbb{V}_\xi$ jedes Element von $\mathbb{V}_\alpha$ auch ein solches von $\mathbb{V}_\xi$ ist) $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\xi$. Wenn aber $\xi \leq \alpha < \beta$ ist, so muss $\xi = \alpha$ sein (sonst wäre $\xi < \alpha$, woraus nach (5.189 S. 304) folgen würde, dass $\xi + 1 \leq \alpha$, und wegen $\xi + 1 = \beta$ hieße das $\beta \leq \alpha$ im Widerspruch zu $\alpha < \beta$), also gilt dann $\mathbb{V}_\alpha = \mathbb{V}_\xi$ und erst recht $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\xi$. So ist in jedem Fall $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\xi$, und weil $\mathbb{V}_\alpha$ eine Menge ist, ist dann $\mathbb{V}_\alpha$ ein Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi)$ von $\mathbb{V}_\xi$, wobei $\mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi) \underset{(5.191\ S.305)}{=} \mathbb{V}_{\xi+1} \underset{\xi+1=\beta}{=} \mathbb{V}_\beta$, also gilt $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$ im Widerspruch zur Annahme. So war die Annahme in jedem Fall falsch, und aus $\alpha < \beta$ folgt stets $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$.
Weiter folgt per Transitivität von $\mathbb{V}_\beta$, dass jedes Element von $\mathbb{V}_\alpha$ auch ein solches von $\mathbb{V}_\beta$ ist: Daher ist $\mathbb{V}_\alpha$ Teilklasse von $\mathbb{V}_\beta$. So haben wir aus $\alpha < \beta$ abgeleitet, dass $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$ und $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\beta$ gilt. Wenn nun $\alpha \leq \beta$ gilt, muss ebenfalls $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\beta$ sein (da dies im Fall $\alpha = \beta$ ohnehin gilt). So ist nur noch zu zeigen, dass $\mathbb{V}_\alpha$ im Fall $\alpha < \beta$ sogar eine *echte* Teilklasse von $\mathbb{V}_\beta$ ist. In der Tat ist dann $\mathbb{V}_\alpha = \mathbb{V}_\beta$ ausgeschlossen, weil man sonst in der Aussage $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$ das $\mathbb{V}_\beta$ durch $\mathbb{V}_\alpha$ ersetzen könnte und $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\alpha$ erhielte, was Korollar 5.19.8 S. 257 widerspricht.[28]

Beweis von (5.198). Nach Definition enthält $\mathbb{V} := \bigcup_{\xi\in\Omega} \mathbb{V}_\xi$ die Elemente aller $\mathbb{V}_\xi$, also auch die Elemente von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$, zu denen wegen $\alpha < \alpha + 1$ nach (5.197) $\mathbb{V}_\alpha$ gehört. Also ist $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}$. Weiter gilt für jedes x aus $\mathbb{V}_\alpha$, dass $x \in \mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}$, also per Transitivität von $\mathbb{V}$ auch $x \in \mathbb{V}$. So ist $\mathbb{V}_\alpha$ Teilklasse von $\mathbb{V}$, und da $\mathbb{V}_\alpha$ Menge ist, auch Teilmenge von $\mathbb{V}$. $\mathbb{V}_\alpha$ ist sogar *echte* Teilmenge von $\mathbb{V}$, denn wegen $\alpha < \alpha + 1$ gilt nach (5.197) $\mathbb{V}_\alpha \subset \mathbb{V}_{\alpha+1}$, also gibt es ein Element x von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ (und somit von $\mathbb{V}$) dass nicht in $\mathbb{V}_\alpha$ liegt.

Beweis von (5.199). Sei $x \subseteq y \in \mathbb{V}_\alpha$. Dann ist $\alpha \neq 0$ (sonst wäre $y \in \mathbb{V}_0$, d. h. $y \in \emptyset$), also ist α Sukzessorzahl oder Limeszahl. In beiden Fällen gibt es eine Ordinalzahl ξ mit $\xi + 1 \leq \alpha$ und $y \subseteq \mathbb{V}_\xi$: Ist nämlich α eine Sukzessorzahl, so ist $\alpha = \xi + 1$ für eine Ordinalzahl ξ. Dann ist erst recht $\xi + 1 \leq \alpha$ und außerdem $y \in \mathbb{V}_\alpha = \mathbb{V}_{\xi+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi)$, also $y \subseteq \mathbb{V}_\xi$. Ist aber α eine Limeszahl, so bedeutet $y \in \mathbb{V}_\alpha$ nach Definition von $\mathbb{V}_\alpha$, dass es ein ξ aus α gilt (also ein ξ mit $\xi < \alpha$), so dass $y \in \mathbb{V}_\xi$, also nach (5.196) $y \subseteq \mathbb{V}_\xi$ gilt. Außerdem folgt aus $\xi < \alpha$, dass $\xi + 1 \leq \alpha$.
Wir haben also in jedem Fall eine Ordinalzahl ξ mit $\xi + 1 \leq \alpha$ und $y \subseteq \mathbb{V}_\xi$, und es folgt $x \subseteq y \subseteq \mathbb{V}_\xi$, so dass x eine Teilklasse von $\mathbb{V}_\xi$ ist. Da $\mathbb{V}_\xi$ eine Menge ist, ist x per Teilmengenaxiom sogar eine Teil*menge* von $\mathbb{V}_\xi$, also ein Element von $\mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi)$, d. h. x liegt in $\mathbb{V}_{\xi+1}$, und da wegen $\xi + 1 \leq \alpha$ nach (5.197) $\mathbb{V}_{\xi+1} \subseteq \mathbb{V}_\alpha$ gilt, liegt x schließlich in $\mathbb{V}_\alpha$. Um noch die Behauptung für $\mathbb{V}$ zu beweisen, sei $x \subseteq y \in \mathbb{V}$ vorausgesetzt. Dann gibt es ein α, so dass $x \subseteq y \in \mathbb{V}_\alpha$. Aus dem bereits bewiesenen Teil folgt $x \in \mathbb{V}_\alpha$, also erst recht $x \in \mathbb{V}$.

Beweis von (5.200). Zunächst zeigen wir durch Sukzessor-Limes-Induktion, dass $\alpha \subseteq \mathbb{V}_\alpha$ gilt.
Induktionsanfang. $0 = \emptyset \subseteq \emptyset = \mathbb{V}_0$. Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: $\alpha \subseteq \mathbb{V}_\alpha$. Zu zeigen ist, dass $\alpha + 1$, also $\alpha \cup \{\alpha\}$, Teilklasse von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ ist. Nun ist $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ nach Definition die Potenzmenge von $\mathbb{V}_\alpha$, enthält also alle Teilmengen von $\mathbb{V}_\alpha$ als Elemente. Insbesondere ist darum α selbst (weil α nach Voraussetzung Teilmenge von $\mathbb{V}_\alpha$ ist) Element von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$, und die Elemente von α müssen per $\in$-Transitivität von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ dann ebenfalls in $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ liegen. So liegen alle Elemente von $\alpha \cup \{\alpha\}$ in $\mathbb{V}_{\alpha+1}$, so dass $\alpha + 1 \subseteq \mathbb{V}_{\alpha+1}$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Für eine Limeszahl λ ist jede Ordinalzahl ξ, die kleiner als (also Element von) λ ist, jeweils Teilmenge von $\mathbb{V}_\xi$. Zu zeigen ist, dass λ Teilmenge von $\mathbb{V}_\lambda$ ist, dass also jedes Element ξ von λ in $\mathbb{V}_\lambda$ liegt. Sei also $\xi \in \lambda$. Dann ist die Ordinalzahl ξ nach Voraussetzung eine Teilklasse (als Menge also eine Teilmenge) von $\mathbb{V}_\xi$, also ein Element von $\mathbb{V}_{\xi+1}$. Wegen $\xi < \lambda$ folgt aber, dass $\xi + 1 \leq \lambda$, also nach (5.197)

[28] Dass $\mathbb{V}_\alpha = \mathbb{V}_\beta$ für Ordinalzahlen α und β mit $\alpha < \beta$ falsch ist, kann man auch ohne dieses aus dem Antizirkularitätsaxiom abgeleitete Korollar zeigen: Aus $\mathbb{V}_\alpha = \mathbb{V}_\beta$ würde folgen $\mathbb{V}_\beta \subseteq \mathbb{V}_\alpha$, also nach (5.89 S. 200) und Theorem 5.20.19 S. 262 $\mathbb{V}_\beta \precsim \mathbb{V}_\alpha \prec \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha) = \mathbb{V}_{\alpha+1}$, also wegen (5.97 S. 201) $\mathbb{V}_\beta \prec \mathbb{V}_{\alpha+1}$. Da auch $\mathbb{V}_{\alpha+1} \precsim \mathbb{V}_\beta$ (aus $\alpha < \beta$ folgt (wegen 5.189 S. 304) $\alpha + 1 \leq \beta$; also $\mathbb{V}_{\alpha+1} \subseteq \mathbb{V}_\beta$, also nach (5.89) $\mathbb{V}_{\alpha+1} \precsim \mathbb{V}_\beta$), folgt mit (5.97) $\mathbb{V}_\beta \prec \mathbb{V}_\beta$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $\prec$.

$\mathbb{V}_{\xi+1} \subseteq \mathbb{V}_\lambda$. So liegt das Element ξ von $\mathbb{V}_{\xi+1}$ auch in $\mathbb{V}_\lambda$. Damit der Induktionsbeweis beendet und gezeigt, dass α stets Teilklasse von $\mathbb{V}_\alpha$ ist. Da nun jede Ordinalzahl α eine Menge ist, ist sie sogar Teil*menge* von $\mathbb{V}_\alpha$ und also ein Element von $\mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)$, das heißt von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$. Damit ist $\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$ bewiesen, und wegen $\mathbb{V}_{\alpha+1} \subseteq \mathbb{V}$ folgt auch $\alpha \in \mathbb{V}$. So bleibt nur noch zu zeigen, dass $\alpha \notin \mathbb{V}_\alpha$. Dies zeigt sich wieder durch Sukzessor-Limes-Induktion: Induktionsanfang. $0 = \emptyset \notin \emptyset = \mathbb{V}_0$ ist klar. Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: $\alpha \notin \mathbb{V}_\alpha$. Angenommen, $\alpha + 1$, d. h. $\alpha \cup \{\alpha\}$, ist Element von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$, so heißt das wegen $\mathbb{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)$, dass $\alpha \cup \{\alpha\}$ eine *Teilmenge* von $\mathbb{V}_\alpha$ ist. So muss jedes Element von $\alpha \cup \{\alpha\}$ in $\mathbb{V}_\alpha$ liegen, und wegen $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$ folgt $\alpha \in \mathbb{V}_\alpha$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\alpha + 1 \notin \mathbb{V}_{\alpha+1}$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Für eine Limeszahl λ gilt $\xi \notin \mathbb{V}_\xi$ für alle ξ, die kleiner als (d. h. Elemente von) λ sind. Angenommen, es ist $\lambda \in \mathbb{V}_\lambda (= \bigcup_{\xi\in\lambda} \mathbb{V}_\xi)$, so ist λ Element eines $\mathbb{V}_\xi$ mit $\xi \in \lambda$, also gilt $\xi \in \lambda \in \mathbb{V}_\xi$ und per $\in$-Transitivität von $\mathbb{V}_\xi$ folgt $\xi \in \mathbb{V}_\xi$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\lambda \notin \mathbb{V}_\lambda$. □

Theorem 5.29.4 S. 308

Für Elemente x, y von $\mathbb{V}$, Teilklassen T von $\mathbb{V}$, Ordinalzahlen α, β und Limeszahlen λ gilt:

$x \in \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$ und $x \notin \mathbb{V}_\xi$ für Ordinalzahlen ξ mit $\xi \leq \mathtt{rg}(x)$ und $x \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$. (5.205)

$\alpha \in \mathbb{V}$ und $\mathtt{rg}(\alpha) = \alpha$, d. h. $\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$. (5.206)

$\mathbb{V}_\alpha = \{x \mid x \text{ ist Element von } \mathbb{V} \text{ mit } \mathtt{rg}(x) < \alpha\}$, und $\alpha \in \mathbb{V}_\beta \leftrightarrow \alpha < \beta$. (5.207)

$\mathbb{V}_\alpha \cup \mathcal{R}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha+1}$, $\mathcal{R}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha+1} \setminus \mathbb{V}_\alpha$ und $\mathcal{R}_\alpha$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$. (5.208)

$\mathcal{R}_0 = \{\emptyset\} = \{0\} = 1 = \mathbb{V}_1$, $\mathcal{R}_1 = \{\{\emptyset\}\} = \{1\}$ und $\mathcal{R}_2 = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\{1\}, 2\}$. (5.209)

Für Elemente u bzw. Teilklassen t von x gilt $\mathtt{rg}(u) < \mathtt{rg}(x)$ bzw. $\mathtt{rg}(t) \leq \mathtt{rg}(x)$. (5.210)

$\{x, y\} \in \mathbb{V}$, $\bigcup x \in \mathbb{V}$ mit $\mathtt{rg}(\bigcup x) \leq \mathtt{rg}(x)$, und $\mathcal{P}(x) \in \mathbb{V}$ mit $\mathtt{rg}(\mathcal{P}(x)) = \mathtt{rg}(x) + 1$. (5.211)

$T \in \mathbb{V} \leftrightarrow \mathtt{Rb}(T)$ ist nach oben beschränkt. (5.212)

$\mathtt{rg}(x)$ ist die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als alle Elemente von $\mathtt{Rb}(x)$. (5.213)

$v \in \mathcal{R}_{\alpha+1} \leftrightarrow v$ liegt in $\mathcal{P}(\mathbb{V})$, für jedes u aus v ist $\mathtt{rg}(u) \leq \alpha$ und
für mindestens ein u aus v ist $\mathtt{rg}(u) = \alpha$. (5.214)

$v \in \mathcal{R}_\lambda \leftrightarrow v$ liegt in $\mathcal{P}(\mathbb{V})$, für jedes u aus v ist $\mathtt{rg}(u) < \lambda$ und
für jedes ξ mit $\xi < \lambda$ gibt es ein u aus v, so dass $\mathtt{rg}(u) > \xi$. (5.215)

Ist $\alpha \geq 1$, so folgt $\mathcal{R}_\alpha \prec \mathcal{R}_{\alpha+1}$. (5.216)

Ist $\alpha < \omega$, so enthält $\mathcal{R}_\alpha$ nur endliche Mengen; ist α Limeszahl, nur unendliche. (5.217)

$\mathbb{V}$ ist eine mit $\mathtt{On}$ gleichmächtige Unmenge, d. h. gehört zur Klassenstufe $\llbracket\Omega\rrbracket$. (5.218)

Beweis von (5.205). Direkt nach der Definition 5.29.3 S. 308 von $\mathtt{rg}(x)$ gilt, dass x Element von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$ ist, während x für alle ν mit $\nu < \mathtt{rg}(x)$ *nicht* Element von $\mathbb{V}_{\nu+1}$ ist.
Angenommen, es wäre nun $x \in \mathbb{V}_\xi$ mit einem ξ, für das $\xi \leq \mathtt{rg}(x)$ ist. Dann ist $\xi \neq 0$ (sonst wäre $\mathbb{V}_\xi$ die leere Menge $\mathbb{V}_0$, im Widerspruch zu $x \in \mathbb{V}_\xi$). Aber ξ ist auch keine Sukzessorzahl, sonst wäre $\xi = \nu + 1$ für ein ν mit $\nu < \xi$, für das wegen $\xi \leq \mathtt{rg}(x)$ auch $\nu < \mathtt{rg}(x)$ wäre, und dann würde $x \in \mathbb{V}_\xi = \mathbb{V}_{\nu+1}$ im Widerspruch zur Definition des Ranges stehen. Schließlich ist ξ ist auch keine Limeszahl, sonst wäre $x \in \mathbb{V}_\xi = \bigcup_{\nu\in\xi} \mathbb{V}_\nu$, also gäbe es ein ν aus ξ (also mit $\nu < \xi$) so dass $x \in \mathbb{V}_\nu$, und wegen $\mathbb{V}_\nu \subseteq \mathbb{V}_{\nu+1}$ (was aus 5.197 folgt) wäre auch $x \in \mathbb{V}_{\nu+1}$, obwohl $\nu < \xi \leq \mathtt{rg}(x)$, also $\nu < \mathtt{rg}(x)$ im Widerspruch zur Definition des Ranges. Damit ist die Annahme falsch und es gilt $x \notin \mathbb{V}_\xi$ für Ordinalzahlen ξ mit $\xi \leq \mathtt{rg}(x)$.
Wegen $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)})$ folgt außerdem aus $x \in \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$, dass $x \in \mathcal{P}(\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)})$, das heißt $x \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$.

Beweis von (5.206). Nach (5.200 S. 305) ist α ein Element von $\mathbb{V}$ mit $\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$. Um $\mathtt{rg}(\alpha) = \alpha$ zu beweisen, ist also nur noch zu zeigen, dass es keine Ordinalzahl ξ mit $\xi < \alpha$ gibt, so dass $\alpha \in \mathbb{V}_{\xi+1}$ ist. Angenommen, dies ist der Fall, dann folgt aus $\xi < \alpha$, dass $\xi + 1 \leq \alpha$, und wegen (5.197) folgt weiter, dass $\mathbb{V}_{\xi+1} \subseteq \mathbb{V}_\alpha$, so dass das Element α von $\mathbb{V}_{\xi+1}$ auch Element von $\mathbb{V}_\alpha$ ist. Mithin folgt $\alpha \in \mathbb{V}_\alpha$ im Widerspruch zu (5.200). Also war die Annahme falsch.

Beweis von (5.207). Sei $x \in \mathbb{V}_\alpha$. Dann ist $x \in \mathbb{V}$ und es muss $\mathtt{rg}(x) < \alpha$ sein: Denn andernfalls wäre $\alpha \leq \mathtt{rg}(x)$, also wegen (5.205) $x \notin \mathbb{V}_\alpha$. Sei umgekehrt ein x aus $\mathbb{V}$ mit $\mathtt{rg}(x) < \alpha$ gegeben. Dann folgt mittels (5.197), dass $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1} \subset \mathbb{V}_\alpha$, so dass jedes Element von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$ auch ein solches von $\mathbb{V}_\alpha$ ist.

Nun ist nach (5.205) x ein Element von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$. Also ist $x \in \mathbb{V}_\alpha$. So ist die erste Behauptung $\mathbb{V}_\alpha = \{x \mid x \text{ ist Element von } \mathbb{V} \text{ mit } \mathtt{rg}(x) < \alpha\}$ bewiesen.
Ist nun $\alpha < \beta$, so kann man in dieser Aussage wegen (5.206) das α durch $\mathtt{rg}(\alpha)$ ersetzen und erhält $\mathtt{rg}(\alpha) < \beta$. Außerdem liegt α nach (5.206) in $\mathbb{V}$, also insgesamt in $\{x \mid x \text{ ist Element von } \mathbb{V} \text{ mit } \mathtt{rg}(x) < \beta\}$, das heißt nach der schon bewiesenen ersten Behauptung: in $\mathbb{V}_\beta$. Ist umgekehrt $\alpha \in \mathbb{V}_\beta$, so liegt α in $\{x \mid x \text{ ist Element von } \mathbb{V} \text{ mit } \mathtt{rg}(x) < \beta\}$, also ist $\mathtt{rg}(\alpha) < \beta$, d. h. wegen (5.206) $\alpha < \beta$.

Beweis von (5.208). Da die Elemente von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ nach (5.207) die Elemente von $\mathbb{V}$ sind, deren Rang $< \alpha + 1$ ist, d. h. wegen (5.189 S. 304) diejenigen, deren Rang $\leq \alpha$ ist, zerfallen sie in diejenigen, die $< \alpha$, und diejenigen, die $= \alpha$ sind. Erstere sind nach (5.207) die Elemente von $\mathbb{V}_\alpha$, und letztere (nach Definition 5.29.3 S. 308 von $\mathcal{R}_\alpha$) diejenigen von $\mathcal{R}_\alpha$. Daraus folgt $\mathbb{V}_\alpha \cup \mathcal{R}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha+1}$ und $\mathcal{R}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha+1} \setminus \mathbb{V}_\alpha$. Aus der letzteren Gleichung folgt auch, dass $\mathcal{R}_\alpha$ Teilklasse von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ ist, und da $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ nach (5.194) eine Menge ist, ist nach dem Teilmengenaxiom auch $\mathcal{R}_\alpha$ eine Menge. Somit ist $\mathcal{R}_\alpha$ eine Teil*menge* von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$.

Beweis von (5.209). Nach (5.208) ist $\mathcal{R}_0 = \mathbb{V}_1 \setminus \mathbb{V}_0$, und da nach Definition $\mathbb{V}_0 = \emptyset$ ist, ist $\mathcal{R}_0$ mit $\mathbb{V}_1$ identisch, was nach (5.202 S. 305) mit $\{\emptyset\}$, d. h. mit $\{0\}$, d. h. mit 1 identisch ist. Ebenso ist $\mathcal{R}_1 = \mathbb{V}_2 \setminus \mathbb{V}_1$, also $\mathcal{R}_1 = \mathbb{V}_2 \setminus \{\emptyset\}$. Da gemäß (5.203 S. 305) $\mathbb{V}_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ist, ist $\mathcal{R}_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\} = \{1\}$. Schließlich ist $\mathcal{R}_2 = \mathbb{V}_3 \setminus \mathbb{V}_2$, wobei $\mathbb{V}_3$ die Potenzmenge von $\mathbb{V}_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ist, das ist $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Also ist $\mathcal{R}_2 = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\{1\}, \{0, 1\}\} = \{\{1\}, 2\}$.

Beweis von (5.210). Ist $u \in x$ bzw. $t \subseteq x$, so ist wegen $x \in \mathbb{V}$ gemäß (5.195) und (5.199) auf jeden Fall $u \in \mathbb{V}$ bzw. $t \in \mathbb{V}$, also ist $\mathtt{rg}(u)$ bzw. $\mathtt{rg}(t)$ wohldefiniert. Nach (5.205) gilt ferner $x \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$. Ist also $u \in x$, so folgt $u \in \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$, und da nach (5.207) die Menge $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$ nur Elemente mit kleinerem Rang als $\mathtt{rg}(x)$ enthalten kann, folgt $\mathtt{rg}(u) < \mathtt{rg}(x)$.
Ist aber $t \subseteq x$, so folgt wegen $x \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$, dass $t \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$. Da $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$ eine Menge ist, ist t per Teilmengenaxiom eine Teil*menge* von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$, also Element von $\mathcal{P}(\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)})$, d. h. von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$. Also ist $\mathtt{rg}(x)$ eine Ordinalzahl ξ, für die $t \in \mathbb{V}_{\xi+1}$ gilt. Da aber $\mathtt{rg}(t)$ das *kleinste* derartige ξ ist, folgt $\mathtt{rg}(t) \leq \mathtt{rg}(x)$.

Beweis von (5.211). Zur Aussage über $\{x, y\}$. Sei ξ das Maximum von $\{\mathtt{rg}(x), \mathtt{rg}(y)\}$. Dann gilt $\mathtt{rg}(x) \leq \xi$ und $\mathtt{rg}(y) \leq \xi$ und erst recht $\mathtt{rg}(x) < \xi + 1$ und $\mathtt{rg}(y) < \xi + 1$. Nach (5.207) sind also x und y Elemente von $\mathbb{V}_{\xi+1}$, so dass $\{x, y\}$ Teilmenge von $\mathbb{V}_{\xi+1}$ und somit Element von $\mathcal{P}(\mathbb{V}_{\xi+1})$ ist, das heißt von $\mathbb{V}_{(\xi+1)+1}$ und daher schließlich von $\mathbb{V}$ ist.
Zur Aussage über $\bigcup x$. Für jedes Element v von $\bigcup x$ gibt es ein w mit $v \in w \in x$. Per Transitivität von $\mathbb{V}$ sind mit x auch v und w Elemente von $\mathbb{V}$. Es folgt nun nach (5.210) $\mathtt{rg}(v) < \mathtt{rg}(w) < \mathtt{rg}(x)$, also $\mathtt{rg}(v) < \mathtt{rg}(x)$. Daraus folgt weiter nach (5.207), dass $v \in \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$. Damit hat sich gezeigt: Jedes v aus $\bigcup x$ ist Element von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$, also ist $\bigcup x$ selbst eine Teilmenge von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$, so dass $\bigcup x \in \mathcal{P}(\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)})$, das heißt $\bigcup x \in \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$, und also auch $\bigcup x \in \mathbb{V}$. Weiter folgt aus $\bigcup x \in \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$ gemäß (5.207), dass $\mathtt{rg}(\bigcup x) < \mathtt{rg}(x) + 1$, also $\mathtt{rg}(\bigcup x) \leq \mathtt{rg}(x)$.
Zur Aussage über $\mathcal{P}(x)$. Für jedes Element t von $\mathcal{P}(x)$ gilt $t \subseteq x$, nach (5.199) gehört also t zu $\mathbb{V}$, und nach (5.210) gilt $\mathtt{rg}(t) \leq \mathtt{rg}(x)$, also erst recht $\mathtt{rg}(t) < \mathtt{rg}(x) + 1$, also wegen (5.207) $t \in \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$. Damit hat sich gezeigt: Alle Elemente t von $\mathcal{P}(x)$ liegen in $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$, so dass $\mathcal{P}(x)$ eine Teilmenge von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$, also Element von $\mathbb{V}_{(\mathtt{rg}(x)+1)+1}$ ist. Insbesondere ist $\mathcal{P}(x) \in \mathbb{V}$. Weiter folgt aus $\mathcal{P}(x) \in \mathbb{V}_{(\mathtt{rg}(x)+1)+1}$ gemäß (5.207), dass $\mathtt{rg}(\mathcal{P}(x)) < (\mathtt{rg}(x) + 1) + 1$, also $\mathtt{rg}(\mathcal{P}(x)) \leq \mathtt{rg}(x) + 1$. Es bleibt noch die Annahme zu widerlegen, dass $\mathtt{rg}(\mathcal{P}(x))$ kleiner als $\mathtt{rg}(x) + 1$ ist. Unter dieser Annahme ist $\mathcal{P}(x)$ nach (5.207) Element von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)+1}$, d. h. $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)})$, also $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$, so dass jedes Element von $\mathcal{P}(x)$ auch ein solches von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$ ist. Also ist auch das Element x von $\mathcal{P}(x)$ Element von $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$; aber im Widerspruch dazu gilt nach (5.205), dass $x \notin \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(x)}$. So war die Annahme widerlegt, und es gilt $\mathtt{rg}(\mathcal{P}(x)) = \mathtt{rg}(x) + 1$.

Beweis von (5.212). Ist $T \in \mathbb{V}$, so ist T Element eines $\mathbb{V}_\alpha$, also gilt nach (5.207), dass $\mathtt{rg}(T) < \alpha$, und wegen (5.210) haben die Elemente von T einen noch kleineren Rang als $\mathtt{rg}(T)$, also jedenfalls keinen größeren als α, und so ist α eine obere Schranke der Klasse $\mathtt{Rb}(T)$ aller Ränge von Elementen von T. Ist umgekehrt $\mathtt{Rb}(T)$ nach oben beschränkt, so gibt es eine Ordinalzahl α, so dass alle Elemente von T einen Rang einnehmen, der kleinergleich α ist. Also ist $\alpha + 1$ eine Ordinalzahl, die sogar größer als jeder Rang eines Elements von T ist, und somit sind dann wegen (5.207) alle Elemente von T solche von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$, so dass T eine Teilklasse der Menge $\mathbb{V}_{\alpha+1}$, also per Teilmengenaxiom eine Teilmenge von $\mathbb{V}_{\alpha+1}$, also ein Element von $\mathcal{P}(\mathbb{V}_{\alpha+1})$, das heißt von $\mathbb{V}_{(\alpha+1)+1}$ ist. Daher ist T erst recht ein Element der Oberklasse $\mathbb{V}$ von $\mathbb{V}_{(\alpha+1)+1}$.

Beweis von (5.213). Zunächst ist $\mathtt{Rb}(x)$ stets eine Menge, denn $\mathtt{Rb}(x)$ ist der Wertebereich der Funktion $\langle m \in x \mapsto \mathtt{rg}(x)\rangle$, die auf der Menge x definiert ist (x ist als Element von $\mathbb{V}$ nach (5.196 S. 305) eine Menge), also ist $\mathtt{Rb}(x)$ per Ersetzungsaxiom eine Menge, und so existiert (gemäß 5.14.7 S. 192) eine kleinste Ordinalzahl

$\mathtt{Rb}(x)^{\not\prime}$, die größer ist als alle in $\mathtt{Rb}(x)$ enthaltenen Ordinalzahlen. Die Behauptung lässt sich nun kurz so formulieren: $\mathtt{rg}(x) = \mathtt{Rb}(x)^{\not\prime}$. Ist $\mathtt{Rb}(x)$ leer, so auch x, und dann gilt die Gleichung, weil $\mathtt{Rb}(x)^{\not\prime}$ dann leer ist (siehe 5.14.7) und dasselbe auch für $\mathtt{rg}(x)$ gilt: Mit (5.206) folgt dann $\mathtt{rg}(x) = \mathtt{rg}(\emptyset) = \mathtt{rg}(0) = 0 = \emptyset$. Sei nun also $\mathtt{rg}(x)$ nichtleer, dann betrachten wir zwei Fälle.
Fall 1: $\mathtt{Rb}(x)$ hat ein Maximum, d. h. es gibt ein Element m von x, so dass $\mathtt{rg}(m)$ der maximale von Elementen von x eingenommene Rang ist. Dann ist nach Definition 5.14.7 S. 192 zu zeigen, dass $\mathtt{rg}(x)$ der Nachfolger $\mathtt{rg}(m)'$ von $\mathtt{rg}(m)$ ist, dass also $\mathtt{rg}(x) = \mathtt{rg}(m) + 1$ gilt. Wegen $m \in x$ ist nach (5.210) zunächst $\mathtt{rg}(m) < \mathtt{rg}(x)$. Daraus folgt $\mathtt{rg}(m) + 1 \leq \mathtt{rg}(x)$. Andererseits gilt wegen der Maximalität von $\mathtt{rg}(m)$ für alle Elemente von x, das ihr Rang $\leq \mathtt{rg}(m)$, also erst recht $< \mathtt{rg}(m) + 1$ ist: Wegen (5.207) liegen sie also in $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(m)+1}$. Also gilt $x \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(m)+1}$ und somit $x \in \mathcal{P}(\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(m)+1}) = \mathbb{V}_{(\mathtt{rg}(m)+1)+1}$, so dass nach (5.207) $\mathtt{rg}(x) < (\mathtt{rg}(m)+1)+1$, d. h. $\mathtt{rg}(x) \leq \mathtt{rg}(m)+1$ gilt. Zusammen mit $\mathtt{rg}(m)+1 \leq \mathtt{rg}(x)$ folgt (wegen (5.50)) $\mathtt{rg}(x) = \mathtt{rg}(m) + 1$.
Fall 2. $\mathtt{Rb}(x)$ hat kein Maximum. Nach 5.14.7 S. 192 ist dann zu zeigen, dass $\mathtt{rg}(x) = \sup \mathtt{Rb}(x)$, und wegen (5.50 S. 174) genügt es zu zeigen, dass $\sup \mathtt{Rb}(x) \leq \mathtt{rg}(x)$ und $\mathtt{rg}(x) \leq \sup \mathtt{Rb}(x)$. In der Tat gilt $\sup \mathtt{Rb}(x) \leq \mathtt{rg}(x)$: Wegen (5.210) gilt nämlich für alle Elemente ξ von x, dass $\mathtt{rg}(\xi) < \mathtt{rg}(x)$, weshalb $\mathtt{rg}(x)$ eine obere Schranke von $\mathtt{Rb}(x)$ ist; und da nun $\sup \mathtt{Rb}(x)$ die *kleinste* obere Schranke von $\mathtt{Rb}(x)$ ist, folgt $\sup \mathtt{Rb}(x) \leq \mathtt{rg}(x)$. So ist nur noch $\mathtt{rg}(x) \leq \sup \mathtt{Rb}(x)$ zu zeigen. Weil $\sup \mathtt{Rb}(x)$ obere Schranke von $\mathtt{Rb}(x)$ ist, gilt für alle Elemente von x, dass ihr Rang $\leq \sup \mathtt{Rb}(x)$ ist, und er muss dann sogar immer $< \sup \mathtt{Rb}(x)$ sein (andernfalls gäbe es ein Element von $\mathtt{Rb}(x)$, dessen Rang $= \sup \mathtt{Rb}(x)$ wäre; dann wäre aber $\sup \mathtt{Rb}(x)$ der maximal eingenommene Rang von Elementen von x, so dass $\mathtt{Rb}(x)$ ein Maximum hätte im Widerspruch zur Voraussetzung des hier behandelten Falles 2). Nach (5.207) sind also alle Elemente von x Elemente von $\mathbb{V}_{\sup \mathtt{Rb}(x)}$, so dass $x \subseteq \mathbb{V}_{\sup \mathtt{Rb}(x)}$ und somit $x \in \mathcal{P}(\mathbb{V}_{\sup \mathtt{Rb}(x)}) = \mathbb{V}_{\sup \mathtt{Rb}(x)+1}$ ist. Nach (5.207) folgt daher $\mathtt{rg}(x) < \sup \mathtt{Rb}(x) + 1$, d. h. $\mathtt{rg}(x) \leq \sup \mathtt{Rb}(x)$, was den Beweis abschließt.

Beweis von (5.214). Sei zunächst $v \in \mathcal{R}_{\alpha+1}$. Dann ist v ein Element von $\mathbb{V}$ mit Rang $\alpha + 1$, und wegen (5.213) ist $\alpha+1$ die kleinste Ordinalzahl, die größer als alle Ränge der Elemente von v ist: Da $\alpha+1$ *größer* als diese Ränge ist, sind alle von Elementen von v eingenommenen Ränge kleiner als $\alpha+1$, also $\leq \alpha$; und da $\alpha+1$ die *kleinste* Zahl ist, die größer als alle von Elementen von v eingenommenen Ränge ist, muss es mindestens ein Element von v mit Rang α geben (sonst wäre α eine kleinere Zahl als $\alpha + 1$, die ebenfalls größer als alle von Elementen von v eingenommenen Ränge wäre). Schließlich ist v als Element von $\mathbb{V}$ wegen (5.196) auch Teilmenge von $\mathbb{V}$, also Element von $\mathcal{P}(\mathbb{V})$. Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass v eine Teilmenge von $\mathbb{V}$ ist, deren Elemente Ränge $\leq \alpha$ einnehmen und die mindestens ein Element von Rang α hat. Dann ist v nach (5.212) ein Element von $\mathbb{V}$ und hat nach (5.213) den Rang $\alpha + 1$, liegt also in $\mathcal{R}_{\alpha+1}$.

Beweis von (5.215). Sei zunächst $v \in \mathcal{R}_\lambda$. Dann ist v ein Element von $\mathbb{V}$ mit Rang λ, und v ist wegen (5.196) auch eine Teilmenge von $\mathbb{V}$, also ein Element von $\mathcal{P}(\mathbb{V})$. Jedes Element von v hat wegen (5.210) einen Rang $< \lambda$. Angenommen, zu einem ξ mit $\xi < \lambda$ (d. h. mit $\xi + 1 \leq \lambda$) besitzt v kein Element, dessen Rang größer als ξ ist. Dann haben alle Elemente von v einen Rang $\leq \xi$, also erst recht einen Rang $< \xi + 1$, so dass wegen (5.213) $\mathtt{rg}(v) \leq \xi + 1$ ist. Da nun $\mathtt{rg}(v) = \lambda$ ist, folgt $\lambda \leq \xi + 1$, insgesamt $\lambda \leq \xi + 1 \leq \lambda$, also wegen (5.50 S. 174) $\lambda = \xi + 1$ und so wäre λ eine Sukzessorzahl im Widerspruch dazu, dass λ (nach Voraussetzung unseres Theorems) eine Limeszahl sein soll. Also war die Annahme falsch, und zu jedem ξ mit $\xi < \lambda$ gibt es in v ein Element mit größerem Rang als ξ. Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass v eine Teilmenge von $\mathbb{V}$ ist, deren Elemente Ränge $< \lambda$ einnehmen und die zu jedem ξ mit $\xi < \lambda$ ein Element größeren Ranges als ξ besitzt. Dann ist λ größer als alle von Elementen von v eingenommenen Ränge, und zwar ist λ die *kleinste* derartige Zahl (da es zu jeder kleineren Ordinalzahl ξ ein Element größeren Ranges in v gibt). Es folgt dann aus (5.212), dass v ein Element von $\mathbb{V}$ ist und weiter aus (5.213), dass der Rang von v die Zahl λ ist, also v zu $\mathcal{R}_\lambda$ gehört.

Beweis von (5.216). Wir setzen $\alpha \geq 1$ voraus. Da $\mathcal{R}_\alpha \prec \mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha)$ ist (Theorem 5.20.19 S. 262), genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha) \precsim \mathcal{R}_{\alpha+1}$, denn dann folgt (mit Satz 5.53 S. 174), dass $\mathcal{R}_\alpha \prec \mathcal{R}_{\alpha+1}$. Um $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha) \precsim \mathcal{R}_{\alpha+1}$ zu zeigen, ist eine Injektion g von $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha)$ in $\mathcal{R}_{\alpha+1}$ anzugeben. Nun sind die Elemente von $\mathcal{R}_{\alpha+1}$ nach (5.214) die Teilmengen von $\mathbb{V}$, die mindestens ein Element von Rang α, aber keines von größerem Rang besitzen. Dazu gehört die Menge $M := \{0, \alpha\}$, da $\mathtt{rg}(0) \underset{(5.206)}{=} 0 \leq \alpha$ und $\mathtt{rg}(\alpha) \underset{(5.206)}{=} \alpha$. Dazu gehören aber auch *sämtliche nichtleeren Teilmengen von* $\mathcal{R}_\alpha$ (denn diese haben ja als Elemente ausschließlich Elemente von $\mathbb{V}$ vom Rang α, und zwar – weil sie nichtleer sind – mindestens ein solches Element). Daher ist die Injektion f, die jedes Element von $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha) \setminus \{\emptyset\}$ auf sich selbst wirft, bereits eine Injektion von $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha) \setminus \{\emptyset\}$ in $\mathcal{R}_{\alpha+1}$. Um dieses f zu einer Injektion g von $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha)$ in $\mathcal{R}_{\alpha+1}$ zu erweitern, müssen wir noch ein geeignetes Element e von $\mathcal{R}_{\alpha+1}$

finden, auf welches g die leere Menge werfen soll. Damit eine Injektion herauskommt, ist erforderlich, dass e von allen Elementen von $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha) \setminus \{\emptyset\}$ verschieden ist. Der Nachweis der Existenz eines solchen e beendet daher den Beweis. Nun wurde oben gezeigt, dass die Menge $e := \{0, \alpha\}$ Element von $\mathcal{R}_{\alpha+1}$ ist. Es ist also nur noch zu zeigen, dass sie kein Element von $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha) \setminus \{\emptyset\}$ ist. Nun ist $\mathtt{rg}(0) \underset{(5.206)}{=} 0 < 1 \leq \alpha$ (Letzteres nach Voraussetzung), und somit $\mathtt{rg}(0) < \alpha$, insbesondere $\mathtt{rg}(0) \neq \alpha$. Also ist 0 *kein* Element von $\mathcal{R}_\alpha$ und daher $\{0, \alpha\}$ keine Teilmenge von $\mathcal{R}_\alpha$, d. h. kein Element von $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha)$ und erst recht keines von $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha) \setminus \{\emptyset\}$.

Beweis von (5.217). Vollständige Induktion zeigt für alle Ordinalzahlen n, die kleiner als ω (also natürliche Zahlen) sind, dass $\mathcal{R}_n$ nur endliche Mengen enthält.
Induktionsanfang. Das einzige Element von $\mathcal{R}_0$ ist nach (5.209) die leere Menge. Diese ist endlich.
Induktionsschluss. Voraussetzung: Alle Mengen mit Rang n sind endlich. Nun ist nach (5.214) eine Menge v mit Rang $n+1$ stets eine Teilmenge von $\mathbb{V}$, deren Elemente den Rang n nicht überschreiten. Die Elemente von v liegen daher nach (5.207) alle in $\mathbb{V}_{n+1}$, so dass $v \subseteq \mathbb{V}_{n+1}$ ist. Wegen $n+1 < \omega$ ist aber $\mathbb{V}_{n+1}$ nach (5.204 S. 306) eine endliche Menge, also ist v als Teilklasse von $\mathbb{V}_{n+1}$ ebenfalls endlich.
Sei nun α Limeszahl und $v \in \mathcal{R}_\alpha$. Für $f := \langle u \in v \mapsto \mathtt{rg}(u) \rangle$ ist $\mathtt{Wb}(f)$ die Klasse $\mathtt{Rb}(v)$ aller von Elementen von v eingenommenen Ränge, also ist f Surjektion von v in $\mathtt{Rb}(v)$ und nach (5.91 S. 200) gilt $v \succsim \mathtt{Rb}(v)$.
Nun kann die vollgeordnete Klasse $\langle \mathtt{Rb}(v), < \rangle$ kein Maximum haben kann. Wenn wir nämlich annehmen, dass ξ_0 das Maximum von $\mathtt{Rb}(v)$ ist, so gibt es ein u aus v mit $\mathtt{rg}(u) = \xi_0$, wobei wegen (5.215) $\xi_0 < \alpha$ ist. Aber zu jedem ξ, das kleiner als die Limeszahl α ist, gibt es ebenfalls nach (5.215) einen von einem Element von v eingenommen Rang (d. h. ein Element von $\mathtt{Rb}(v)$) größer als ξ. Insbesondere gibt es ein Element von $\mathtt{Rb}(v)$, das größer als ξ_0 ist, und so kann ξ_0 nicht das Maximum von $\mathtt{Rb}(v)$ sein.
Außerdem ist $\mathtt{Rb}(v)$ nichtleer: denn v ist nichtleer (sonst wäre mit Blick auf (5.206) $a = \mathtt{rg}(v) = \mathtt{rg}(\emptyset) = 0 = \mathtt{rg}(0)$ im Widerspruch dazu, dass α nach Voraussetzung eine Limeszahl ist), also besitzt v Elemente, also existieren auch Ränge, auf denen Elemente von v liegen, d. h. $\mathtt{Rb}(v)$ ist nichtleer.
Als nichtleere vollgeordnete Klasse ohne Maximum ist aber $\mathtt{Rb}(v)$ gemäß (5.141 S. 243) unendlich, was dann wegen $v \succsim \mathtt{Rb}(v)$ (und 5.144 S. 244) auch für v gilt.

Beweis von (5.218). Wegen (5.200 S. 305) gilt $\mathtt{On} \subseteq \mathbb{V}$. Da $\mathtt{On}$ eine Unmenge ist, ist also auch $\mathbb{V}$ eine solche (Korollar 5.10.6). Um nun zu zeigen, dass $\mathbb{V}$ mit $\mathtt{On}$ gleichmächtig (d. h. der Klassenstufe $\llbracket \Omega \rrbracket$ von Ω angehört), genügt es wegen Theorem 5.15.19 S. 205 zu zeigen, dass $\mathbb{V}$ *wohlordnungstragend* ist. Wir geben also eine Relation $\sqsubset$ in $\mathbb{V}$ an und zeigen, dass $\langle \mathbb{V}, \sqsubset \rangle$ wohlgeordnet ist. Da $\mathcal{R}_\alpha$ für jede Ordinalzahl α nach (5.208) eine Menge ist, existiert wegen Theorem 5.14.18 S. 198 für $\mathcal{R}_\alpha$ eine Relation $\sqsubset_\alpha$, derart dass $\langle \mathcal{R}_\alpha, \sqsubset_\alpha \rangle$ eine wohlgeordnete Menge ist. Wir denken uns für jedes α eine derartige Wohlordnungsrelation $\sqsubset_\alpha$ fest ausgewählt.[29] Sei dann $\sqsubset$ die Relation in $\mathbb{V}$, für die $a \sqsubset b$ (für a, b aus $\mathbb{V}$) genau dann gültig ist, wenn:

(1) $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(b)$ oder
(2) $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(b)$ (so dass a und b beide in $\mathcal{R}_{\mathtt{rg}(a)}$ liegen) und $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} b$

Zu zeigen bleibt, dass $\langle \mathbb{V}, \sqsubset \rangle$ wohlgeordnet ist.
1. $\sqsubset$ ist irreflexiv: $a < a$ würde implizieren, dass von den Aussagen $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(a)$ oder $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} a$ eine gültig wäre, im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$ und $\sqsubset_{\mathtt{rg}(a)}$.
2. $\sqsubset$ ist transitiv: Sei $a \sqsubset b \sqsubset c$. Wir zeigen, dass $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(c)$, oder aber $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(c)$ und $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} c$ ist.
Fall 1. $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(b)$ und $\mathtt{rg}(b) < \mathtt{rg}(c)$. Dann ist $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(c)$.
Fall 2. $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(b)$ und $\mathtt{rg}(b) = \mathtt{rg}(c)$ und $b \sqsubset_{\mathtt{rg}(b)} c$. Dann ist $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(b) = \mathtt{rg}(c)$, also $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(c)$.
Fall 3. $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(b)$ und $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} b$ und $\mathtt{rg}(b) < \mathtt{rg}(c)$. Dann ist $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(b) < \mathtt{rg}(c)$, also $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(c)$.
Fall 4. $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(b)$ und $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} b$ und $\mathtt{rg}(b) = \mathtt{rg}(c)$ und $b \sqsubset_{\mathtt{rg}(b)} c$. Dann ist $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(b) = \mathtt{rg}(c)$.
Außerdem kann man in $b \sqsubset_{\mathtt{rg}(b)} c$ das $\mathtt{rg}(b)$ durch $\mathtt{rg}(a)$ ersetzen und erhält $b \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} c$. Zusammen mit $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} b$ ergibt sich $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} b \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} c$, also $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} c$.
3. $\sqsubset$ ist linear. Für a, b aus $\mathbb{V}$ ist zu zeigen, dass $a = b$ oder $a \sqsubset b$ oder $b \sqsubset a$. Wenn $a = b$, sind wir fertig. Sei also $a \neq b$. Nun gilt per Linearität von $<$, dass $\mathtt{rg}(a) < \mathtt{rg}(b)$ oder $\mathtt{rg}(b) < \mathtt{rg}(a)$ oder $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(b)$. Im ersten Fall gilt $a \sqsubset b$, im zweiten $b \sqsubset a$. Sei also $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(b)$. Nun gilt wegen der Linearität von $\sqsubset_{\mathtt{rg}(a)}$ und

[29] Gemäß Korollar 5.11.9 S. 156, das wir aus dem maximalen Auswahlaxiom abgeleitet haben, können wir $\sqsubset_\alpha$ mit $\varepsilon(\mathfrak{W}_\alpha)$ identifizieren, wobei $\mathfrak{W}_\alpha$ die Klasse aller Wohlordnungsrelationen in der Menge $\mathcal{R}_\alpha$ ist. Da die Klassen $\mathfrak{W}_\alpha$ (als Teilklassen von $\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\alpha$) Mengen sind, würde hier allerdings die Berufung auf das globale Auswahlaxiom (5.11.5 S. 154, Version 6) genügen: $\mathfrak{W} := \langle \alpha \in \mathtt{On} \mapsto \mathfrak{W}_\alpha \rangle$ ist eine Familie nichtleerer Mengen, besitzt also eine Auswahlfunktion f, und so könnten wir $\sqsubset_\alpha$ mit f_α gleichsetzen.

weil wir $a \neq b$ vorausgesetzt haben, dass $a \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} b$ oder $b \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} a$ ist. Im ersten Fall gilt $a \sqsubset b$. Im zweiten aber können wir in $b \sqsubset_{\mathtt{rg}(a)} a$ wegen $\mathtt{rg}(a) = \mathtt{rg}(b)$ das $\mathtt{rg}(a)$ durch $\mathtt{rg}(b)$ ersetzen und erhalten $b \sqsubset_{\mathtt{rg}(b)} a$, also $b \sqsubset a$. Insgesamt ist jetzt $\langle \mathbb{V}, \sqsubset \rangle$ als Vollordnung etabliert.
4. Jede nichtleere Teilklasse T von $\mathbb{V}$ besitzt ein $\sqsubset$-Minimum: Sei nämlich C die Klasse der Ordinalzahlen α mit der Eigenschaft, dass in T mindestens ein Element mit Rang α existiert. Da T nichtleer ist, ist auch C nichtleer und hat ein $<$-Minimum α. Es gibt demnach in T Elemente x mit $\mathtt{rg}(x) = \alpha$, *aber es gibt in T keine Elemente mit kleinerem Rang als α*. Nun ist die Klasse $D := T \cap \mathcal{R}_\alpha$ der Elemente von T mit Rang α eine nichtleere Teilklasse von $\mathcal{R}_\alpha$, also besitzt diese ein $\sqsubset_\alpha$-Minimum m. Dieses m ist das $\sqsubset$-Minimum von T: Hierzu ist für x aus T zu zeigen, dass $m \sqsubseteq x$ gilt. Da es in T keine Elemente mit kleinerem Rang als α gibt, gilt zunächst $\mathtt{rg}(m) = \alpha \leq \mathtt{rg}(x)$, also $\mathtt{rg}(m) < \mathtt{rg}(x)$ oder $\mathtt{rg}(x) = \mathtt{rg}(m) = \alpha$. Falls $\mathtt{rg}(m) < \mathtt{rg}(x)$, ist $m \sqsubset x$, erst recht $m \sqsubseteq x$. Falls aber $\mathtt{rg}(x) = \mathtt{rg}(m) = \alpha$, so sind m und x beide Elemente von $\mathcal{R}_\alpha \cap T$, und weil m das $\sqsubset_\alpha$-Minimum dieser Klasse ist, folgt $m \sqsubseteq_\alpha x$. Wegen $\mathtt{rg}(m) = \alpha$ können wir in Aussage $m \sqsubseteq_\alpha x$ das α durch $\mathtt{rg}(m)$ ersetzen und erhalten $m \sqsubseteq_{\mathtt{rg}(m)} x$, also $m \sqsubset_{\mathtt{rg}(m)} x$ oder $m = x$, also $m \sqsubset x$ oder $m = x$, also in jedem Fall $m \sqsubseteq x$.
5. Es gilt die Abschnittsbedingung. Für v aus $\mathbb{V}$ ist also zu zeigen, dass der $\sqsubset$-Abschnitt $\mathtt{Ab}(v)$ eine Menge ist. Nun gilt $\mathtt{Ab}(v) \subseteq \mathbb{V}_{\mathtt{rg}(v)+1}$ (für $u \in \mathtt{Ab}(v)$ gilt $u \sqsubset v$, also $\mathtt{rg}(u) < \mathtt{rg}(v)$ oder $\mathtt{rg}(u) = \mathtt{rg}(v)$, und wegen $\mathtt{rg}(v) < \mathtt{rg}(v) + 1$ folgt $\mathtt{rg}(u) < \mathtt{rg}(v) + 1$, so dass u wegen (5.207) in $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(v)+1}$ liegt), und da $\mathbb{V}_{\mathtt{rg}(v)+1}$ nach (5.194) eine Menge ist, ist deren Teilklasse $\mathtt{Ab}(v)$ per Teilmengenaxiom ebenfalls eine Menge. □

Metatheorem 5.29.6 S. 309

Sei $\mathbb{G}$ ein Modell, und «A», «B», «$\mathfrak{M}$» mögen in den Modellen $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ jeweils dasselbe Objekt bezeichnen, und zwar «A» und «B» eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, und «$\mathfrak{M}$» eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, die eine Mengenklasse ist. Dann gilt:

Die «Teilklassen» eines $\mathbb{G}$-Objekts sind in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselben. (5.219)

Die «$\in$-minimalen Elemente» eines $\mathbb{G}$-Objekts sind in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dieselben. (5.220)

In $\mathbb{G}$ bezeichnet «$\mathbb{M}$» bzw. «$\mathbb{U}$» die Klasse $\mathbb{M} \cap \mathbb{G}$ bzw. $\mathbb{U} \cap \mathbb{G}$. (5.221)

Die «Mengenklassen» in $\mathbb{G}$ sind die Mengenklassen, die Teilklassen von $\mathbb{G}$ sind. (5.222)

Die «Mengenmengen» in $\mathbb{G}$ sind die Mengenmengen, die Elemente von $\mathbb{G}$ sind. (5.223)

Die «Ordinalzahlen» in $\mathbb{G}$ sind die Ordinalzahlen, die Elemente von $\mathbb{G}$ sind. (5.224)

In $\mathbb{G}$ bezeichnet «$\mathcal{P}(A)$» die Klasse $\mathcal{P}(A) \cap \mathbb{G}$. (5.225)

«$A \cup B$», «$A \cap B$», «$A \setminus B$» und «$\bigcup \mathfrak{M}$» bezeichnet jeweils in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe. (5.226)

«A ist vor-induktiv» bedeutet in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe. (5.227)

Beweis von (5.219). Sei G ein $\mathbb{G}$-Objekt. Nach Definition 5.10.1 S. 120 ist nun X eine «Teilklasse» von G, wenn gilt: «X und G sind Klassen und jedes Element von X ist auch ein Element von G».
Ist also X eine «Teilklasse» von G im Standardmodell, so sind X und G Klassen, und beides sind $\mathbb{G}$-Objekte.[30] Als Klassen, die zugleich $\mathbb{G}$ Objekte sind, sind sie aber nach Theorem 5.8.8 S. 110 Teilklassen von $\mathbb{G}$, und als solche nach Satz (5.9 S. 116) auch «Klassen» im Modell $\mathbb{G}$. Da sie nach Satz (5.4 S. 116) in beiden Modellen dieselben «Elemente» haben, ist in beiden jedes Element von X auch ein solches von G, und so ist X auch im Modell $\mathbb{G}$ eine Teilklasse von G.
Ist umgekehrt vorausgesetzt, dass X «Teilklasse» von G im Modell $\mathbb{G}$ ist, so sind X und G «Klassen» dieses Modells, also nach (5.9) Teilklassen von $\mathbb{G}$, also erst recht Klassen, und da sie nach (5.9) in beiden Modellen dieselben Elemente haben, ist X auch im Standardmodell eine Teilklasse von G.

Beweis von (5.220). Sei G ein $\mathbb{G}$-Objekt. Nach Definition 5.14.1 S. 190 (vgl. auch Fußnote 475 auf S. 190) ist m ein «$\in$-minimales Element» von G, wenn m ein «Element» von G ist, und es «kein x gibt mit $x \in G$ und $x \in m$». Wegen (5.4 S. 116) und weil die Variable x in $\mathbb{G}$ als Objektbereich den der $\mathbb{G}$-Objekte hat (siehe S. 111–113), sind die $\in$-minimalen Objekte von G im Modell $\mathbb{G}$ die Elemente m von G, zu denen es kein

[30] G ist nach Voraussetzung ein $\mathbb{G}$-Objekt; X ist als Teilklasse eines $\mathbb{G}$-Objekts wegen (5.8.8 S. 110) ein solches.

$\mathbb{G}$-Objekt x gibt mit $x \in G$ und $x \in m$.[31] Wenn es nun überhaupt kein Objekt x gibt mit $x \in G$ und $x \in m$, so gibt es erst recht kein $\mathbb{G}$-Objekt mit diesen Eigenschaften, und wenn es umgekehrt kein $\mathbb{G}$-Objekt gibt, so kann es schlechthin kein Objekt mit diesen Eigenschaften geben (denn für ein x, das *kein* $\mathbb{G}$-Objekt ist, ist $x \in G$ falsch: denn alle Elemente des $\mathbb{G}$-Objekts G müssen nach Theorem 5.8.8 auch selbst $\mathbb{G}$-Objekte sein). So sind die $\in$-minimalen Objekte von G in beiden Modellen dieselben.

Beweis von (5.221). «$\mathbb{M}$» ist nach Definition die Klasse «$\{x \mid x \text{ ist Menge}\}$». Das ist in $\mathbb{G}$ aufgrund unserer Erklärung S. 113 die Klasse aller $\mathbb{G}$-Individuen, für die x (in $\mathbb{G}$) eine Menge ist. Das ist wegen (5.11 S. 116) die Klasse, deren Elemente genau die $\mathbb{G}$-Individuen (Elemente von $\mathbb{G}$) sind, die Elemente von $\mathbb{G}$ und Mengen sind: also die Klasse derjenigen Elemente von $\mathbb{G}$, die Mengen sind, das ist $\mathbb{G} \cap \mathbb{M}$. Analog folgt mit Berufung auf (5.12 S. 116), dass $\mathbb{U}$ (in $\mathbb{G}$) die Klasse $\mathbb{U} \cap \mathbb{G}$ bezeichnet.

Beweis von (5.222). Eine «Mengenklasse» ist nach Definition eine «Teilklasse von $\mathbb{M}$». Das heißt für das Modell $\mathbb{G}$ wegen (5.219) und (5.221): Mengenklassen sind Teilklassen von $\mathbb{M} \cap \mathbb{G}$. Das aber sind die Teilklassen von $\mathbb{G}$, die zugleich Teilklassen von $\mathbb{M}$ (d. h. zugleich Mengenklassen) sind.

Beweis von (5.223). Eine «Mengenmenge» ist eine «Mengenklasse, die eine Menge ist». Ist X in $\mathbb{G}$ eine Mengenmenge, so ist X also wegen (5.222) und (5.11 S. 116) in $\mathbb{D}$ zugleich Mengenklasse, Menge, Teilklasse und Element von $\mathbb{G}$, insbesondere eine Mengenmenge, die zugleich Element von $\mathbb{G}$ ist. Ist umgekehrt vorausgesetzt, dass X in $\mathbb{D}$ eine Mengenmenge und ein Element von $\mathbb{G}$ ist, so ist X auch eine Menge, eine Mengenklasse und (als Klasse, die Element des $\mathbb{G}$-Objekts $\mathbb{G}$ ist, wegen Theorem 5.8.8 S. 110) eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, also nach (5.11 S. 116) und (5.222) in $\mathbb{G}$ sowohl eine Menge als auch eine Mengenklasse, und somit eine Mengenmenge.

Beweis von (5.224). Lemma: *Eine Mengenklasse α, die Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist* (d. h. nach 5.222 eine Mengenklasse des Modells $\mathbb{G}$) *ist genau dann im Modell $\mathbb{G}$ $\in$-transitiv bzw. $\in$-linear bzw. $\in$-fundiert, wenn das auch im Standardmodell gilt.*

Beweis: Nach (5.4 S. 116), (5.219), (5.220) und (5.6 S. 116) versteht man in beiden Modellen unter der leeren Menge sowie Elementen, Teilklassen und $\in$-minimalen Elementen eines $\mathbb{G}$-Objekts dasselbe. Daher lässt sich die Behauptung aus der Definition der $\in$-Transitivität, $\in$-Linearität und $\in$-Fundiertheit (5.14.1 S. 190 mit Fußnote 475) wie folgt ableiten. α ist im Standardmodell $\in$-transitiv, wenn für *beliebige Objekte* x und y aus $x \in y \in \alpha$ stets $x \in \alpha$ folgt, und im Modell $\mathbb{G}$ ist α $\in$-transitiv, wenn dasselbe für *alle $\mathbb{G}$-Objekte* x und y gilt.[32] Gilt dies nun für beliebige Objekte, so auch für alle $\mathbb{G}$-Objekte; und gilt es für alle $\mathbb{G}$-Objekte, so auch für beliebige Objekte, denn wenn $x \in y \in \alpha$ (für zunächst beliebige x, y) gilt, so ist y Element des $\mathbb{G}$-Objekts α, also nach Theorem 5.8.8 S. 110 auch selbst ein $\mathbb{G}$-Objekt, und ebenso ist dann x Element des $\mathbb{G}$-Objekts y, also auch selbst ein $\mathbb{G}$-Objekt. Analog führt man den Beweis für die $\in$-Linearität und die $\in$-Fundiertheit. Damit ist das Lemma bewiesen.

Ordinalzahlen sind nach Definition 5.14.1 «$\in$-transitive, $\in$-lineare und $\in$-fundierte Mengenmengen». Ist α im Modell $\mathbb{G}$ eine Ordinalzahl, also dort eine Mengenmenge (und erst recht eine Mengenklasse), die $\in$-transitiv, $\in$-linear und $\in$-fundiert ist, so ist α nach (5.223) auch im Standardmodell eine Mengenmenge, die nach dem Lemma auch im Standardmodell $\in$-transitiv, $\in$-linear und $\in$-fundiert und somit eine Ordinalzahl ist.
Ist umgekehrt vorausgesetzt, dass α im Standardmodell eine Ordinalzahl (also eine $\in$-transitive, $\in$-lineare und $\in$-fundierte Mengenmenge) und zugleich ein Element von $\mathbb{G}$ ist, so ist α nach (5.223) auch im Modell $\mathbb{G}$ eine Mengenmenge (und erst recht eine Mengenklasse), und hat daher aufgrund des Lemmas auch in $\mathbb{G}$ die Eigenschaften der $\in$-Transitivität, $\in$-Linearität und $\in$-Fundiertheit, ist also dort eine Ordinalzahl.

Beweis von (5.225). «$\mathcal{P}(A)$» ist nach Definition «$\{x \mid x \subseteq A\}$» und bezeichnet nach der Erläuterung auf S. 113 in $\mathbb{G}$ die Klasse, deren Elemente die $\mathbb{G}$-Individuen x (d. h. Elemente x von $\mathbb{G}$) sind, für die (in $\mathbb{G}$) $x \subseteq A$ gilt; das sind nach (5.219) genau die x aus $\mathbb{G}$, für die auch im Standardmodell $x \subseteq A$ gilt, also die Elemente von $\mathcal{P}(A) \cap \mathbb{G}$. Daher bezeichnet «$\mathcal{P}(A)$» in $\mathbb{G}$ die Klasse, für die wir im Standardmodell $\mathcal{P}(A) \cap \mathbb{G}$ schreiben.

---

[31] Man beachte, dass nach Theorem 5.8.8 S. 110 m als Element des $\mathbb{G}$-Objekts G ebenfalls ein $\mathbb{G}$-Objekt ist, weshalb nach (5.4 S. 116) die Elemente von m (ebenso wie die von G) in beiden Modellen dieselben sind.

[32] In $\mathbb{G}$ ist zu ja beachten, dass die Variablen x und y nur für $\mathbb{G}$-Objekte stehen (siehe S. 111–113). Außerdem ist α als Teilklasse von $\mathbb{G}$ ein $\mathbb{G}$-Objekt, und daher sind die Elemente y von α wegen Theorem (5.4 S. 116) in beiden Modellen dieselben; und da diese y dann nach Theorem 5.8.8 S. 110 selbst wieder $\mathbb{G}$-Objekte sind, sind auch die Elemente x eines jeden y aus α in beiden Modellen dieselben.

Beweis von (5.226). «$A \cup B$» bezeichnet nach Definition und unserer Erklärung S. 113 im Modell $\mathbb{G}$ die Klasse, deren Elemente die $\mathbb{G}$-Individuen x (d. h. Elemente x von $\mathbb{G}$) sind, für die (in $\mathbb{G}$ und somit nach (5.4) auch im Standardmodell) $x \in A$ oder $x \in B$ gilt. Diese Klasse ist $(A \cup B) \cap \mathbb{G}$. Analog folgt, dass «$A \cap B$» im Modell $\mathbb{G}$ die Klasse $(A \cap B) \cap \mathbb{G}$ und «$A \setminus B$» die Klasse $(A \setminus B) \cap \mathbb{G}$ bezeichnet. Da A und B nach Voraussetzung Teilklassen von $\mathbb{G}$ sind, sind auch $A \cup B$ und $A \cap B$ und $A \setminus B$ Teilklassen von $\mathbb{G}$. Die Schnittklasse einer beliebigen Teilklasse T von $\mathbb{G}$ mit $\mathbb{G}$ ist aber T selbst. Daher können wir für $(A \cup B) \cap \mathbb{G}$ auch einfach $A \cup B$ schreiben, und ebenso für $(A \cap B) \cap \mathbb{G}$ auch $A \cap B$ und für $(A \setminus B) \cap \mathbb{G}$ auch $A \setminus B$.
«$\bigcup \mathfrak{M}$» bezeichnet nach Definition und unserer Erklärung S. 113 im Modell $\mathbb{G}$ die Klasse, deren Elemente die $\mathbb{G}$-Individuen x (d. h. Elemente x von $\mathbb{G}$) sind, für die es (in $\mathbb{G}$ und somit nach 5.4 auch im Standardmodell) mindestens ein Element M von $\mathfrak{M}$ gibt (welches wegen $M \in \mathfrak{M} \subseteq \mathbb{G}$ ein Element von $\mathbb{G}$, also ein $\mathbb{G}$-Individuum ist), so dass $x \in M$ (in $\mathbb{G}$ und somit nach 5.4 auch im Standardmodell) gilt. Diese Klasse ist $(\bigcup \mathfrak{M}) \cap \mathbb{G}$. Da $\mathfrak{M}$ nach Voraussetzung eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ sowie eine Mengenklasse ist, sind alle Elemente M von $\mathfrak{M}$ in $\mathbb{G}$ liegende Mengen. Ist x Element eines solchen M, so gilt also $x \in M \in \mathbb{G}$, und daher $x \in \mathbb{G}$ per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$. So sind die Mengen M Teilklassen von $\mathbb{G}$. Dann folgt aber, dass auch $\bigcup \mathfrak{M}$ eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist, und da die Schnittklasse jeder Teilklasse T von $\mathbb{G}$ mit $\mathbb{G}$ stets T selbst ist, ist $(\bigcup \mathfrak{M}) \cap \mathbb{G}$ dasselbe wie $\bigcup \mathfrak{M}$.

Beweis von (5.227). «A ist vor-induktiv» hat (nach 5.16.39 S. 222) dieselbe Bedeutung wie «$\emptyset \in A$ und für jedes x gilt: Ist x eine Menge mit $x \in A$, so ist auch $x \cup \{x\} \in A$». Da $\emptyset$ und $x \cup \{x\}$ nach (5.6), (5.7 S. 116) und (5.226) in beiden Modellen dasselbe bezeichnet[33] und nach (5.4 S. 116) die Elemente von A in beiden Modellen dieselben sind, bedeutet Vor-Induktivität in beiden Modellen dasselbe.[34] □

Metatheorem 5.29.21 S. 312

Sei $\mathbb{G}$ ein paartreues Modell und bezeichne «a», «b», «A», «B», «p», «R» und «f» in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ jeweils dasselbe Objekt: und zwar «x» und «y» ein Element von $\mathbb{G}$, «A» und «B» eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, «p» ein Element von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, «$R$» eine Relation, die Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist, und «f» eine Funktion, die Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist. Dann gilt:

«$\langle a, b \rangle$» bezeichnet in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dasselbe Element von $\mathbb{G}$.	(5.228)
«Individuenpaare» in $\mathbb{G}$ sind Individuenpaare, deren Komponenten in $\mathbb{G}$ liegen.	(5.229)
Die «1-te» bzw. «2-te Komponente» von p ist in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselbe.	(5.230)
«$A \times B$» bezeichnet in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dasselbe.	(5.231)
Die «Relationen» des Modells $\mathbb{G}$ sind die Teilklassen von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$.	(5.232)
Die Relation «R» führt in $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dieselben Zuordnungen aus.	(5.233)
Die «Funktionen» des Modells $\mathbb{G}$ sind die Funktionen, die Teilklassen von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ sind.	(5.234)
Die «Injektionen» des Modells $\mathbb{G}$ sind die Injektionen, die Teilklassen von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ sind.	(5.235)
«$\mathtt{Db}(f)$», «$\mathtt{Wb}(f)$» und «$f(x)$» bezeichnet jeweils in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe.	(5.236)
Die Ausdrücke «$A \sim B$» und «A ist unendlich» bedeuten in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe.	(5.237)
Die «unendlichen Mengen» in $\mathbb{G}$ sind die in $\mathbb{G}$ liegenden unendlichen Mengen.	(5.238)

Beweis von (5.228). «$\langle a, b \rangle$» bedeutet nach Definition das, was «$\{a, \{a, b\}\}$» bezeichnet. Da «a» und «b» Elemente von $\mathbb{G}$ bezeichnen, folgt nach (5.7 S. 116), dass «$\{a, b\}$» in $\mathbb{G}$ dasselbe wie im Standardmodell bezeichnet, und dies ist wegen der Paartreue von $\mathbb{G}$ ein Element von $\mathbb{G}$. Deshalb (und weil «a» ein Element von $\mathbb{G}$ bezeichnet) folgt wieder nach (5.7), dass auch «$\{a, \{a, b\}\}$» dasselbe wie im Standardmodell bezeichnet, und dies ist wegen der Paartreue von $\mathbb{G}$ ein Element von $\mathbb{G}$.

[33] (5.7 S. 116) ist anwendbar, weil x wegen $x \in A \subseteq \mathbb{G}$ ein Element von $\mathbb{G}$ ist. Daraus folgt, dass $\{x\}$ eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist; außerdem ist x (als Klasse, die Element des $\mathbb{G}$-Objekts A ist) nach Theorem 5.8.8 S. 110 ebenfalls eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, weshalb (5.226) anwendbar ist.

[34] Man beachte noch, dass «für jedes x» in $\mathbb{G}$ eigentlich bedeutet: für jedes x, *das $\mathbb{G}$-Objekt ist*, und dass «x ist Menge» wegen (5.11 S. 116) bedeutet: x ist Menge *und Element von* $\mathbb{G}$. Aber diese Zusätze können wir weglassen, weil $x \in A$ wegen $A \subseteq \mathbb{G}$ impliziert, dass $x \in \mathbb{G}$ und daher auch, dass x ein $\mathbb{G}$-Objekt ist.

Beweis von (5.229). i ist genau dann ein Individuenpaar im Modell $\mathbb{G}$, wenn (in $\mathbb{G}$) $i = \langle x, y\rangle$ gilt, wobei x und y (in $\mathbb{G}$) Individuen sind. Dies aber gilt wegen (5.8 S. 116) und (5.228) genau dann, wenn im Standardmodell x und y Elemente von $\mathbb{G}$ sind und $i = \langle x, y\rangle$ gilt, d. h. genau dann, wenn im Standardmodell i ein Individuenpaar ist, dessen Komponenten Elemente von $\mathbb{G}$ sind.

Beweis von (5.230). Nach Voraussetzung ist p im Standardmodell ein Individuenpaar $\langle x, y\rangle$ mit Komponenten x und y aus $\mathbb{G}$. Nach (5.229) ist also p auch im Modell $\mathbb{G}$ ein Individuenpaar. Da nun der Eindeutigkeitssatz für Individuenpaare (5.10.31 S. 129) aus dem Paar–, Extensionalitäts– und Komprehensionsaxiom abgeleitet wurde, und alle diese Axiome in $\mathbb{G}$ gelten, hat p in $\mathbb{G}$ genau eine erste Komponente u und genau eine zweite Komponente v. So gilt (in $\mathbb{G}$) $p = \langle u, v\rangle$, wobei u und v (in $\mathbb{G}$) Individuen sind, also nach (5.8 S. 116) im Standardmodell Elemente von $\mathbb{G}$, und wegen (5.228) gilt auch im Standardmodell, dass $p = \langle u, v\rangle$. Da dort auch $p = \langle x, y\rangle$ ist, folgt per Eindeutigkeitssatz $u = x$ und $p = v$, also stimmt die «1-te Komponente» von p ebenso wie die «2-te» in beiden Modellen überein.

Beweis von (5.231). «$A \times B$» bezeichnet dasselbe wie «$\{x \mid$ es gibt ein i mit $i \in A$ und ein j mit $j \in B$ so dass $x = \langle i, j\rangle\}$». Das ist in $\mathbb{G}$ die Klasse aller $\mathbb{G}$-Individuen x (d. h. aller Elemente x von $\mathbb{G}$), für die es ein i aus A und ein j aus B gibt, so dass $x = \langle x, y\rangle$ ist, wobei i und j wegen (5.4 S. 116) auch im Standardmodell Elemente von A bzw. B sind, und «$\langle x, y\rangle$» nach (5.228) in beiden Modellen dasselbe bezeichnet. Diese Klasse ist (im Standardmodell) also $(A \times B) \cap \mathbb{G}$. Da aber jedes Element von $A \times B$ in $\mathbb{G}$ liegt (ist nämlich $\langle x, y\rangle$ Element von $A \times B$, so liegt die Komponente x in A und die Komponenten y in B, und da A und B Teilklassen von $\mathbb{G}$ sind, liegen also x und y in $\mathbb{G}$; wegen der Paartreue von $\mathbb{G}$ liegt dann auch $\langle x, y\rangle$ in $\mathbb{G}$), ist $A \times B$ Teilklasse von $\mathbb{G}$, und da die Schnittklasse einer Teilklasse T von $\mathbb{G}$ mit T stets T selbst ist, ist schließlich $(A \times B) \cap \mathbb{G}$ die Klasse $A \times B$.

Beweis von (5.232). Eine «Relation» ist (in jedem Modell) eine «Teilklasse» des (dortigen) «$\mathbb{D} \times \mathbb{D}$». Im Modell $\mathbb{G}$ bezeichnet «$\mathbb{D}$» nach (5.5 S. 116) die Klasse $\mathbb{G}$, und «$\mathbb{D} \times \mathbb{D}$» die Klasse $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, wie sich aus (5.231) schließen lässt: Wir können eine Variable v nehmen und diese in beiden Modellen, $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$, als Bezeichnung für $\mathbb{G}$ interpretieren (denn $\mathbb{G}$ gehört in beiden Modellen zum Objektbereich der Variablen). Nach (5.5) wird in $\mathbb{G}$ das Objekt $\mathbb{G}$ auch mit «$\mathbb{D}$» bezeichnet, also bezeichnen dann «$\mathbb{D}$» und «v» in $\mathbb{G}$ dasselbe. Folglich bezeichnet dann aber «$\mathbb{D} \times \mathbb{D}$» in $\mathbb{G}$ dasselbe wie «$v \times v$». Wegen (5.231) bezeichnet nun aber «$v \times v$» in $\mathbb{G}$ wiederum dasselbe wie im Standardmodell, wo «v» die Klasse $\mathbb{G}$, also «$v \times v$» die Klasse $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ bezeichnet. Insgesamt bezeichnet also in $\mathbb{G}$ «$\mathbb{D} \times \mathbb{D}$» ebenso wie «$v \times v$» die Klasse $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$.
So sind die «Relationen» hier die Objekte, die (in $\mathbb{G}$) «Teilklassen» von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ sind. Nun ist $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ wegen der Paartreue von $\mathbb{G}$ eine Teilklasse von $\mathbb{G}$,[35] insbesondere ein $\mathbb{G}$-Objekt. Also sind die Teilklassen von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ nach Satz (5.219 S. 309) in beiden Modellen dieselben, und es folgt, dass die Relationen des Models $\mathbb{G}$ im Standardmodell die Teilklassen von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ sind.

Beweis von (5.233). Wegen (5.232) ist zunächst R eine «Relation» in beiden Modellen. Es richte nun R im Modell $\mathbb{G}$ ein Objekt i auf ein Objekt j aus (das wir also in beiden Modellen durch die Variable i bzw. j bezeichnen). Dann gilt in $\mathbb{G}$, dass $\langle i, j\rangle$ ein Element $\widehat{p}$ von R ist. Weil nun R eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist (R ist nach Voraussetzung eine Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, und $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist eine solche von $\mathbb{G}$: siehe Fußnote 35), ist R ein $\mathbb{G}$-Objekt und wir können den Satz (5.4 S. 116) auf R anwenden, so dass $\widehat{p}$ auch im Standardmodell ein Element von R ist, und somit wegen $R \subseteq \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ auch ein Element von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$. So folgt mittels Satz (5.230), dass $\widehat{p}$ in beiden Modellen dieselbe erste und dieselbe zweite Komponente hat: So ist i bzw. j (was ja in $\mathbb{G}$ die erste bzw. zweite Komponente bezeichnet) auch im Standardmodell die erste bzw. zweite Komponente von $\widehat{p}$, so dass $\widehat{p}$ auch hier mit «$\langle i, j\rangle$» bezeichnet werden kann. Also gilt auch im Standardmodell die Formel «$\langle i, j\rangle \in R$», was bedeutet, dass R das Objekt i (auch hier) auf j ausrichtet. Richtet umgekehrt R im Standardmodell ein i auf ein j aus, so gilt $\langle i, j\rangle \in R$. Es bezeichnen dann aber die Variablen i und j (weil $\mathbb{R}$ Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist) Elemente von $\mathbb{G}$ und damit $\mathbb{G}$-Objekte, so dass wir dieselben Objekte auch in $\mathbb{G}$ mit diesen Variablen bezeichnen dürfen. Dann bezeichnet «$\langle i, j\rangle$» wegen (5.228) in $\mathbb{G}$ dasselbe Objekt wie in $\mathbb{D}$, und es folgt aus (5.4), dass das Objekt $\langle i, j\rangle$, das im Standardmodell Element von R ist, auch in $\mathbb{G}$ Element von R ist. Also gilt «$\langle i, j\rangle \in R$» in $\mathbb{G}$, was bedeutet, dass R das Objekt i (auch hier) auf j ausrichtet.

Beweis von (5.234) und (5.235). Ist g Funktion [bzw. Injektion] im Modell $\mathbb{G}$, so ist g dort eine Relation, die kein $\mathbb{G}$-Objekt auf zwei verschiedene $\mathbb{G}$-Objekte ausrichtet [bzw. die dies nicht tut und auch keine zwei verschiedene $\mathbb{G}$-Objekt auf ein und dasselbe $\mathbb{G}$-Objekt ausrichtet]. Als Relation des Modells $\mathbb{G}$ ist g nach

[35] Liegt $\langle x, y\rangle$ in $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, so liegen x und y in $\mathbb{G}$, und wegen der Paartreue von $\mathbb{G}$ liegt dann auch $\langle x, y\rangle$ in $\mathbb{G}$.

(5.232) im Standardmodell eine Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, und daher auch im Standardmodell eine Relation, und nach (5.233) folgt, dass g in beiden Modellen dieselben Ausrichtungen vornimmt: Sie richtet also auch im Standardmodell keine $\mathbb{G}$-Objekte auf zwei verschiedene $\mathbb{G}$-Objekte aus [bzw. tut weder dies noch richtet sie zwei verschiedene $\mathbb{G}$-Objekt auf ein und dasselbe $\mathbb{G}$-Objekt aus]. Da g aber Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist, kann g nur Elemente von $\mathbb{G}$ (und somit nur $\mathbb{G}$-Objekte) aufeinander ausrichten. Somit gilt für die Relation g, das sie *schlechthin* kein Objekt auf zwei verschiedene Objekte ausrichtet [bzw. weder dies tut noch zwei verschiedene Objekt auf ein und dasselbe Objekt ausrichtet], und so ist g eine Funktion [bzw. Injektion] auch im Standardmodell.
Ist umgekehrt vorausgesetzt, dass g im Standardmodell eine Funktion [bzw. Injektion] und zugleich Teilklasse von $\mathbb{G}$ in $\mathbb{G}$ ist, so ist nach (5.232) g auch in $\mathbb{G}$ eine Relation, und richtet nach (5.233) in beiden Modellen genau dieselben Objekte aufeinander aus. So ist g auch in $\mathbb{G}$ ein Funktion [bzw. Injektion].

Beweis von (5.236). Nach (5.234) ist f Funktion in beiden Modellen. Wegen (5.233) führt sie in beiden Modellen dieselben Ausrichtungen, d. h. dieselben Würfe aus. $\ll\mathtt{Db}(f)\gg$ bzw. $\ll\mathtt{Wb}(f)\gg$ bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ die Klasse, deren Elemente die $\mathbb{G}$-Individuen (Elemente von $\mathbb{G}$) sind, welche f auf ein bzw. auf welche f ein $\mathbb{G}$-Individuum wirft. Da f Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist, führt f mit keinen anderen Objekte außer $\mathbb{G}$-Individuen Würfe aus und wirft diese auch auf keine anderen Objekte. Somit bezeichnet $\ll\mathtt{Db}(f)\gg$ bzw. $\ll\mathtt{Wb}(f)\gg$ in $\mathbb{G}$ genau wie im Standardmodell die Klasse, die schlechthin die Individuen enthält, die f auf ein (bzw. auf die f ein) Individuum wirft. Ferner bezeichnet $\ll f(x)\gg$ im Modell $\mathbb{G}$ das $\mathbb{G}$-Individuum, auf das f im Modell $\mathbb{G}$ das mit x bezeichnete Element von $\mathbb{G}$ wirft. Da f diesen Wurf in beiden Modellen ausführt, bezeichnet $\ll f(x)\gg$ auch im Standardmodell dieses $\mathbb{G}$-Individuum.

Beweis von (5.237). Gilt $\ll A \sim B\gg$ in $\mathbb{G}$, so gibt es im Modell $\mathbb{G}$ eine Injektion, deren Definitionsbereich (in $\mathbb{G}$) A ist und deren Wertebereich (in $\mathbb{G}$) B ist. Wegen (5.235) und (5.236) ist dies auch eine Injektion im Standardmodell mit demselben Definitions– und Wertebereich, und daher gilt $\ll A \sim B\gg$ auch im Standardmodell. Ist umgekehrt vorausgesetzt, dass $\ll A \sim B\gg$ im Standardmodell gilt, es also eine Injektion g gibt mit $\mathtt{Db}(g) = A$ und $\mathtt{Wb}(g) = B$, so ist (weil A und B Teilklassen von $\mathbb{G}$ sind), g eine Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ und also nach (5.235) auch eine Injektion im Modell $\mathbb{G}$, die dort wegen (5.236) denselben Definitions– und Wertebereich hat. Also gilt $\ll A \sim B\gg$ auch im Modell $\mathbb{G}$.
$\ll A$ ist unendlich$\gg$ bedeutet nach Definition $\ll$es gibt eine von A verschiedene Teilklasse von A, die mit A gleichmächtig ist$\gg$. Da nach (5.219) die Teilklassen von A in beiden Modellen dieselben sind, und, wie gerade bewiesen, in beiden Modellen die Gleichmächtigkeit einer Teilklasse von A mit A dieselbe Bedeutung hat, muss auch $\ll A$ ist unendlich$\gg$ in beiden Modellen dasselbe bedeuten.

Beweis von (5.238). Sei M eine unendliche Menge im Modell $\mathbb{G}$. Dann ist M (als Menge des Modells $\mathbb{G}$) im Standardmodell nach (5.11 S. 116) eine Menge und ein Element von $\mathbb{G}$. Wegen Theorem 5.8.8 S. 110 aber ist M (als Klasse, die Elemente des $\mathbb{G}$-Objektes $\mathbb{G}$ ist) eine Teilklasse von $\mathbb{G}$. Somit ist (5.237) anwendbar und zeigt nun, das M auch im Standardmodell unendlich ist.
Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass M im Standardmodell eine unendliche Menge und ein Element von $\mathbb{G}$ ist. Dann ist M nach Theorem 5.8.8 auch eine Teilklasse von $\mathbb{G}$. Nach (5.237) folgt also, dass M auch in $\mathbb{G}$ unendlich ist, und nach (5.11) ist M auch in $\mathbb{G}$ eine Menge. □

Metatheorem 5.29.22 S. 313

Sei $\mathbb{G}$ ein paar– und $\bigcup$-treues Modell. Dann gilt:

$\ll\omega\gg$ bezeichnet in $\mathbb{G}$ dasselbe wie in $\mathbb{D}$, und zwar eine Teilklasse von $\mathbb{G}$. (5.239)

Ist $\omega \in \mathbb{G}$, so gilt in $\mathbb{G}$ das Unendlichkeitsaxiom. (5.240)

Im Modell $\mathbb{G}$ gilt das Antizirkularitätsaxiom. (5.241)

Beweis von (5.239). Es gilt $\emptyset \in \mathbb{G}$ (weil $\mathbb{G}$ ein Modell ist), und wenn eine Menge x in $\mathbb{G}$ liegt, gilt wegen der Paar- und $\bigcup$-Treue auch $x \cup \{x\} \in \mathbb{G}$: Zunächst ist per Paartreue $\{x, x\}$, d. h. $\{x\}$, ein Element von $\mathbb{G}$, und wieder wegen der Paartreue ist dann auch $\{x, \{x\}\}$ ein Element von $\mathbb{G}$, also wegen der $\bigcup$-Treue auch $\bigcup\{x, \{x\}\}$, was $= x \cup \{x\}$ ist. So ist $\mathbb{G}$ vor-induktiv (vgl. Definition 5.16.39 S. 222).
$\ll\omega\gg$ bezeichnet per Definition 5.16.40 S. 222 die Klasse $\ll\{x \mid \text{für jede vor-induktive Klasse } C \text{ gilt } x \in C\}\gg$, das ist im Modell $\mathbb{G}$ aufgrund von (5.4 S. 116), (5.9 S. 116), (5.227) die Klasse $\omega_{\mathbb{G}}$, deren Elemente die $\mathbb{G}$-

Individuen x (d. h. die Elemente x von $\mathbb{G}$) sind, für die gilt: *Für jedes C, das $\mathbb{G}$-Objekt (d. h. Element oder Teilklasse von $\mathbb{G}$) sowie vor-induktive Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist, gilt $x \in C$.*
Nun liegt jedes x aus ω auch in $\omega_{\mathbb{G}}$: denn jedes x aus ω liegt wegen Theorem 5.16.41 S. 222 in jeder vor-induktiven Teilklasse, also auch in $\mathbb{G}$ (so dass x ein $\mathbb{G}$-Individuum ist) und in jeder vor-induktiven Teilklasse von C. Umgekehrt liegt auch jedes x aus $\omega_{\mathbb{G}}$ in jeder vor-induktiven Klasse und daher in ω: Ist nämlich C eine beliebige vor-induktive Klasse, so ist $C \cap \mathbb{G}$ (als Schnitt zweier vor-induktiver Klassen) offenbar ebenfalls vor-induktiv, und zwar eine vor-induktive Teilklasse von $\mathbb{G}$. Jedes Element x von $\omega_{\mathbb{G}}$ muss also in $C \cap \mathbb{G}$ liegen, und somit erst recht in der Oberklasse C von $C \cap \mathbb{G}$. Damit gilt insgesamt $\omega_{\mathbb{G}} = \omega$.
Da nun ω nach Theorem 5.16.41 Teilklasse jeder vor-induktiven Klassen ist, gilt außerdem $\omega \subseteq \mathbb{G}$.

Beweis von (5.240). ω ist in $\mathbb{D}$ eine unendliche Menge. Liegt diese nun in $\mathbb{G}$, so folgt aus (5.238), dass ω auch im Modell $\mathbb{G}$ eine unendliche Menge ist. Also gilt das Unendlichkeitsaxiom (5.17.26 S. 242).

Beweis von (5.241). Benutzen wir n^* (wenn n eine natürliche Zahl bezeichnet) als Abkürzung für «der Vorgänger von n», d. h. für «dasjenige x aus ω, für das $x \cup \{x\} = n$ gilt», so steht «f ist geschlossene Mengenkette» gemäß Definition 5.19.2 S. 253 (vgl. Fußnote 602 auf S. 253) für «f ist Funktion und es gilt $\mathtt{Db}(f) \in \omega \setminus \{0,1\}$ und $\mathtt{Wb}(f) \subseteq \mathbb{M}$ und $f(0) = f(\mathtt{Db}(f)^*)$ und für jedes i aus $\mathtt{Db}(f) \setminus \{0\}$ gilt $f(i) \in f(i^*)$».
Bezeichnet nun n (in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$) eine von 0 verschiedene natürliche Zahl, so bezeichnet auch n^* (in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$) dasselbe Objekt: Denn in $\mathbb{D}$ gibt es genau ein m aus ω, für welches $m + 1 = n$, d. h. $m \cup \{m\} = n$ gilt, und da nach (5.239) $\omega \subseteq \mathbb{G}$ gilt, ist dieses m Element von $\mathbb{G}$. Daher ist $\{m\}$ eine Teilklasse von $\mathbb{G}$, und dies gilt nach Theorem 5.8.8 S. 110 auch für m (denn m ist eine Klasse, die Element des $\mathbb{G}$-Objekts $\mathbb{G}$ ist). So folgt mit (5.226 S. 309) und (5.7 S. 116), dass $m \cup \{m\}$ in $\mathbb{G}$ dasselbe bezeichnet wie in $\mathbb{D}$, also $= n$ ist. Für von m verschiedene Elemente k von ω aber kann die in $\mathbb{D}$ gültige Aussage, dass $k \cup \{k\} \neq n$ ist, ebenfalls in das Modell $\mathbb{G}$ übertragen werden (wieder wegen 5.226 und 5.7, weil k und $\{k\}$ Teilklassen von $\mathbb{G}$ sind). Also ist m auch in $\mathbb{G}$ das einzige Element von ω mit $m \cup \{m\} = n$, und zudem ist m als Element von $\mathbb{G}$ ein $\mathbb{G}$-Objekt und ist (nach 5.4 S. 116, und weil ω als Teilklasse von $\mathbb{G}$ ein $\mathbb{G}$-Objekt ist) auch im Modell $\mathbb{G}$ ein Element von ω. Daher bezeichnet der Term, für den n^* stehen soll, nämlich «dasjenige x aus ω mit $x \cup \{x\} = n$» in $\mathbb{G}$ dasselbe wie im Standardmodell.
Auch bezeichnet «0» und «1» (d. h. $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$) wegen (5.6 S. 116) und (5.7 S. 116) in beiden Modellen dasselbe. So bedeutet der besagte Ausdruck im Modell $\mathbb{G}$ wegen und (5.4 S. 116), (5.219 S. 309), (5.221 S. 309), (5.226 S. 309), (5.234 S. 312), (5.236 S. 312) und (5.239) Folgendes: f ist Funktion, die Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ist, und es gilt $\mathtt{Db}(f) \in \omega \setminus \{0,1\}$ und $\mathtt{Wb}(f) \subseteq \mathbb{M} \cap \mathbb{G}$ und $f(0) = f(\mathtt{Db}(f)^*)$ und für jedes i aus $\mathtt{Db}(f) \setminus \{0\}$, *das Element von $\mathbb{G}$ ist* [diesen kursiven Zusatz kann man aber streichen, da alle i aus $\mathtt{Db}(f) \setminus \{0\}$ als Elemente von ω ohnehin in $\mathbb{G}$ liegen], gilt $f(i) = f(i^*)$. Ist also f eine geschlossene Mengenkette des Modells $\mathbb{G}$, so ist f auch eine solche Mengenkette im Standardmodell. Aufgrund des Antizirkularitätsaxioms der allgemeinen Mengenlehre kann es also ein solches f nicht geben. □

Theorem 5.30.5 S. 318

Für Mengen M_1, M_1 bzw. Kardinalzahlen κ_1, κ_2 gilt:

$$|M_1| = |M_2| \quad \Leftrightarrow \quad M_1 \sim M_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \kappa_1 = \kappa_1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 \sim \kappa_2, \tag{5.246}$$

$$|M_1| < |M_2| \quad \Leftrightarrow \quad M_1 \prec M_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \kappa_1 < \kappa_1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 \prec \kappa_2, \tag{5.247}$$

$$|M_1| \leq |M_2| \quad \Leftrightarrow \quad M_1 \precsim M_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \kappa_1 \leq \kappa_1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 \precsim \kappa_2. \tag{5.248}$$

Beweis. Wir brauchen nur die Behauptungen für M_1 und M_2 zu beweisen, dann gelten auch die entsprechenden Behauptung für κ_1 und κ_2, weil gemäß (5.245 S. 318) $|\kappa_1| = \kappa_1$ und $|\kappa_2| = \kappa_2$ ist.

Beweis von (5.246). Wenn $|M_1| = |M_2|$, haben M_1 und M_2 die gleiche Kardinalzahl, d. h. sind mit derselben Kardinalzahl und daher auch miteinander gleichmächtig: $M_1 \sim M_2$. Ist umgekehrt $M_1 \sim M_2$ vorausgesetzt, und ist κ die Mächtigkeit von M_1, gilt $\kappa \sim M_1 \sim M_2$, also $\kappa \sim M_2$, also ist κ auch die Mächtigkeit von M_2, und so haben M_1 und M_2 dieselbe Mächtigkeit: $|M_1| = |M_2|$.

Beweis von (5.247). Wenn $|M_1| < |M_2|$ gilt nach Definition von $<$ für Ordinalzahlen, dass $|M_1| \in |M_2|$, also nach (5.72 S. 191) $|M_1| \subseteq |M_2|$, also nach (5.89 S. 200) $|M_1| \precsim |M_2|$. Nun ist aber $|M_1| \sim |M_2|$ ausgeschlossen: Denn die Kardinalzahl $|M_2|$ kann nach Definition der Kardinalzahl nicht gleichmächtig mit der kleineren Ordinalzahl $|M_1|$ sein. Also gilt $|M_1| \prec |M_2|$. Da nach (5.245 S. 318) $M_1 \sim |M_1|$ und $M_2 \sim |M_2|$ gilt, können wir in Aussage $|M_1| \prec |M_2|$ gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 das $|M_1|$ durch M_1 und das $|M_2|$ durch

M_2 ersetzen und erhalten $M_1 \prec M_2$. Sei umgekehrt $M_1 \prec M_2$ vorausgesetzt. ANGENOMMEN, $|M_1| < |M_2|$ wäre falsch, so wäre $|M_1| = |M_2|$ oder $|M_2| < |M_1|$. Im ersten Fall würde aus (5.246) folgen, dass $M_1 \sim M_2$, und im zweiten aus dem schon bewiesenen Teil von (5.247), dass $M_2 \prec M_1$. Beides stünde (wegen Satz 5.98 S. 201) im Widerspruch zu $M_1 \prec M_2$. Die ANNAHME ist also falsch und $|M_1| < |M_2|$ ist richtig.

Beweis von (5.248). Dies folgt sofort aus (5.246) und (5.247), weil einerseits $|M_1| \leq |M_2|$ bedeutet, das $|M_1| = |M_2|$ oder $|M_1| < |M_2|$, und andererseits $M_1 \precsim M_2$, dass $M_1 \sim M_2$ oder $M_1 \prec M_2$. □

Theorem 5.30.6 S. 318

Werfen wir jede Kardinalzahl κ auf ihre FREGEsche Zahl $\llbracket\kappa\rrbracket$, so gilt:

(1) Es werden genau die Mengenstufen getroffen.

(2) Verschiedene Kardinalzahlen treffen verschiedene Mengenstufen,
und zwar trifft die größere Kardinalzahl die größere Mengenstufe.

(3) Unendliche Kardinalzahlen treffen genau die Unendlichkeitsstufen für Mengen.

(4) Auf jeder Mengenstufe $\mathfrak{M}$ liegt die (und nur die) Kardinalzahl, die auf $\mathfrak{M}$ geworfen wird.

Beweis. Zu (1): Kardinalzahlen werden *nur* auf Mengenstufen geworfen, denn da Kardinalzahlen κ Ordinalzahlen und daher *Mengen* sind, ist ihre FREGEsche Zahl $\llbracket\kappa\rrbracket$ eine Mengenstufe. Sodann wird auch *jede* Mengenstufe getroffen. Denn jede Mengenstufe ist die FREGEsche Zahl $\llbracket M\rrbracket$ einer Menge M. Für die Kardinalzahl $\kappa := |M|$ von M gilt dann wegen (5.245), dass $M \sim \kappa$, so dass wegen (5.46) gilt $\llbracket M\rrbracket = \llbracket\kappa\rrbracket$. Also wird κ auf $\llbracket M\rrbracket$ geworfen.

Zu (2): Von verschiedenen Kardinalzahlen ist die eine (sie heiße κ_1) größer als die andere (sie heiße κ_2). Aus $\kappa_1 < \kappa_2$ folgt nach (5.247), dass $\kappa_1 \prec \kappa_2$, also nach (5.108 S. 204) $\llbracket\kappa_1\rrbracket <_{Fr} \llbracket\kappa_2\rrbracket$.

Zu (3). Für unendliches κ ist die Stufe $\llbracket\kappa\rrbracket$, auf die κ geworfen wird, nach Definition 5.17.36 S. 245 eine Unendlichkeitsstufe, und zugleich nach (1) eine Mengenstufe. Sodann wird auch *jede* Unendlichkeitsstufe $\mathfrak{U}$, die eine Mengenstufe ist, von einer unendlichen Kardinalzahl getroffen: wegen (1) wird eine Kardinalzahl κ auf $\mathfrak{U}$ geworfen, so dass $\mathfrak{U} = \llbracket\kappa\rrbracket$. Wäre κ endlich, wäre nach Definition 5.17.36 $\llbracket\kappa\rrbracket$ eine Endlichkeitsstufe und könnte mit $\mathfrak{U}$ nicht identisch sein; so ist κ unendlich.

Zu (4). Ist $\mathfrak{M}$ eine Mengenstufe, so gibt es nach (1) eine Kardinalzahl κ, die auf $\mathfrak{M}$ geworfen wird, also gilt $\mathfrak{M} = \llbracket\kappa\rrbracket$ und κ liegt auf $\mathfrak{M}$. Liegt auch die Kardinalzahl λ auf $\mathfrak{M}$, so sind κ und λ als Elemente derselben Äquivalenzklasse von $\sim$ gleichmächtig, also gilt $\kappa \sim \lambda$ und daraus folgt (gemäß 5.246 S. 318), dass $\kappa = \lambda$. □

Theorem 5.30.11 S. 320

Die Klasse `Cn` besitzt kein Maximum, d. h. zu jeder Kardinalzahl κ gibt es eine größere, und die kleinste Kardinalzahl, die größer ist als κ, heißt der *kardinale Nachfolger* von κ und wird mit κ^+ bezeichnet. Die Mengenstufe $\llbracket\kappa^+\rrbracket$ von κ^+ ist von $\llbracket\kappa\rrbracket$ aus die nächst höhere.

Beweis. Nach dem CANTORschen Satz 5.20.19 S. 262 ist $\kappa \prec \mathcal{P}(\kappa)$. Daraus folgt mittels (5.247), dass $|\kappa| < |\mathcal{P}(\kappa)|$. Nach (5.245) ist aber $|\kappa| = \kappa$, und daher $\kappa < |\mathcal{P}(\kappa)|$. Somit ist die Klasse der Kardinalzahlen, die größer als κ sind, eine nichtleere Teilklasse von `On` und besitzt daher ein Minimum. Dieses Minimum ist also die kleinste Kardinalzahl, die größer als κ ist und die wir als den «kardinalen Nachfolger» κ^+ von κ bezeichnen. Wegen $\kappa < \kappa^+$ folgt mit (5.247), dass $\kappa \prec \kappa^+$, also ist nach (5.108 S. 204) $\llbracket\kappa^+\rrbracket$ eine höhere Mengenstufe als $\llbracket\kappa\rrbracket$. ANGENOMMEN, $\llbracket\kappa^+\rrbracket$ ist nicht die (nach Korollar 5.20.23 S. 264 existierende) *unmittelbar* höhere Mengenstufe, so muss es eine Zwischenstufe $\mathfrak{Z}$ mit $\llbracket\kappa\rrbracket <_{Fr} \mathfrak{Z} <_{Fr} \llbracket\kappa^+\rrbracket$ geben; auf dieser liegt nach 5.30.6 S. 318 eine Kardinalzahl α, so dass $\mathfrak{Z} = \llbracket\alpha\rrbracket$. Also gilt $\llbracket\kappa\rrbracket <_{Fr} \llbracket\alpha\rrbracket <_{Fr} \llbracket\kappa^+\rrbracket$, und es folgt nach (5.108), dass $\kappa \prec \alpha \prec \kappa^+$, woraus nach (5.247) folgt $\kappa < \alpha < \kappa^+$ im Widerspruch dazu, dass κ^+ als kardinaler Nachfolger von κ die *kleinste* Kardinalzahl ist, die größer als κ ist. So war die ANNAHME falsch. □

Theorem 5.30.12 S. 321

Ist M eine Menge von Kardinalzahlen, so ist auch $\sup M (= \bigcup M)$ eine Kardinalzahl und

$$M^{\maltese} := \begin{cases} (\max M)^+ & \text{falls } \max M \text{ existiert} \\ \sup M & \text{falls } \max M \text{ nicht existiert} \end{cases}$$

ist die kleinste Kardinalzahl, die größer ist als alle Elemente von M.

Beweis (vgl. hierzu auch das analoge Theorem 5.14.7 S. 192 für Ordinalzahlen). $\bigcup M$ ist nach Theorem 5.14.4 S. 191 eine Ordinalzahl. Um zu zeigen, dass $\bigcup M$ eine Kardinalzahl ist, ist für jede Ordinalzahl α mit $\alpha < \bigcup M$ nachzuweisen, dass α nicht mit $\bigcup M$ gleichmächtig ist. Sei also $\alpha < \bigcup M$. Nach Definition der Relation $<$ ist dann $\alpha \in \bigcup M$, d. h. es gibt dann ein Element β von M, so dass $\alpha \in \beta$, d. h. $\alpha < \beta$ gilt. Weil nun β als Element von M eine Kardinalzahl ist, kann β nicht mit der kleineren Ordinalzahl α gleichmächtig sein: $\alpha \sim \beta$ ist also falsch. Andererseits folgt aus $\alpha < \beta$ nach (5.79 S. 192), dass $\alpha \subseteq \beta$, also nach (5.89 S. 200), dass $\alpha \precsim \beta$. Da $\alpha \sim \beta$ falsch ist, gilt insgesamt $\alpha \prec \beta$. Wegen $\beta \in M$ liegen nun alle Elemente von β in $\bigcup M$, d. h. es gilt $\beta \subseteq \bigcup M$, also gilt wegen (5.89), dass $\beta \precsim \bigcup M$, und insgesamt gilt nun $\alpha \prec \beta \precsim \bigcup M$, also $\alpha \prec \bigcup M$, also gilt *nicht* $\alpha \sim \bigcup M$. Somit ist gezeigt, dass $\bigcup M$ eine Kardinalzahl ist. Damit muss auch $M^{\maltese}$ eine solche sein: Denn entweder ist $M^{\maltese}$ identisch mit $(\max M)^+$ (also der kardinale Nachfolger der größten Kardinalzahl $\max M$ aus M, und somit jedenfalls eine Kardinalzahl) oder identisch mit $\sup M$, d. h. nach (5.81 S. 192) mit $\bigcup M$, was (wie wir gerade bewiesen haben) ebenfalls eine Kardinalzahl ist.

Nun ist noch zu zeigen, dass $M^{\maltese}$ (a) größer als jedes x aus M ist, und (b) die kleinste aller Kardinalzahlen ist, die größer als jedes x aus M sind.
Ist M leer, so hat M kein Maximum und so ist $M^{\maltese}$ als $\sup \emptyset$ definiert, also als $\bigcup \emptyset$, was $\emptyset$ ist, und es folgen (a) und (b) sofort aus dem Leerklassen-Lemma 5.9.3 S. 117. Sei nun M nichtleer.
Zu (a): Existiert ein Maximum von M, so gilt für jedes Element x von M, dass $x \leq \max M < (\max M)^+ = M^{\maltese}$, also $x < M^{\maltese}$. Existiert aber kein Maximum von M, so gibt es zu jedem Element x von M ein größeres Element y von M, und es gilt dann $x < y \leq \sup M = M^{\maltese}$, also wieder $x < M^{\maltese}$.
zu (b): Sei κ eine Kardinalzahl, die größer ist als alle Elemente von M. Existiert ein Maximum von M, so ist also $\max M < \kappa$, und da $(\max M)^+$ der *unmittelbare* kardinale Nachfolger von $\max M$ ist (also die *kleinste* Kardinalzahl, die größer ist als $\max M$), kann nicht $\kappa < (\max M)^+$ sein, also folgt $(\max M)^+ \leq \kappa$, das heißt wegen $M^{\maltese} = (\max M)^+$, dass $M^{\maltese} \leq \kappa$. Existiert aber kein Maximum von M, so ist $M^{\maltese}$ das Supremum, also die kleinste obere Schranke von M, und da κ zu den oberen Schranken von M gehört, folgt wider $M^{\maltese} \leq \kappa$. □

Theorem 5.30.15 S. 323

Sei A eine unbeschränkte Klasse von Ordinalzahlen. Dann ist ihre (gemäß Definition 5.30.14 S. 323 festgelegte) transfinite Aufzählung f ein Isomorphismus von $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ in $\langle A, < \rangle$.

Beweis. Zunächst zeigen wir für alle Ordinalzahlen β durch Sukzessor-Limes-Induktion: Für jede Ordinalzahl α gilt eine der beiden Alternativen «$\alpha < \beta$ ist falsch» oder $f(\alpha) < f(\beta)$.
Induktionsanfang. $\alpha < 0$ ist falsch.
Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: Die Behauptung gilt für ein β. Zu zeigen ist sie für $\beta + 1$. Sei also $\alpha < \beta + 1$ wahr (andernfalls sind wir fertig), dann folgt $\alpha \leq \beta$, also $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$. Im ersten Fall gilt nach Voraussetzung, dass $f(\alpha) < f(\beta)$, im zweiten gilt $f(\alpha) = f(\beta)$, in jedem Fall also $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Außerdem gilt nach Definition 5.30.14 S. 323, dass $f(\beta) < (A\text{-Nachfolger von } f(\beta)) = f(\beta + 1)$, somit insgesamt $f(\alpha) < f(\beta + 1)$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Für eine Limeszahl λ ist wahr, dass die Behauptung für jedes β gilt, das Element von (d. h. kleiner als) λ ist. Zu zeigen ist die Behauptung für λ. Sei also $\alpha < \lambda$ wahr (andernfalls sind wir fertig). Da λ Limeszahl ist, gibt es eine Ordinalzahl β mit $\alpha < \beta < \lambda$ (andernfalls wäre λ der unmittelbare Nachfolger von α, also keine Limeszahl). Nach Voraussetzung gilt also $f(\alpha) < f(\beta)$. Nun ist $f(\lambda)$ nach Definition 5.30.14 das kleinste Element von A, das größer ist als alle Elemente von $\mathtt{Wb}(f/\lambda)$. Demnach ist $f(\lambda)$ größer als alle $f(\xi)$ mit $\xi \in \lambda$ (d. h. mit $\xi < \lambda$). Da β ein solches ξ ist, folgt also $f(\beta) < f(\lambda)$ und insgesamt $f(\alpha) < f(\beta) < f(\lambda)$, also $f(\alpha) < f(\lambda)$. Damit ist der Induktionsbeweis beendet und es gilt:

Wenn $\alpha < \beta$, so $f(\alpha) < f(\beta)$. (7.65)

Natürlich gilt dann auch die Umkehrung: Wenn $f(\alpha) < f(\beta)$, so ist $\alpha < \beta$: Denn wäre $\beta < \alpha$, so wäre nach

dem gerade bewiesenen Sachverhalt $f(\beta) < f(\alpha)$ im Widerspruch zur Voraussetzung $f(\alpha) < f(\beta)$. Und wäre $\alpha = \beta$, so wäre $f(\alpha) = f(\beta)$, wieder im Widerspruch zu $f(\alpha) < f(\beta)$. Somit ist f ordnungserhaltend.
Außerdem ist f injektiv, denn wenn $\alpha \neq \beta$, ist $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$ und aus (7.65) folgt $f(\alpha) < f(\beta)$ oder $f(\beta) < f(\alpha)$, jedenfalls aber $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
Um zu verifizieren, dass f ein Isomorphismus von $\langle \mathtt{On}, < \rangle$ in $\langle A, < \rangle$ ist, bleibt also gemäß Definition 5.13.34 S. 187 nur noch zu zeigen, dass $f\colon \mathtt{On} \longrightarrow A$ surjektiv ist. Angenommen, f ist nicht surjektiv, so gibt es ein α aus A mit $\alpha \notin \mathtt{Wb}(f)$. Als Unterannahme sei außerdem vorausgesetzt, dass mindestens eine Ordinalzahl η, die größer als α ist, in $\mathtt{Wb}(f)$ liegt, so dass es also ein $\xi \in \mathtt{On}$ mit $f(\xi) = \eta$ gibt. Dann ist $\alpha < \eta = f(\xi)$, somit ist die Klasse $C := \{\xi \mid \xi \in \mathtt{On} \text{ und } \alpha < f(\xi)\}$ nichtleer und hat ein Minimum c_0.
Dieses Minimum c_0 ist von 0 verschieden, denn nach Definition von f ist $f(0) = \min A$, und wegen $\alpha \in A$ muss $\min A \leq \alpha$ sein, insgesamt also $f(0) \leq \alpha$, weshalb mit Blick auf die Definition von C geschlossen werden muss, dass $0 \notin C$. Andererseits ist c_0 als Minimum von C ein Element von C, und somit ist $0 \neq c_0$.
Das Minimum c_0 ist aber keine Sukzessorzahl: Wäre c_0 eine Sukzessorzahl $\beta + 1$, so wäre $f(c_0) = f(\beta + 1) =$ (A-Nachfolger von $f(\beta)$), wobei $\beta < \beta + 1 = c_0$, also β kleiner als das Minimum von C und darum $\beta \notin C$ wäre. Nach Definition von C bedeutet dies, dass $f(\beta) \leq \alpha$, und da α nach Annahme nicht zu $\mathtt{Wb}(f)$ gehört, wäre sogar $f(\beta) < \alpha$. Da der A-Nachfolger von $f(\beta)$ aber das *kleinste* Element von A oberhalb von $f(\beta)$ ist, folgt aus $f(\beta) < \alpha$, dass (A-Nachfolger von $f(\beta)$) $\leq \alpha$, das heißt $f(c_0) \leq \alpha$ im Widerspruch zu $c_0 \in C$.
Schließlich kann c_0 aber auch keine Limeszahl sein: Wäre c_0 eine Limeszahl, so wäre $f(c_0)$ nach Definition von f die *kleinste* Zahl aus A, die größer ist als alle $f(\xi)$ mit $\xi \in c_0$. Und da nun α eine Zahl aus A ist, die größer als alle $f(\xi)$ mit $\xi \in c_0$ ist (denn diese ξ sind als Elemente von c_0 ja kleiner c_0, das heißt kleiner als das Minimum von C und daher keine Elemente von C, so dass $f(\xi) \leq \alpha$ gilt; und da α nach Annahme nicht zu $\mathtt{Wb}(f)$ gehört, sogar $f(\xi) < \alpha$), wäre $f(c_0) \leq \alpha$ im Widerspruch zu $c_0 \in C$.
Da somit c_0 also weder 0, noch eine Sukzessor– oder Limeszahl ist, muss die Unterannahme falsch sein. Es folgt daher aus der Annahme, dass keine Ordinalzahl, die größer als α ist, in $\mathtt{Wb}(f)$ liegt. Da nach Annahme auch α nicht in $\mathtt{Wb}(f)$ liegt, müssen alle Werte von f kleiner als (und daher Element von) α sein, so dass $\mathtt{Wb}(f) \subseteq \alpha$ gilt. Da α eine Menge ist, ist nun $\mathtt{Wb}(f)$ per Teilmengenaxiom ebenfalls eine Menge. Aber dann ist f eine Bijektion von der Unmenge $\mathtt{On}$ in die Menge $\mathtt{Wb}(f)$, was wegen Theorem 5.12.10 S. 167 unmöglich ist. Daher war die Annahme falsch, und f ist surjektiv. □

Korollar 5.30.16 S. 323

Jede unbeschränkte Teilklasse A von Ordinalzahlen ist eine mit $\mathtt{On}$ gleichmächtige Unmenge. Ist außerdem f ihre transfinite Aufzählung, so gilt für jede Ordinalzahl α, dass $\alpha \leq f(\alpha)$ ist und dass genau $|\alpha|$ Elemente von A kleiner als $f(\alpha)$ sind.

Beweis. f ist als Isomorphismus eine Bijektion von $\mathtt{On}$ in A, also gilt $\mathtt{On} \sim A$. Da $\mathtt{On}$ eine Unmenge ist, muss nach dem Kriterium 5.12.10 S. 167 auch A eine solche sein.

Dass stets $\alpha \leq f(\alpha)$ gilt, folgt durch Sukzessor-Limes-Induktion:
Induktionsanfang. $0 \leq \min A = f(0)$.
Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: $\alpha \leq f(\alpha)$. Wegen $f(\alpha) <$ (A-Nachfolger von $f(\alpha)$) $= f(\alpha + 1)$ gilt $\alpha < f(\alpha + 1)$, also $\alpha + 1 \leq f(\alpha + 1)$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Für eine Limeszahl λ ist $\xi \leq f(\xi)$, wann immer ξ Element von (also kleiner als) λ ist. Angenommen, $f(\lambda) < \lambda$, so gibt es ein ξ mit $f(\lambda) < \xi < \lambda$ (sonst wäre λ Nachfolger von $f(\lambda)$). Aus $\xi < \lambda$ folgt nun einerseits nach Voraussetzung, dass $\xi \leq f(\xi)$ und somit $f(\lambda) < \xi \leq f(\xi)$, also $f(\lambda) < f(\xi)$. Im Widerspruch dazu folgt aus $\xi < \lambda$, weil f ordnungserhaltend ist, dass $f(\xi) < f(\lambda)$. Also war die Annahme falsch und es gilt $\lambda \leq f(\lambda)$, was den Induktionsbeweis abschließt.

Nun ist noch zu zeigen, dass die Menge $U := \{x \mid x \in A \text{ und } x < f(\alpha)\}$ die Mächtigkeit $|\alpha|$ hat, also $U \sim |\alpha|$ gilt. Da nach (5.245) $\alpha \sim |\alpha|$ gilt und $\sim$ transitiv ist, genügt es hierzu, $\alpha \sim U$ zu verifizieren. Da f Bijektion von $\mathtt{On}$ in A ist, ist f/α Bijektion von α in die Menge $M := \mathtt{Wb}(f/\alpha)$ aller $f(\xi)$ mit $\xi \in \alpha$ (d. h. mit $\xi < \alpha$). Es gilt daher $\alpha \sim M$.
Nun gilt aber $M = U$. Jedes Element m von M liegt nämlich in U: Denn m ist ein Wert von f und liegt somit in A, außerdem gilt $m = f(\xi)$ für ein ξ mit $\xi \in \alpha$, d. h. mit $\xi < \alpha$, und weil f ordnungserhaltend ist, folgt $f(\xi) < f(\alpha)$, also $m < f(\alpha)$. Umgekehrt liegt auch jedes Element u von U in M: Da f surjektiv ist und u in A liegt, gibt es ein ξ aus $\mathtt{On}$, so dass $u = f(\xi)$. Da u in U liegt, gilt $u < f(\alpha)$, also $f(\xi) < f(\alpha)$ und da f

ordnungserhaltend ist, folgt $\xi < \alpha$ Somit ist $f(\xi)$ $(= u)$ ein Element von M. Insgesamt ist also $M = U$, und so geht die bewiesene Aussage $\alpha \sim M$ in $\alpha \sim U$ über. □

Metatheorem 5.30.21 S. 325

Sei $\mathbb{G}$ ein paartreues Modell und bezeichne «M» und «κ» in $\mathbb{G}$ bzw. $\mathbb{D}$ jeweils dasselbe Objekt: und zwar «M» eine in $\mathbb{G}$ liegende Menge, für die auch $|M|$ in $\mathbb{G}$ liegt, und «κ» eine in $\mathbb{G}$ liegende Kardinalzahl, für die auch κ^+ in $\mathbb{G}$ liegt. Dann gilt:

Die «Kardinalzahlen» des Modells $\mathbb{G}$ sind die in $\mathbb{G}$ liegenden Kardinalzahlen. (7.66)

«$|M|$» bezeichnet im Modell $\mathbb{G}$ und im Standardmodell dasselbe Objekt. (7.67)

«κ^+» bezeichnet in den Modellen $\mathbb{G}$ und $\mathbb{D}$ dasselbe Objekt. (7.68)

Die «Sukzessor-Kardinalzahlen» bzw. «Limes-Kardinalzahlen» des Modells $\mathbb{G}$ sind die in $\mathbb{G}$ liegenden Sukzessor-Kardinalzahlen bzw. Limes-Kardinalzahlen. (7.69)

Beweis von (5.252). ξ ist nach Definition 5.30.1 eine «Kardinalzahl», wenn folgendes gilt: «ξ ist eine Ordinalzahl und es gibt keine Ordinalzahl α mit $\alpha < \xi$ (d. h. $\alpha \in \xi$) und $\alpha \sim \xi$». Das bedeutet im Modell $\mathbb{G}$ wegen (5.224 S. 309), (5.4 S. 116) und (5.237 S. 312):[36] ξ ist eine *in* $\mathbb{G}$ *liegende* Ordinalzahl, für die es keine *in* $\mathbb{G}$ *liegende* Ordinalzahl α gibt[37] mit $\alpha \in \xi$ und $\alpha \sim \xi$. Sei nun ξ eine Kardinalzahl im Modell $\mathbb{G}$, so ist ξ im Standardmodell eine Ordinalzahl mit $\xi \in \mathbb{G}$, zu der es keine *in* $\mathbb{G}$ *liegende* Ordinalzahl α gibt mit $\alpha \in \xi$ und $\alpha \sim \xi$. Da es aber auch keine außerhalb von $\mathbb{G}$ liegende Ordinalzahl α mit diesen Eigenschaften gibt (denn wenn $\alpha \in \xi$ gilt, muss α wegen $\alpha \in \xi \in \mathbb{G}$ per $\in$-Transitivität in $\mathbb{G}$ liegen), gibt es schlechthin keine Ordinalzahl α mit $\alpha \in \xi$ und $\alpha \sim \xi$, also ist ξ im Standardmodell eine Kardinalzahl mit $x \in \mathbb{G}$. Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass ξ im Standardmodell eine in $\mathbb{G}$ liegende Kardinalzahl ist, so ist ξ erst recht eine in $\mathbb{G}$ liegende Ordinalzahl, und es gibt überhaupt keine (erst recht keine in $\mathbb{G}$ liegende) Ordinalzahl α mit $\alpha \in \xi$ und $\alpha \sim \xi$. Also ist ξ im Modell $\mathbb{G}$ eine Kardinalzahl.

Beweis von (5.253). «$|M|$» bezeichnet nach Definition 5.30.3 «die mit M gleichmächtige Kardinalzahl». Sei diese im Standardmodell $= \mu$. Nach Voraussetzung liegen M und μ in $\mathbb{G}$, sind also nach (5.11 S. 116) im Modell $\mathbb{G}$ «Mengen», und beide sind nach Theorem 5.8.8 S. 110 (als Klassen, die $\mathbb{G}$-Objekte sind) im Standardmodell Teilklassen von $\mathbb{G}$. Nach (5.237 S. 312) bedeutet daher die Formel «$M \sim \mu$» in beiden Modellen dasselbe: Da sie im Standardmodell wahr ist, gilt sie auch in $\mathbb{G}$. Ferner ist μ im Standardmodell eine in $\mathbb{G}$ liegende Kardinalzahl, also nach (5.252) auch im Modell $\mathbb{G}$ eine Kardinalzahl.
Eine weitere Kardinalzahl des Modells $\mathbb{G}$ kann aber dort nicht mit M gleichmächtig sein: Ist nämlich ξ (in $\mathbb{G}$) eine Kardinalzahl, für die (in $\mathbb{G}$) $\xi \sim M$ gilt, so ist ξ im Standardmodell nach (5.252) eine Kardinalzahl und ein Element von $\mathbb{G}$, und wegen Theorem 5.8.8 S. 110 ist ξ ebenso wie M (als Klasse, die ein $\mathbb{G}$-Objekt ist) eine Teilklasse von $\mathbb{G}$. Gemäß (5.237) gilt also $\xi \sim M$ in beiden Modellen. Somit gilt im Standardmodell $\xi \sim M \sim \mu$, also $\xi \sim \mu$ und wegen (5.246 S. 318) $\xi = \mu$.
So ist μ (auch in $\mathbb{G}$) die einzige mit M gleichmächtige Kardinalzahl, kann also als «die mit M gleichmächtige Kardinalzahl» bezeichnet werden, d. h. «$|M|$» bezeichnet in $\mathbb{G}$ dasselbe Objekt μ wie im Standardmodell.

Beweis von (5.254). «κ^+» bezeichnet «das $<_{\mathtt{On}}$-Minimum von $\{\xi \mid \xi$ ist Kardinalzahl mit $\kappa < \xi\}$», was im Standardmodell eine Kardinalzahl ξ_0 ist, für welche $\kappa < \xi_0$ (d. h. $\kappa \in \xi_0$) gilt, so dass es keine Kardinalzahl ν mit $\kappa < \nu < \xi_0$ (d. h. $\kappa \in \nu \in \xi_0$) gibt. Nach Voraussetzung liegt ξ_0 in $\mathbb{G}$, ist also ein $\mathbb{G}$-Objekt, so dass nach (5.4 S. 116) das Element κ von ξ_0 auch in $\mathbb{G}$ ein Element von ξ_0 ist. Ferner ist ξ_0 (als eine in $\mathbb{G}$ liegende Kardinalzahl) nach (5.252) auch in $\mathbb{G}$ eine Kardinalzahl.

---

[36] Zur Anwendung (5.4) beachte, dass ξ im Modell $\mathbb{G}$ ein $\mathbb{G}$-Objekt bezeichnet: Daher hat «$\alpha \in \xi$» wegen (5.4) in beiden Modellen dieselbe Bedeutung. Zur Anwendung von (5.237) aber ist zu beachten, dass ξ wegen Theorem (5.8.8 S. 110) (als Klasse, die Element des $\mathbb{G}$-Objekts $\mathbb{G}$ ist) eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist, und dass dann wieder nach Theorem 5.8.8 das Element α von ξ (als Klasse, die Element des $\mathbb{G}$-Objekts ξ ist) ebenfalls eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ ist: Daher hat «$\alpha \sim \xi$» nach (5.237) in beiden Modellen dieselbe Bedeutung.

[37] Eigentlich müsste es heißen: «keine in $\mathbb{G}$ liegende Ordinalzahl α, *die ein* $\mathbb{G}$*-Objekt ist*», weil der Objektbereich der Variablen α der Bereich der $\mathbb{G}$-Objekte ist; wir können diesen Zusatz aber weglassen, da in $\mathbb{G}$ liegende Ordinalzahlen ohnehin $\mathbb{G}$-Objekte sind.

Nun kann es auch im Modell $\mathbb{G}$ keine Kardinalzahl η mit $\kappa \in \eta \in \xi_0$ geben: ANGENOMMEN, η ist in $\mathbb{G}$ eine solche Kardinalzahl, so ist η nach (5.252) im Standardmodell eine Kardinalzahl, die Element von $\mathbb{G}$ (insbesondere ebenso wie ξ_0 ein $\mathbb{G}$-Objekt) ist, so dass nach (5.4) die Beziehung $\kappa \in \eta \in \xi_0$ auch im Standardmodell gültig ist, was falsch ist. Also ist ξ_0 auch in $\mathbb{G}$ «das $<_{\mathtt{On}}$-Minimum von $\{\xi \mid \xi$ ist Kardinalzahl mit $\kappa < \xi\}$»,[38] so dass «κ^+» auch in $\mathbb{G}$ eine Bezeichnung für ξ ist.

Beweis von (5.255). Sei ξ in $\mathbb{G}$ eine «Sukzessor-Kardinalzahl», so gibt es im Modell $\mathbb{G}$ eine «Kardinalzahl» ν, so dass dort «$\nu^+ = \xi$» gilt. Im Standardmodell sind dann ξ und ν nach (5.252) Elemente von $\mathbb{G}$ und ebenfalls Kardinalzahlen, und nach (5.254) bezeichnet «ν^+» in beiden Modellen dasselbe Objekt. Also gilt «$\nu^+ = \xi$» auch im Standardmodell, so dass ξ auch hier eine Sukzessor-Kardinalzahl ist. Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass ξ im Standardmodell eine in $\mathbb{G}$ liegende Sukzessor-Kardinalzahl ist. Dann gibt es eine Kardinalzahl ν mit $\nu^+ = \xi$. Daraus folgt $\nu < \xi$, also $\nu \in \xi$, also $\nu \in \xi \in \mathbb{G}$, also $\nu \in \mathbb{G}$ per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$. So sind ξ und ν in $\mathbb{G}$ liegende Kardinalzahlen, also auch im Modell $\mathbb{G}$ «Kardinalzahlen», und wegen $\nu \in \mathbb{G}$ bezeichnet nach (5.254) «ν^+» in beiden Modellen dasselbe Objekt. Also gilt «$\nu^+ = \xi$» auch im Modell $\mathbb{G}$, so dass ξ auch dort eine «Sukzessor-Kardinalzahl» ist.
Weiter ist ξ genau dann im Standardmodell eine in $\mathbb{G}$ liegende «Limes-Kardinalzahl», wenn ξ in $\mathbb{G}$ liegt, Kardinalzahl ist, keine Sukzessor-Kardinalzahl und $\neq 0$ (d. h $\neq \emptyset$) ist. Das gilt (wegen 5.6 S. 116 und dem schon bewiesenen Teil der Behauptung) genau dann, wenn ξ in $\mathbb{G}$ Kardinalzahl, keine Sukzessor-Kardinalzahl und $\neq \emptyset$ ist. Und dies gilt schließlich genau dann, wenn ξ in $\mathbb{G}$ eine «Limes-Kardinalzahl» ist. □

Theorem 5.30.23 S. 326

Sei A eine unbeschränkte Klasse von Kardinalzahlen und $\kappa \in A$. Dann gilt:
$\kappa \in \mathtt{Cr}(A) \;\leftrightarrow\;$ es gibt genau κ Elemente von A, die kleiner als κ sind.

Beweis. Sei f die transfinite Aufzählung von A und κ kritisch, also $f(\kappa) = \kappa$. Nach Korollar 5.30.16 S. 323 gibt es genau $|\kappa|$ Elemente von A, die kleiner als $f(\kappa)$ sind. Da κ Kardinalzahl ist, können wir gemäß (5.245 S. 318) in dieser Aussage $|\kappa|$ durch κ ersetzen. Da κ kritisch ist, können wir außerdem $f(\kappa)$ durch κ ersetzen und erhalten: Es gibt genau κ Elemente von A, die kleiner als κ sind.
Sei umgekehrt VORAUSGESETZT, dass κ *nicht* kritisch ist. Wegen $\kappa \in A$ gibt es per Surjektivität von f eine Ordinalzahl α, so dass $f(\alpha) = \kappa$. Dann folgt $\alpha < \kappa$: Denn aus $\kappa < \alpha$ würde mit $\alpha \leq f(\alpha)$ (was nach 5.30.16 gilt) $\kappa < f(\alpha)$ folgen, im Widerspruch zu $f(\alpha) = \kappa$, und aus $\kappa = \alpha$ würde mit $f(\alpha) = \kappa$ folgen, dass $f(\kappa) = \kappa$ gilt im Widerspruch zur VORAUSSETZUNG, dass κ nicht kritisch ist. So ist $\alpha < \kappa$, und da wegen (5.250 S. 320) $|\alpha| \leq \alpha$ ist, folgt $|\alpha| < \kappa$. Nach Korollar 5.30.16 gibt es nun genau $|\alpha|$ Elemente von A, die kleiner als $f(\alpha)(= \kappa)$ sind. Wegen $|\alpha| < \kappa$ ist aber $|\alpha| \neq \kappa$, so dass *nicht* κ Elemente von A kleiner als κ sind. □

Theorem 5.30.24 S. 326

Ist A eine unbeschränkte und abgeschlossene Klasse von Ordinalzahlen, so ist die Klasse $\mathtt{Cr}(A)$ der kritischen Zahlen von A eine unbeschränkte und abgeschlossene Unmenge.

Beweis. Zu zeigen ist nur die Unbeschränktheit und die Abgeschlossenheit von $\mathtt{Cr}(A)$, denn dass $\mathtt{Cr}(A)$ eine Unmenge ist, ergibt sich dann aus Korollar 5.30.16 S. 323. Zum **Beweis der Unbeschränktheit** von $\mathtt{Cr}(A)$ ist zu zeigen, dass es zu jedem α aus $\mathtt{On}$ eine kritische Zahl κ aus A größer als α gibt, also eine Ordinalzahl κ oberhalb von α mit $f(\kappa) = \kappa$, wobei f die transfinite Aufzählung von A ist. Wir betrachten zwei Fälle.

[38] Man beachte, dass «$<_{\mathtt{On}}$» (siehe Definition 5.14.5 S. 191) in $\mathbb{G}$ die «Relation» (d. h. nach (5.232 S. 312) im Standardmodell: die Teilklasse von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$) bezeichnet, die jede dortige «Ordinalzahl» α (d. h. wegen (5.224 S. 309) im Standardmodell: jedes Element α von $\mathtt{On} \cap \mathbb{G}$) auf eine dortige Ordinalzahl β genau dann ausrichtet, wenn (im Modell $\mathbb{G}$, also wegen 5.4 auch im Standardmodell) $\alpha \in \beta$ gilt. Wegen (5.4) ist nun diese Relation in $\mathbb{G}$ ebenso wie im Standardmodell irreflexiv, transitiv und linear, also eine Vollordnung. Mithin kann man in $\mathbb{G}$ vom «$<_{\mathtt{On}}$-Minimum» einer «Klasse von Kardinalzahlen» (die ja spezielle «Ordinalzahlen» sind) sprechen, und wenn es ein Minimum gibt, ist es nach Theorem (5.13.5) eindeutig bestimmt. Unsere obigen Überlegungen zeigen daher, dass ξ_0 «das $<_{\mathtt{On}}$-Minimum» der Klasse «$\{\xi \mid \xi$ ist Kardinalzahl mit $\kappa < \xi\}$» (das ist hier die Klasse aller $\mathbb{G}$-Individuen, die Kardinalzahlen größer als ξ sind) ist (ξ_0 ist ja Element von $\mathbb{G}$, also ein $\mathbb{G}$-Individuum).

Fall 1: $\alpha + 1 = f(\alpha + 1)$. Dann sind wir fertig, weil $\alpha + 1$ ein κ ist, wie wir es suchen.

Fall 2: $\alpha + 1 \neq f(\alpha + 1)$. Dann gilt wegen Korollar 5.30.16 S. 323

$$\alpha + 1 < f(\alpha + 1). \tag{7.70}$$

Wir definieren nun mittels vollständiger Rekursion eine Funktion $z\colon \omega \longrightarrow \mathtt{On}$ durch

$$z(0) := \alpha + 1, \tag{7.71}$$

$$z(n+1) := f(z(n)) \text{ für alle } n \text{ aus } \omega \tag{7.72}$$

Vollständige Induktion zeigt, dass $z(n) < z(n+1)$ für alle Zahlen n aus ω gilt: (7.73)

Induktionsanfang. $z(0) \underset{7.71}{=} \alpha + 1 \underset{(7.70)}{<} f(\alpha + 1) \underset{(7.71):\alpha+1=z(0)}{=} f(z(0)) \underset{(7.72)(n=0)}{=} z(0+1)$.

Induktionsschluss. Voraussetzung: $z(n) < z(n+1)$. Da f als Isomorphismus ordnungserhaltend ist, gilt $f(z(n)) < f(z(n+1))$. In dieser Ungleichung dürfen wir wegen $z(n+1) \underset{(7.72)}{=} f(z(n))$ und $z((n+1)+1) \underset{(7.72)}{=} f(z(n+1))$ die linke Seite durch $z(n+1)$ und die rechte durch $z((n+1)+1)$ ersetzen und erhalten $z(n+1) < z((n+1)+1)$, was den Induktionsbeweis abschließt.

Sei nun κ die Ordinalzahl $\sup \mathtt{Wb}(z)$. Dieses κ ist eine Zahl, wie wir sie suchen: Zunächst ist κ größer als α (denn $\alpha < \alpha + 1 = z(0) \leq \sup \mathtt{Wb}(z) = \kappa$), und so bleibt zu zeigen, dass κ eine kritische Zahl ist. Nun ist κ zunächst eine Limeszahl: Denn κ ist von 0 verschieden (wegen $0 \leq \alpha < \kappa$) und auch keine Sukzessorzahl. Wann immer nämlich $\chi < \kappa$ ist, muss es ein Element von $\mathtt{Wb}(z)$ geben, das größer als χ ist (andernfalls wäre χ eine obere Schranke der Menge $\mathtt{Wb}(z)$, die kleiner als deren Supremum κ ist):

Für jede Ordinalzahl χ mit $\chi < \kappa$ gibt es ein $z(n)$, so dass $\chi < z(n)$. (7.74)

Daraus folgt $\chi + 1 \leq z(n)$, und wegen (7.73) gilt weiter $z(n) < z(n+1)$, und $z(n+1)$ ist natürlich $\leq \sup \mathtt{Wb}(z) = \kappa$. Insgesamt gilt also $\chi + 1 < \kappa$, wobei χ eine beliebige Ordinalzahl mit $\chi < \kappa$ war. Wäre nun aber κ eine Sukzessorzahl, müsste κ Nachfolger eines χ mit $\chi < \kappa$ sein, und so wäre $\chi + 1 = \kappa$ im Widerspruch zu $\chi + 1 < \kappa$. So ist κ also eine Limeszahl.
Wegen Korollar 5.30.16 S. 323 gilt nun $\kappa \leq f(\kappa)$. Wenn wir noch zeigen, dass *nicht* $f(\kappa) < \kappa$ gilt, muss Gleichheit gelten, und κ ist kritisch. Angenommen, es ist $\kappa < f(\kappa)$. Da A abgeschlossen und κ Limeszahl ist, gilt nach (5.251 S. 324), dass $f(\kappa)$ das Supremum der Menge $\mathtt{Wb}(f/\kappa)$ ist. Da wir κ als $\sup \mathtt{Wb}(z)$ definiert hatten, lässt sich die Annahme $\kappa < f(\kappa)$ schreiben als $\sup \mathtt{Wb}(z) < \sup \mathtt{Wb}(f/\kappa)$, also ist $\sup \mathtt{Wb}(z)$ kleiner als die kleinste obere Schranke von $\mathtt{Wb}(f/\kappa)$, also selbst *keine* obere Schranke von $\mathtt{Wb}(f/\kappa)$. Infolgedessen gibt es ein Element von $\mathtt{Wb}(f/\kappa)$ (also ein $f(\chi)$ mit $\chi \in \kappa$, d. h. mit $\chi < \kappa$), das größer als $\sup \mathtt{Wb}(z)$ ist: $f(\chi) > \sup \mathtt{Wb}(z)$. Weiter folgt mittels (7.74) aus $\chi < \kappa$, dass es ein $z(n)$ gibt, so dass $\chi < z(n)$. Da f als Isomorphismus ordnungserhaltend ist, folgt $f(\chi) < f(z(n))$, wobei nach Definition von z gilt: $f(z(n)) = z(n+1)$. Es ist also $z(n+1)$ ein Element von $\mathtt{Wb}(z)$, das größer als $f(\chi)$ ist. Nun war aber $f(\chi)$ selbst größer als $\sup \mathtt{Wb}(z)$, und so ist $z(n+1)$ schließlich ein Element von $\mathtt{Wb}(z)$, das größer ist als die obere Schranke $\sup \mathtt{Wb}(z)$ dieser Menge: ein Widerspruch. Also war die Annahme falsch, und κ ist eine kritische Zahl. Wie oben schon festgestellt wurde, ist dieses κ außerdem größer als vorgegebene α. Für den Beweis eines späteren Theorems (Theorem 5.31.2 S. 327) halten wir fest, dass κ sogar die *kleinste* kritische Zahl ist, die größer als α ist.[39]

Beweis der Abgeschlossenheit von $\mathtt{Cr}(A)$. Sei T eine nichtleere Teilmenge von $\mathtt{Cr}(A)$. Zu zeigen ist, dass auch $\sup T \in \mathtt{Cr}(A)$, also $\sup T$ eine kritische Zahl von A ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

---

[39] Beweis: Angenommen, es gibt eine kritische Zahl β mit $\alpha < \beta < \kappa$. Dann gibt es ein n aus ω mit $\beta < z(n)$ (andernfalls wäre β obere Schranke von $\mathtt{Wb}(z)$, die kleiner wäre als die kleinste obere Schranke κ, was absurd ist). Die Menge $M := \{n \mid n \in \omega \text{ und } \beta < z(n)\}$ ist also nicht leer und hat daher ein Minimum m. Dieses ist nicht 0 (sonst wäre $0 \in M$, also $\beta < z(0)$, wobei $z(0)$ nach Definition $= \alpha + 1$ ist; es wäre also $\beta < \alpha + 1$, und wegen $\alpha < \beta$ läge dann β zwischen der Ordinalzahl α und ihrem unmittelbaren Nachfolger $\alpha + 1$, was nicht geht). Also ist das Minimum m von M Nachfolger einer natürlichen Zahl ℓ, so dass $m = \ell + 1$. Da ℓ kleiner als das Minimum m von M ist, ist $\ell \notin M$, so dass $z(\ell) \leq \beta$, woraus folgt $f(z(\ell)) \leq f(\beta)$, weil f als Isomorphismus ordnungserhaltend ist. Da β nun kritisch ist, folgt weiter $f(\beta) = \beta$; somit ist $f(z(\ell)) \leq \beta$. Nach Definition von z ist aber $f(z(\ell)) = z(\ell + 1)$, was $= z(m)$ ist (wegen $\ell + 1 = m$). Also folgt schließlich $z(m) \leq \beta$, woraus nach Definition von M folgt $m \notin M$, aber als Minimum von M ist andererseits $m \in M$. Somit war die Annahme falsch, und κ ist die kleinste kritische Zahl, die größer als α ist.

Fall 1. $\sup T \in T$. Dann folgt wegen $T \subseteq \mathtt{Cr}(A)$ sofort $\sup T \in \mathtt{Cr}(A)$ und wir sind fertig.

Fall 2. $\sup T \notin T$. Dann ist $\sup T$ ein Limeszahl: Angenommen nämlich, $\sup T$ ist Nachfolger eines τ, also $\sup T = \tau + 1$. Dann ist $\tau < \sup T$ und es gibt ein ξ aus T mit $\tau < \xi$ (sonst wäre τ eine obere Schranke der Menge T, die kleiner als die kleinste obere Schranke $\sup T$ dieser Menge wäre). Dieses Element ξ von T ist natürlich nicht größer als das Supremum von T, aber kann auch nicht mit $\sup T$ identisch sein (sonst wäre $\sup T = \xi \in T$, also $\sup T \in T$, was im hier behandelten Fall 2 falsch ist), ist also kleiner als $\sup T$. So gilt insgesamt $\tau < \xi < \sup T$, also $\tau + 1 \leq \xi < \sup T$, also $\tau + 1 < \sup T$, das heißt $\sup T < \sup T$. Also war die Annahme falsch, und $\sup T$ ist keine Sukzessorzahl.
Auch ist $\sup T \neq 0$ (wäre $\sup T = 0$, so könnte die nichtleeren Klasse T kein anderes Element als 0 haben, und so wäre 0, d. h. $\sup T$, ein Element von T, was im hier behandelten Fall 2 falsch ist). Da also $\sup T$ weder 0 noch eine Sukzessorzahl ist, ist $\sup T$ eine Limeszahl.
Es gilt also per Definition 5.30.14 S. 323, dass $f(\sup T) = (A\text{-Nachfolger von } \mathtt{Wb}(f/\sup T))$, das heißt $f(\sup T)$ ist das kleinste Element von A, die größer als alle $f(\chi)$ für χ aus $\sup T$ ist. Nun zeigt sich, dass dieses Element $\sup T$ selbst ist: da $\sup T$ wegen der Abgeschlossenheit von A in A liegt, sind hierzu nur noch zwei Aussagen nachzuweisen: (1) $\sup T$ ist größer als alle $f(\chi)$ mit $\chi \in \sup T$ und (2) es gibt in A keine kleinere Zahl φ als $\sup T$, die größer als alle $f(\chi)$ mit $\chi \in \sup T$ ist, anders gesagt: Zu jedem φ aus A mit $\varphi < \sup T$ muss es ein χ aus $\sup T$ geben, so dass $\varphi \leq f(\chi)$.
Zu (1). $\sup T$ ist größer als alle $f(\chi)$ mit $\chi \in \sup T$. Ist nämlich $\chi \in \sup T$, also $\chi < \sup T$, so gibt es ein ψ aus T mit $\chi < \psi$ (sonst wäre χ eine obere Schranke von T, die kleiner ist als die kleinste obere Schranke $\sup T$ von T). Nun kann das Element ψ von T nicht größer als das Supremum von T sein, also gilt $\chi < \psi \leq \sup T$. Da nun ψ Element der Teilmenge T von $\mathtt{Cr}(A)$ ist, ist ψ eine kritische Zahl von A, so dass $f(\psi) = \psi$. Da f als Isomorphismus ordnungserhaltend ist, folgt aus $\chi < \psi$, dass $f(\chi) < f(\psi)$. Es gilt also insgesamt $f(\chi) < f(\psi) = \psi \leq \sup T$, so dass $f(\chi) < \sup T$.
Zu (2). Zu jedem φ aus A mit $\varphi < \sup T$ gibt es ein χ aus $\sup T$ so dass $\varphi \leq f(\chi)$. Ein solches χ ist nämlich φ selbst: Wegen $\varphi < \sup T$ ist φ Element von $\sup T$ und es gilt $\varphi \leq f(\varphi)$ wegen Korollar 5.30.16 S. 323.
Damit hat sich gezeigt, dass $f(\sup T) = \sup T$ ist, d. h. $\sup T$ ist eine kritische Zahl von A. □

Theorem 5.31.2 S. 327

Jedes schwach unerreichbare υ ist eine kritische Zahl (mit $\upsilon = \aleph_\upsilon$).
Außerdem liegen unendlich viele kritische Kardinalzahlen κ (mit $\kappa = \aleph_\kappa$) noch unterhalb von υ.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass υ eine kritische Kardinalzahl ist. Wegen 5.31.1 S. 327(a) ist υ eine Limes-Kardinalzahl, die größer als $\aleph_0$ ist. Daraus folgt, dass ihr Index eine Limeszahl sein muss: Wäre der Index eine Sukzessorzahl, so wäre υ wegen Theorem 5.30.20 S. 325 eine Sukzessor-Kardinalzahl, also keine Limes-Kardinalzahl (vgl. 5.30.19 S. 325); und wäre er 0, so wäre $\upsilon = \aleph_0$, was beides falsch ist.
Da also υ eine Limes-Kardinalzahl ist, gilt $\upsilon = \aleph_\lambda$ mit einer Limeszahl λ, und es ist zu zeigen, dass $\lambda = \upsilon$. Nun gilt gemäß Theorem 5.30.25 S. 326, dass $\lambda \leq \aleph_\lambda$, d. h. $\lambda \leq \upsilon$, und wir müssen nur noch die Annahme widerlegen, dass $\lambda < \upsilon$ ist, dann folgt $\lambda = \upsilon$ und υ ist kritisch.
Sei also angenommen, dass $\lambda < \upsilon$ ist. Nun gilt nach Definition 5.30.17 S. 324 der Aleph-Funktion, dass $\aleph_\lambda = \sup \mathtt{Wb}(\aleph/\lambda)$, das heißt wegen 5.14.4 S. 191, dass $\aleph_\lambda = \bigcup \mathtt{Wb}(\aleph/\lambda)$. So ist υ bzw. $\aleph_\lambda$ die Vereinigung über die Klasse $\mathtt{Wb}(\aleph/\lambda)$ aller Werte $\aleph_\chi$ der Aleph-Funktion für χ aus λ. Diese Klasse hat genau λ Mengen als Elemente, denn die Einschränkung der Bijektion $\aleph$ auf λ ist eine Bijektion von λ in $\mathtt{Wb}(\aleph/\lambda)$, also gilt $\lambda \sim \mathtt{Wb}(\aleph/\lambda)$, d. h. λ ist die Mächtigkeit von $\mathtt{Wb}(\aleph/\lambda)$. Jede dieser Mengen $\aleph_\chi$ ist eine Kardinalzahl, für deren Index χ gilt, dass $\chi \in \lambda$, d. h. $\chi < \lambda$. Da nun die Aleph-Funktion ordnungserhaltend ist, folgt $\aleph_\chi < \aleph_\lambda$, d. h. $\aleph_\chi < \upsilon$, also wegen (5.247 S. 318) $|\aleph_\chi| < |\upsilon|$, und da nach (5.245 S. 318) $|\upsilon| = \upsilon$ ist, gilt schließlich $|\aleph_\chi| < \upsilon$. Somit ist υ bzw. $\bigcup \mathtt{Wb}(\aleph/\lambda)$ eine Vereinigung von λ Mengen, deren Mächtigkeiten alle kleiner als υ sind. Da nun nach unserer Annahme $\lambda < \upsilon$ ist, ist somit υ eine Vereinigung von *weniger als* υ Mengen, deren Mächtigkeiten kleiner υ sind, und so folgt mit 5.31.1 S. 327(b), dass $|\upsilon| < \upsilon$ ist, im Widerspruch dazu, dass nach (5.245 S. 318) gilt $|\upsilon| = \upsilon$. Mithin war die Annahme falsch und υ ist eine kritische Kardinalzahl.
Nun ist noch zu zeigen, dass es unendlich viele kritische Kardinalzahlen gibt, die kleiner als υ sind. Hierzu stellen wir zunächst ein Lemma auf:

Lemma: *Zu jeder Ordinalzahl α gibt es mindestens eine kritische Kardinalzahl, die größer als α ist, und die kleinste dieser oberhalb von α liegenden kritischen Kardinalzahlen ist nicht schwach unerreichbar.*

Zum Beweis dieses Lemmas betrachten wir nochmals den Beweis von Theorem 5.30.24, und zwar den mit „Beweis der Unbeschränktheit“ überschriebenen Beweisteil (S. 472–473). Dort wurde gezeigt, dass «zu jedem α aus $\mathtt{On}$ eine kritische Zahl aus A existiert, die größer als α ist», wobei A eine beliebige unbeschränkte und abgeschlossene Klasse von Ordinalzahlen war. Für A können wir also in jenem Beweisteil $\mathtt{Cn}_\infty$ einsetzen, und für die transfinite Aufzählung f von A die Aleph-Funktion. Da nun $\alpha + 1 \neq \aleph_{\alpha+1}$ ist (andernfalls wäre die Sukzessorzahl $\alpha + 1$ ein Aleph, d. h. eine unendliche Kardinalzahl, im Widerspruch zu (5.243 S. 317)). Also gilt in jenem Beweisteil der „Fall 2“ (S. 473). Für diesen Fall haben wir rekursiv eine Funktion $z\colon \omega \longrightarrow \mathtt{On}$ definiert und nachgewiesen, dass $\kappa := \sup \mathtt{Wb}(z)$ die kleinste kritische Zahl ist, die größer als α ist (siehe S. 473 mit Fußnote 39). Nun zeigen wir, dass dieses κ *keine* schwach unerreichbare Zahl ist. κ bzw. $\sup \mathtt{Wb}(z)$ ist nämlich nach 5.14.4 S. 191 die Menge $\bigcup \mathtt{Wb}(z)$, also die Vereinigung aller Ordinalzahlen $z(n)$ für n aus ω. Die hier vereinigten Ordinalzahlen $z(n)$ sind alle kleiner als κ, (denn nach 7.73 S. 473 gilt $z(n) < z(n+1)$ und $z(n+1)$ ist kleiner als das Supremum $\kappa = \sup \mathtt{Wb}(z)$ aller Werte von z, also ist $z(n) < \kappa$) und mit (5.250 S. 320) folgt $|z(n)| \leq z(n) < \kappa$. Ferner gilt nach (5.249 S. 318), dass $|\mathtt{Wb}(z)| \leq |\mathtt{Db}(z)|$, wegen $\mathtt{Db}(z) = \omega$ gilt $|\mathtt{Db}(z)| = |\omega| = \omega$ (beachte hierbei, dass ω eine Kardinalzahl ist und 5.245 S. 318 gilt), und schließlich ist $\omega < \kappa$ (es ist $\omega = \aleph_0$ und nach 5.256 S. 326 ist $\aleph_0$ kleiner als κ), also ist insgesamt $|\mathtt{Wb}(z)| < \kappa$, d. h. es sind weniger als κ Mengen, die hier vereinigt werden. Wäre also κ schwach unerreichbar, so müsste nach Definition 5.31.1 S. 327(b) gelten, dass $|\bigcup \mathtt{Wb}(z)| < \kappa$ ist, das hieße wegen $\bigcup \mathtt{Wb}(z) = \kappa$, dass $|\kappa| < \kappa$ wäre, wohingegen nach (5.245 S. 318) für die Kardinalzahl κ gelten muss, dass $|\kappa| = \kappa$. Also ist κ *nicht* schwach unerreichbar. Damit ist das Lemma bewiesen.

Aus dem Lemma folgt nun zunächst, dass die kleinste kritische Zahl überhaupt, die wegen (5.256 S. 326) *die kleinste kritische Zahl ist, die größer als* $\aleph_0$ *ist*, nicht schwach unerreichbar sein kann. Also ist unser schwach unerreichbares υ eine kritische Kardinalzahl, die *nicht* mit der kleinsten kritischen Kardinalzahl θ^* identisch ist, d. h. es muss $\theta^* < \upsilon$ gelten. So haben wir aber zumindest *eine* kritische Kardinalzahl θ^* gefunden, die kleiner als υ ist, so dass die Klasse C aller kritischen Kardinalzahlen, die kleiner als υ sind, nichtleer ist. Zu zeigen bleibt nun noch, dass C unendlich ist. Angenommen, C ist endlich, so hat C wegen (5.139 S. 243) ein Maximum κ. Dieses ist dann die größte kritische Zahl unterhalb von υ. Das bedeutet aber, dass das schwach unerreichbare υ die *kleinste* kritische Zahl oberhalb von κ ist im Widerspruch zum Lemma, wonach die kleinste kritische Zahl oberhalb einer Ordinalzahl niemals schwach unerreichbar ist. Also war die Annahme falsch und C ist unendlich. □

Theorem 5.31.3 S. 327

Ist $\alpha < \upsilon$ für eine unerreichbare Kardinalzahl υ, so gilt $|\mathbb{V}_\alpha| < \upsilon$. Außerdem ist $|\mathbb{V}_\upsilon| = \upsilon$.

Beweis. Durch Sukzessor-Limes-Induktion zeigt sich für alle Ordinalzahlen α, dass $\alpha \geq \upsilon$ oder $|\mathbb{V}_\alpha| < \upsilon$ gilt (also folgt aus $\alpha < \upsilon$ stets $|\mathbb{V}_\alpha| < \upsilon$, was wir zeigen wollen).
Induktionsanfang. Es ist $|\mathbb{V}_0| < \upsilon$, denn nach (5.190 S. 305) ist $\mathbb{V}_0 = \emptyset$, also $|\mathbb{V}_0| = |\emptyset| = 0 < \upsilon$.
Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: $\alpha \geq \upsilon$ oder $|\mathbb{V}_\alpha| < \upsilon$. Wenn $\alpha \geq \upsilon$, ist erst recht $\alpha + 1 \geq \upsilon$ und wir sind fertig. Sei also $|\mathbb{V}_\alpha| < \upsilon$. Da υ unerreichbar ist, folgt daraus $|\mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)| < \upsilon$. Nach (5.191 S. 305) ist aber $\mathbb{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)$ und daher $|\mathbb{V}_{\alpha+1}| = |\mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)| < \upsilon$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Für eine Limeszahl λ gilt für jedes χ, das kleiner als (also Element von) λ ist, dass jeweils $\chi \geq \upsilon$ oder $|\mathbb{V}_\chi| < \upsilon$. Zu zeigen ist $\lambda \geq \upsilon$ oder $|\mathbb{V}_\lambda| < \upsilon$. Wenn $\lambda \geq \upsilon$, sind wir also fertig. Sei also im Folgenden $\lambda < \upsilon$. Nun gibt es nach Voraussetzung zwei Möglichkeiten. Entweder es gilt für mindestens ein χ mit $\chi < \lambda$, dass $\chi \geq \upsilon$: Dann gilt wegen $\lambda > \chi$ erst recht $\lambda \geq \upsilon$ und wir sind fertig. Oder es gilt für alle χ mit $\chi < \lambda$, dass $|\mathbb{V}_\chi| < \upsilon$. Dann ist aber $\bigcup_{\chi\in\lambda} \mathbb{V}_\chi$ eine Vereinigung von λ (also weniger als υ) Mengen der Mächtigkeit $< \upsilon$. Da υ unerreichbar ist, gilt also $|\bigcup_{\chi\in\lambda} \mathbb{V}_\chi| < \upsilon$. Nach (5.192 S. 305) ist aber $\mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\chi\in\lambda} \mathbb{V}_\chi$, also folgt $|\mathbb{V}_\lambda| = |\bigcup_{\chi\in\lambda} \mathbb{V}_\lambda| < \upsilon$.
Nun ist noch $|\mathbb{V}_\upsilon| = \upsilon$ zu zeigen. Es ist $\langle \alpha \in \upsilon \mapsto \mathbb{V}_\alpha \rangle$ eine Klassenfamilie mit $\upsilon \precsim \upsilon$ und $\mathbb{V}_\alpha \precsim \upsilon$ für alle α aus υ (für α aus υ gilt $\alpha < \upsilon$ und daraus folgt, wie eben bewiesen, $|\mathbb{V}_\alpha| < \upsilon$, d. h. nach 5.245 S. 318 $|\mathbb{V}_\alpha| < |\upsilon|$, erst recht $|\mathbb{V}_\alpha| \leq |\upsilon|$ und also nach 5.248 S. 318 $\mathbb{V}_\alpha \precsim \upsilon$), also folgt aus Theorem 5.20.15 S. 261, dass $\bigcup_{\alpha\in\upsilon} \mathbb{V}_\alpha \precsim \upsilon$, wobei $\bigcup_{\alpha\in\upsilon} \mathbb{V}_\alpha$ mit $\mathbb{V}_\upsilon$ identisch ist (siehe Definition 5.192 S. 305 und beachte, dass υ als Kardinalzahl nach 5.244 S. 317 eine Limeszahl ist). Somit folgt $\mathbb{V}_\upsilon \precsim \upsilon$. Andererseits gilt nach (5.200 S. 305), dass $\upsilon \subseteq \mathbb{V}_\upsilon$, also nach (5.89 S. 200) $\upsilon \precsim \mathbb{V}_\upsilon$. Insgesamt folgt also mittels Theorem 5.15.5 S. 201, dass $\mathbb{V}_\upsilon \sim \upsilon$, d. h. $|\mathbb{V}_\upsilon| = \upsilon$. □

Theorem 5.31.5 S. 329

Für Universen $\mathfrak{U}$ gilt:

Alle Teilklassen von Elementen von $\mathfrak{U}$ sind Elemente von $\mathfrak{U}$. (5.263)

ω und alle natürlichen Zahlen sind Elemente von $\mathfrak{U}$. Insbesondere ist $\emptyset \in \mathfrak{U}$. (5.264)

Aus $x \in \mathfrak{U}$ folgt $\{x\} \in \mathfrak{U}$. Aus $x \in \mathfrak{U}$ und $y \in \mathfrak{U}$ folgt $\{x, y\} \in \mathfrak{U}$. (5.265)

Aus $M \in \mathfrak{U}$ und $N \in \mathfrak{U}$ für Mengen M und N folgt $M \cup N \in \mathfrak{U}$. (5.266)

Aus $x \in \mathfrak{U}$ und $y \in \mathfrak{U}$ folgt $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{U}$. (5.267)

Liegt die Ordinalzahl α in $\mathfrak{U}$, gilt dies auch für ihre Vorgänger, für $\alpha + 1$ und $\mathbb{V}_\alpha$. (5.268)

Liegen Mengen M und N in $\mathfrak{U}$, so auch $M \cap M$, $M \setminus N$ und $M \times N$. (5.269)

Liegen Mengen M und N in $\mathfrak{U}$, so liegt in $\mathfrak{U}$ auch
jede Relation mit linken Gliedern aus M und rechten Gliedern aus N, (5.270)
ebenso wie die Menge $\mathtt{Func}(M, N)$ aller Funktionen von M in N.

Liegt eine nichtleere Mengenklasse $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$, so auch $\bigcap \mathfrak{M}$. (5.271)

Liegt eine Mengenmenge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$, so auch $\times\, \mathfrak{M}$. (5.272)

Ist $\langle x \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ Familie von Mengen aus $\mathfrak{U}$ und $I \in \mathfrak{U}$ oder $|I| \in \mathfrak{U}$, gilt $\bigcup_{i\in I} \theta(i) \in \mathfrak{U}$. (5.273)

Ist $\langle x \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ Familie von Mengen aus $\mathfrak{U}$ und $I \neq \emptyset$, gilt $\bigcap_{i\in I} \theta(i) \in \mathfrak{U}$. (5.274)

Ist $\langle x \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ Familie von Mengen aus $\mathfrak{U}$ und $I \in \mathfrak{U}$, gilt $\times_{i\in I} \theta(i) \in \mathfrak{U}$. (5.275)

Liegt die Menge M in $\mathfrak{U}$, so auch $|M|$ und jede Ordinalzahl $< |M|$. (5.276)

Liegt die Kardinalzahl κ in $\mathfrak{U}$, so auch deren kardinaler Nachfolger κ^+. (5.277)

Beweis. Der Beweis stützt sich auf die U-Axiome (5.257 S. 328) bis (5.261 S. 328).

Beweis von (5.263). Sei $x \subseteq M \in \mathfrak{U}$. Wegen $x \subseteq M$ ist M eine Klasse, und da diese Element von $\mathfrak{U}$ ist, ist M zugleich Individuum, also eine Menge. Aus $M \in \mathfrak{U}$ folgt daher mittels des U-Potenzmengenaxioms (5.259), dass $\mathcal{P}(M) \in \mathfrak{U}$. Als Teilklasse der Menge M ist nun x per Teilmengenaxiom ebenfalls eine Menge, also ein Element von $\mathcal{P}(M)$. Also gilt insgesamt $x \in \mathcal{P}(M) \in \mathfrak{U}$ und per U-Transitivitätsaxiom (5.258) folgt $x \in \mathfrak{U}$.

Beweis von (5.264). Nach dem U-Unendlichkeitsaxiom (5.257) ist ω Element von $\mathfrak{U}$, nach dem U-Transitivitätsaxiom (5.258) gilt das also auch für jedes Element von ω, d. h. für jede natürliche Zahl.

Beweis von (5.265). Nach (5.264) liegt ω in $\mathfrak{U}$, nach (5.263) liegen also auch die Teilklassen $\{0\}$ und $\{0, 1\}$ von ω in $\mathfrak{U}$. Für x aus $\mathfrak{U}$ sei nun f die Funktion, die 0 auf x wirft. Da deren Definitionsbereich $\{0\}$ in $\mathfrak{U}$ liegt, gilt das nach dem U-Ersetzungsaxiom (5.261) auch für ihren Wertebereich $\{x\}$. Für x und y aus U sei g die Funktion, die 0 auf x und 1 auf y wirft. Da deren Definitionsbereich $\{0, 1\}$ in $\mathfrak{U}$ liegt, gilt das nach (5.261) auch für ihren Wertebereich $\{x, y\}$.

Beweis von (5.266). Seien M, N Mengen aus $\mathfrak{U}$. Wegen (5.265) ist $\{M, N\}$ aus $\mathfrak{U}$, also wegen des U-Vereinigungsmengenaxioms (5.260) auch $\bigcup\{M, N\}$, und das ist $= M \cup N$.

Beweis von (5.267). Seien x, y aus $\mathfrak{U}$. Nach (5.265) liegen dann $\{x\}$ und $\{x, y\}$, also auch $\{\{x\}\}$ und $\{\{x, y\}\}$ in $\mathfrak{U}$, also nach (5.266) auch $\{\{x\}\} \cup \{\{x, y\}\}$, das ist aber $= \{\{x\}, \{x, y\}\}$, was $= \langle x, y\rangle$ ist.

Beweis von (5.268). Für α aus $\mathfrak{U}$ liegt nach (5.265) auch $\{\alpha\}$ in $\mathfrak{U}$, nach (5.266) also auch $\alpha \cup \{\alpha\}$, das heißt $\alpha + 1$. Ist außerdem ξ ein Vorgänger von α, so gilt $\xi < \alpha$, d. h. $\xi \in \alpha$, also gilt $\xi \in \alpha \in \mathfrak{U}$ und per U-Transitivitätsaxiom (5.258) folgt $\xi \in \mathfrak{U}$.
Schließlich zeigt sich durch Sukzessor-Limes-Induktion, dass für alle α aus $\mathtt{On}$ «$\alpha \notin \mathfrak{U}$ oder $\mathbb{V}_\alpha \in \mathfrak{U}$» gilt:
Induktionsanfang. Wegen (5.190 S. 305) und (5.264) gilt $\mathbb{V}_0 = \emptyset = 0 \in \mathfrak{U}$.
Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: $\alpha \notin \mathfrak{U}$ oder $\mathbb{V}_\alpha \in \mathfrak{U}$. Ist $\alpha \notin \mathfrak{U}$, so auch $\alpha + 1 \notin \mathfrak{U}$ (läge $\alpha + 1$ in $\mathfrak{U}$, so läge auch deren Vorgänger α in $\mathfrak{U}$, wie wir gerade bewiesen haben). Liegt aber $\mathbb{V}_\alpha$ in $\mathfrak{U}$, so wegen des U-Potenzmengenaxioms (5.259) auch $\mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)$, d. h. nach (5.191 S. 305) $\mathbb{V}_{\alpha+1}$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Für alle Vorgänger ξ einer Limeszahl λ gilt $\xi \notin \mathfrak{U}$ oder $\mathbb{V}_\xi \in \mathfrak{U}$. Nun gilt entweder $\lambda \notin \mathfrak{U}$ oder $\lambda \in \mathfrak{U}$. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall müssen auch alle Vorgänger ξ von

λ in $\mathfrak{U}$ liegen, für die dann nach VORAUSSETZUNG $\mathbb{V}_\xi \in \mathfrak{U}$ gilt. Dann gilt für die Funktion $f := \langle \xi \in \lambda \mapsto \mathbb{V}_\xi \rangle$, dass ihr Definitionsbereich λ und ihre Werte in $\mathfrak{U}$ liegen. Nach dem U-Ersetzungsaxiom (5.261) folgt also $\mathtt{Wb}(f) \in U$, und nach (5.260) $\bigcup \mathtt{Wb}(f) \in \mathfrak{U}$, d. h. gemäß der Bemerkung nach Definition 5.10.71 S. 149 $\bigcup_{\xi\in\lambda} \mathbb{V}_\xi \in \mathfrak{U}$, d. h. nach (5.192 S. 305) $\mathbb{V}_\lambda \in \mathfrak{U}$. Damit haben wir nun hergeleitet, dass stets «$\alpha \notin \mathfrak{U}$ oder $\mathbb{V}_\alpha \in \mathfrak{U}$» gilt. Ist also $\alpha \in \mathfrak{U}$, so folgt $\mathbb{V}_\alpha \in \mathfrak{U}$.

Beweis von (5.269). Für M und N aus $\mathfrak{U}$ sind $M \cap N$ und $M \setminus N$ Teilklassen von M, also nach (5.263) Elemente von $\mathfrak{U}$. Bezüglich $M \times N$ überlege man wie folgt. Zu jedem n aus N sei $f_n := \langle x \in M \mapsto \langle x, n\rangle\rangle$ die Funktion, die jedes x aus M auf $\langle x, n\rangle$ wirft. Da x und n als Elemente von Elementen von $\mathfrak{U}$ per U-Transitivitätsaxiom (5.258) in $\mathfrak{U}$ liegen, liegt nach (5.267) auch $\langle x, n\rangle$ in $\mathfrak{U}$, und so ist f_n eine Funktion von M in $\mathfrak{U}$ mit $\mathtt{Db}(f) = M \in U$. Deren Wertebereich $\mathtt{Wb}(f_n)$ liegt per U-Ersetzungsaxiom (5.261) in $\mathfrak{U}$, und $\mathtt{Wb}(f_n)$ ist die Klasse aller $\langle x, n\rangle$ für x aus M. Weiter ist $g := \langle n \in N \mapsto \mathtt{Wb}(f_n)\rangle$ eine Funktion von N in $\mathfrak{U}$ mit $\mathtt{Db}(g) = N \in \mathfrak{U}$. Also liegt nach (5.261) auch deren Wertebereich in $\mathfrak{U}$, und dieser ist die Klasse C aller $\mathtt{Wb}(f_n)$ für n aus N. Nach dem U-Vereinigungsmengenaxiom (5.260) ist dann $\bigcup C$ Element von $\mathfrak{U}$, und $\bigcup C$ ist die Vereinigung $\bigcup_{n\in N} \mathtt{Wb}(f_n)$ aller $\mathtt{Wb}(f_n)$, was die Klasse aller $\langle x, n\rangle$ mit x aus M und n aus N ist, und das ist die Klasse $M \times N$.

Beweis von (5.270). Eine Relation der genannten Art ist Teilklasse von $M \times N$, also wegen (5.263) und (5.269) Element von $\mathfrak{U}$. Jede Funktion f von M in N ist ebenfalls Teilklasse von $M \times N$, und da $M \times N$ nach Theorem 5.10.58 S. 142 eine Menge ist, ist f nach dem Teilmengenaxiom eine Teilmenge von $M \times N$, also ein Element von $\mathcal{P}(M \times N)$. Also ist die Menge $\mathtt{Func}(M, N)$ aller dieser Funktionen f eine Teilklasse von $\mathcal{P}(M \times N)$, die nach (5.269) und dem U-Potenzmengenaxiom (5.259) ein Element von $\mathfrak{U}$ ist. Daher folgt die Behauptung $\mathtt{Func}(M, N) \in \mathfrak{U}$ aus (5.263).

Beweis von (5.271). $\bigcap \mathfrak{M}$ ist Teilklasse eines jeden Elements M von $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ nichtleer ist, gibt es ein solches M. Wegen $M \in \mathfrak{M} \in \mathfrak{U}$ folgt mittels des U-Transitivitätsaxioms (5.258), dass $M \in \mathfrak{U}$. Wegen $\bigcap \mathfrak{M} \subseteq N$ folgt dann mittels (5.263), dass $\bigcap \mathfrak{M} \in \mathfrak{U}$.

Beweis von (5.272). $\times \mathfrak{M}$ enthält ausschließlich Funktionen aus $\mathtt{Func}(\mathfrak{M}, \bigcup \mathfrak{M})$, ist also Teilklasse von $\mathtt{Func}(\mathfrak{M}, \bigcup \mathfrak{M})$ und liegt wegen des U-Vereinigungsmengenaxioms (5.260), (5.270) und (5.263) in $\mathfrak{U}$.

Beweis von (5.273). $\langle i \in I \mapsto \theta(i)\rangle$ sei mit f abgekürzt. Da f nicht unmengenwertig ist, gilt $\bigcup_{i\in I} \theta(i) = \bigcup \mathtt{Wb}(f)$ (vgl. die Bemerkung nach Definition 5.10.71 S. 149). Zu zeigen ist also, dass $\bigcup \mathtt{Wb}(f) \in \mathfrak{U}$.
FALL 1: $I \in \mathfrak{U}$. Dann ist f eine Funktion mit $\mathtt{Db}(f) = I \in \mathfrak{U}$, deren Werte in $\mathfrak{U}$ liegen. Also folgt aus dem U-Ersetzungsaxiom (5.261), dass auch $\mathtt{Wb}(f) \in \mathfrak{U}$. Nach (5.260) folgt schließlich $\bigcup \mathtt{Wb}(f) \in \mathfrak{U}$.
FALL 2: $|I| \in \mathfrak{U}$. Wegen $|I| \sim I$ gibt es dann eine Bijektion b von $|I|$ in I. Betrachten wir nun die Komposition $F := b \looparrowright f$, so ist das ein Funktion mit Definitionsbereich $|I|$, deren Wertebereich mit dem Wertebereich von f übereinstimmt, d. h. es gilt $\mathtt{Wb}(f) = \mathtt{Wb}(F)$. Es gilt also $\mathtt{Db}(F) = |I| \in \mathfrak{U}$, und die Werte von F sind Elemente von $\mathfrak{U}$. Nach (5.261) folgt also $\mathtt{Wb}(F) \in \mathfrak{U}$. Mittels (5.260) und der Gleichung $\mathtt{Wb}(f) = \mathtt{Wb}(F)$ können wir also jetzt schließen: $\bigcup \mathtt{Wb}(f) = \bigcup \mathtt{Wb}(F) \in \mathfrak{U}$.

Beweis von (5.274). $\bigcap_{i\in I} \theta(i)$ ist Teilklasse eines jeden $\theta(i)$ mit $i \in I$. Da $I \neq \emptyset$, gibt es ein j aus I, und $\theta(j)$ liegt in $\mathfrak{U}$. Nun ist aber $\bigcap_{i\in I} \theta(i) \subseteq \theta(j)$, also folgt mit (5.263), dass $\bigcap_{i\in I} \theta \in \mathfrak{U}$.

Beweis von (5.275). Die Elemente von $\bigtimes_{i\in I} \theta(i)$ sind Funktionen, die in $\mathtt{Func}(I, \bigcup_{i\in I} \theta(i))$ liegen. Also ist $\bigtimes_{i\in I} \theta$ Teilklasse von $\mathtt{Func}(I, \bigcup_{i\in I} \theta(i))$ und liegt wegen (5.273), (5.270) und (5.263) in $\mathfrak{U}$.

Beweis von (5.276). ANGENOMMEN, $|M| \notin \mathfrak{U}$. Dann ist die Klasse der Ordinalzahlen, die *nicht* in $\mathfrak{U}$ liegen, nichtleer, hat also ein Minimum μ, das kleinergleich $|M|$ ist, so dass nach (5.79 S. 192) μ eine Teilklasse von $|M|$ sein muss. Da dieses μ die *kleinste* Ordinalzahl ist, die *nicht* in $\mathfrak{U}$ liegt, sind alle kleineren Ordinalzahlen Elemente von $\mathfrak{U}$. Diese kleineren Ordinalzahlen sind aber nach Definition der Kleinerrelation für Ordinalzahlen gerade die Elemente von μ, so dass *alle Elemente von μ in $\mathfrak{U}$ liegen.* Wegen $|M| \sim M$ gibt es eine Bijektion f von $|M|$ in M, und die Einschränkung f/μ von f auf μ ist dann eine Bijektion von μ in eine Teilklasse T von M, wobei dieses T wegen (5.263) in $\mathfrak{U}$ liegt. Betrachten wir nun die Umkehrfunktion g von f/μ, so ist g eine Bijektion von T in μ, insbesondere gilt $\mathtt{Db}(g) = T$ und $\mathtt{Wb}(g) = \mu$. Damit ist der Definitionsbereich von g das Element T von $\mathfrak{U}$, und alle Werte von g sind als Elemente von μ auch Elemente von $\mathfrak{U}$. Also folgt aus dem U-Ersetzungsaxiom (5.261), dass $\mu \in \mathfrak{U}$ im Widerspruch dazu, dass μ *nicht* in $\mathfrak{U}$ liegen sollte. Also war die ANNAHME falsch und $|M|$ liegt in $\mathfrak{U}$. Nach (5.268) liegen dann auch alle Vorgänger von $|M|$ in $\mathfrak{U}$.

Beweis von (5.277). Mit κ liegt per U-Potenzmengenaxiom (5.259) auch $\mathcal{P}(\kappa)$ in $\mathfrak{U}$. Nach Theorem 5.20.19 S. 262 ist $\kappa \prec \mathcal{P}(\kappa)$, also wegen (5.247 S. 318) $|\kappa| < |\mathcal{P}(\kappa)|$, und da nach (5.245 S. 318) $\kappa = |\kappa|$ gilt, ist

$\kappa < |\mathcal{P}(\kappa)|$. Der kardinale Nachfolger κ^+ von κ ist als die nächst größere Kardinalzahl nun entweder $= |\mathcal{P}(\kappa)|$ oder $< |\mathcal{P}(\kappa)|$. Da $\mathcal{P}(\kappa)$ Element von $\mathfrak{U}$ ist, ist aber nach (5.276) die Kardinalzahl $|\mathcal{P}(\kappa)|$ und auch jede kleinere Zahl Element von $\mathfrak{U}$. Auf jeden Fall ist daher $\kappa^+ \in \mathfrak{U}$. □

Metatheorem 5.31.6 S. 329

Jedes Universum ist ein Modell, in dem alle klassischen Axiome gelten. Umgekehrt ist jedes Modell, in dem alle klassischen Axiome gelten, ein Universum.

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{U}$ ein Universum. Dann ist $\mathfrak{U}$ nach Definition $\in$-transitiv und enthält nach (5.264) die Zahlen 0 und 1. Daher ist $\mathfrak{U}$ ein Modell. Ferner ist $\mathfrak{U}$ nach Definition $\bigcup$–, $\mathcal{P}$– und funktionstreu, nach (5.263) $\subset$-treu, nach (5.265) paartreu und nach (5.264) gilt $\omega \in \mathfrak{U}$. Daher folgt die Gültigkeit der klassischen Axiome im Modell $\mathfrak{U}$ aus den Metatheoremen von Abschnitt 5.29, namentlich aus 5.29.5, 5.29.9, 5.29.12, 5.29.16, 5.29.19, 5.29.22 und 5.29.28.
Sei nun umgekehrt $\mathfrak{U}$ ein Modell, in dem alle klassischen Axiome gelten. Dann ist $\mathfrak{U}$ zunächst $\in$-transitiv, weil $\mathfrak{U}$ ein Modell ist (siehe Erklärung 5.8.7 S. 110), und es gelten die Hilfssätze, dass $\mathfrak{U}$ Paar-treu und $\subset$-treu ist:
$\mathfrak{U}$ ist paartreu: Sind nämlich a und b Elemente von $\mathfrak{U}$, so sind dies nach (5.8 S. 116) «Individuen» des Modells. Also ist nach dem Paarmengenaxiom «$\{a, b\}$» [was in $\mathfrak{U}$ und im Standardmodell wegen (5.7 S. 116) dasselbe Objekt bezeichnet] eine «Menge» des Modells, also nach (5.11 S. 116) ein Element von $\mathfrak{U}$.
$\mathfrak{U}$ ist $\subset$-treu: Ist nämlich $a \in \mathfrak{U}$, und ist $b \subseteq a$, so ist b wegen (5.219 S. 309) auch im Modell $\mathfrak{U}$ eine «Teilklasse» von a, und da a eine «Menge» des Modells ist,[40] ist nach dem Teilmengenaxiom auch b eine «Menge» des Modells, nach (5.11 S. 116) also ein Element von $\mathfrak{U}$.
Weiter ist $\mathfrak{U}$ $\bigcup$-treu: Sei nämlich $\mathfrak{M}$ eine in $\mathfrak{U}$ liegende Mengenmenge, so ist $\mathfrak{M}$ nach (5.223 S. 309) eine «Mengenmenge» des Modells, also ist nach dem Vereinigungsmengenaxiom auch «$\bigcup \mathfrak{M}$» (was wegen 5.226 S. 309 in $\mathfrak{U}$ und im Standardmodell dasselbe Objekt bezeichnet)[41] eine «Menge» des Modells, die wegen (5.11 S. 116) ein Element von $\mathfrak{U}$ sein muss.
Außerdem liegt ω liegt in $\mathfrak{U}$: Denn da $\mathfrak{U}$ nun $\bigcup$-treu und paartreu ist, bezeichnet «ω» nach (5.239 S. 313) in $\mathfrak{U}$ und im Standardmodell dasselbe Objekt, welches per Unendlichkeitsaxiom in $\mathfrak{U}$ liegt.
Weiter ist $\mathfrak{U}$ $\mathcal{P}$-treu: Ist nämlich M eine in $\mathfrak{U}$ liegende Menge, so ist M nach (5.11) eine «Menge» des Modells $\mathfrak{U}$, und wegen der $\subset$-Treue von $\mathfrak{U}$ folgt aus Metatheorem 5.29.15 S. 311, dass «$\mathcal{P}(M)$» in $\mathfrak{U}$ und im Standardmodell dasselbe Objekt bezeichnet. Aufgrund des Potenzmengenaxioms muss dieses Objekt nun eine «Menge» des Modells $\mathfrak{U}$, also ein Element von $\mathfrak{U}$ sein.
Schließlich ist $\mathfrak{U}$ ist funktionstreu: Dies folgt aus Metatheorem (5.29.28 S. 314), da $\mathfrak{U}$ paartreu ist und in $\mathfrak{U}$ das Ersetzungsaxiom gilt. Insgesamt ist also $\mathfrak{U}$ ein Universum. □

Theorem 5.31.7 S. 329

Sei $\mathfrak{U}$ eine universale Menge. Dann gibt es Kardinalzahlen, die größer sind als sämtliche in $\mathfrak{U}$ vorhandenen, und die kleinste von diesen ist unerreichbar.
Außerdem gibt es dann ein unerreichbares υ, so dass die Mächtigkeit von $\mathfrak{U}$ größer oder gleich υ ist.

Beweis. Wir benötigen das folgende **Lemma**: Seien $\langle i \in I \mapsto A_i \rangle$ und $\langle i \in I \mapsto B_i \rangle$ Klassenfamilien, wobei letztere disjunkt ist (vgl. Definition 5.11.1 S. 152). *Gilt dann für alle i aus I, dass $A_i \precsim B_i$, so folgt $\bigcup_{i \in I} A_i \precsim \bigcup_{i \in I} B_i$.*

Beweis des Lemmas. Nach (5.90 S. 200) ist zu zeigen, dass es eine Injektion von $\bigcup_{i \in I} A_i$ in $\bigcup_{i \in I} B_i$ gibt. Wegen $A_i \precsim B_i$ ist $B_i \succsim A_i$, also gilt gemäß (5.91 S. 200): $A_i = \emptyset$ (Fall 1) oder es gibt eine Surjektion von B_i in A_i (Fall 2); in diesem Fall wählen wir eine solche Surjektion aus und nennen sie f_i. Sei nun g die Funktion, die jedes a aus $\bigcup_{i \in I} A_i$ auf das wie folgt bestimmte b aus $\bigcup_{i \in I} B_i$ wirft: Wir wählen zunächst einen Index i aus I, so dass $a \in A_i$ (ein solches i existiert nach Definition der Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i$), und

[40] Wegen $b \subseteq a$ ist a eine Klasse, also wegen $a \in \mathfrak{U}$ eine Menge, und (als in $\mathfrak{U}$ liegende Menge gemäß 5.11 S. 116) auch eine «Menge» des Modells $\mathfrak{U}$.

[41] Zur Anwendung von (5.226) beachte, dass $\mathfrak{M}$ als Element von $\mathfrak{U}$ wegen der $\in$-Transitivität von $\mathfrak{U}$ auch eine Teilklasse von $\mathfrak{U}$ ist, und als Mengenmenge auch eine Mengenklasse.

weiter wählen wir zu diesem Index i ein b aus B_i, so dass $f_i(b) = a$ ist (ein solches b existiert, denn weil A_i das Element a enthält, ist A_i nichtleer, also tritt der oben genannten FALL 2 ein und f_i bezeichnet eine Surjektion von B_i in A_i); auf dieses b also wirft g das Element a. Wir zeigen, dass g eine Injektion ist, was den Beweis des Lemmas abschließt.
Seien verschiedene Elemente a und a' von $\bigcup_{i\in I} A_i$ vorgegeben. Dann ist nach Definition $g(a)$ gleich einem b mit der Eigenschaft, dass es einen Index i gibt, so dass $a \in A_i$, $b \in B_i$ und $f_i(b) = a$; ebenso ist $g(a')$ gleich einem b', zu dem es einen Index j gibt, so dass $a' \in A_j$, $b' \in B_j$ und $f_j(b') = a'$. Zu zeigen ist $b \neq b'$. Entweder ist nun $i \neq j$: dann sind wegen der Disjunktheitsvoraussetzung B_i und B_j disjunkt, so dass sofort $b \neq b'$ folgt. Oder es ist $i = j$: dann ist f_i und f_j ein und dieselbe Funktion, und wären nun b und b' ein und dasselbe Objekt, so wäre $a = f_i(b) \underset{i=j \text{ und } b=b'}{=} f_j(b') = a'$, was falsch ist. Also sind auch jetzt b und b' verschieden. Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes. Da $\mathfrak{U}$ eine *Menge* ist, ist nach dem Teilmengenaxiom auch jede Teilklasse von $\mathfrak{U}$ eine solche, insbesondere ist die Klasse K aller in $\mathfrak{U}$ enthaltenen Kardinalzahlen eine Menge. Gemäß Theorem 5.30.12 S. 321 ist also die Kardinalzahl $K^{\maltese}$ größer als alle in K (und somit in $\mathfrak{U}$) vorhandenen Kardinalzahlen, und sie ist die *kleinste* Kardinalzahl, die größer als alle in K (und somit in $\mathfrak{U}$) vorhandenen Kardinalzahlen ist. So ist (für die erste Behauptung) nur noch zu zeigen, dass $K^{\maltese}$ unerreichbar ist. Da $K^{\maltese}$ die *kleinste* über den Kardinalzahlen von $\mathfrak{U}$ gelegene Kardinalzahl ist, folgt zunächst:

Jede Kardinalzahl γ, die kleiner als $K^{\maltese}$ ist, liegt in $\mathfrak{U}$. (7.75)

Ist nämlich γ kleiner als $K^{\maltese}$, so ist zunächst γ nicht größer als alle in $\mathfrak{U}$ vorhandenen Kardinalzahlen, also liegt mindestens eine Kardinalzahl κ in $\mathfrak{U}$, für die $\gamma \leq \kappa$ ist. Wegen (5.268 S. 329) liegt dann auch γ in $\mathfrak{U}$.
Nun ist $K^{\maltese} \neq 0$, denn wegen (5.264 S. 329) liegt die leere Menge 0 in $\mathfrak{U}$. Auch ist $K^{\maltese}$ keine Sukzessor-Kardinalzahl: Wäre nämlich $K^{\maltese}$ die Sukzessor-Kardinalzahl γ^+ einer Kardinalzahl γ, so wäre dieses γ kleiner als $K^{\maltese}$ und läge nach (7.75) in $\mathfrak{U}$. Dann aber läge nach (5.277 S. 329) auch γ^+ (also $K^{\maltese}$) in $\mathfrak{U}$, was falsch ist. Also ist $K^{\maltese}$ eine *Limes-Kardinalzahl*, und zwar eine, die größer als $\aleph_0$ ist: $K^{\maltese}$ kann nicht $\leq \aleph_0 (= \omega)$ sein, weil die Ordinalzahlen, die kleinergleich ω sind (also ω und die natürlichen Zahlen) gemäß (5.264 S. 329) in $\mathfrak{U}$ liegen. So ist Bedingung (a) für die Unerreichbarkeit von $K^{\maltese}$ nachgewiesen (vgl. Definition 5.31.1 S. 327).

Zur Verifikation von Bedingung (b) sei vorausgesetzt, dass $\mathfrak{M}$ eine Mengenklasse mit $|\mathfrak{M}| < K^{\maltese}$ ist, für deren Mengen M ebenfalls $|M| < K^{\maltese}$ ist. Zu zeigen ist, dass $|\bigcup \mathfrak{M}| < K^{\maltese}$. Wegen $|\mathfrak{M}| < K^{\maltese}$ liegt die Kardinalzahl $|\mathfrak{M}|$ gemäß (7.75) in $\mathfrak{U}$, und aus demselben Grund liegen auch die Kardinalzahlen $|M|$ für Elemente M von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{M} \sim |\mathfrak{M}|$ gibt es eine Bijektion f von $\mathfrak{M}$ in $|\mathfrak{M}|$, und für jedes M aus $\mathfrak{M}$ sei g_M die Funktion $\langle x \in |M| \longrightarrow \langle x, f(M)\rangle\rangle$. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die in $\mathfrak{U}$ liegende Menge $|M|$. Ihre Werte $g_M(x)$ liegen ebenfalls in $\mathfrak{U}$: Denn wegen $x \in |M| \in \mathfrak{U}$ folgt einerseits nach (5.258 S. 328), dass $x \in \mathfrak{U}$, und andererseits liegen wegen $|\mathfrak{M}| \in \mathfrak{U}$ nach (5.258) auch alle Elemente von $|\mathfrak{M}|$ in $\mathfrak{U}$; dies sind aber die Werte von f, d. h. die Objekte $f(M)$ für M aus $\mathfrak{M}$. Da also $x \in \mathfrak{U}$ und $f(M) \in \mathfrak{U}$, folgt nach (5.267), dass auch $\langle x, f(M)\rangle \in \mathfrak{U}$, d. h. $g_M(x) \in \mathfrak{U}$. Wir können daher auf g_M das U-Ersetzungsaxiom (5.261 S. 328) anwenden und erhalten, dass auch $\mathtt{Wb}(g_M)$ in $\mathfrak{U}$ liegt. g_M ist injektiv ist, denn für x und y aus $|M|$ mit $x \neq y$ folgt $\langle x, f(M)\rangle \neq \langle y, f(M)\rangle$, also $g_M(x) \neq g_M(y)$. So ist g_M also eine Bijektion von $|M|$ in $\mathtt{Wb}(g_M)$, so dass $|M| \sim \mathtt{Wb}(g_M)$ gilt.
Nun ist $\langle M \in \mathfrak{M} \mapsto \mathtt{Wb}(g_M)\rangle$ eine Familie von Mengen aus $\mathfrak{U}$. Diese ist disjunkt: Für verschiedene Indies i und j aus $\mathfrak{M}$ haben $\mathtt{Wb}(g_i)$ und $\mathtt{Wb}(g_j)$ kein gemeinsames Element, denn die Elemente der ersten Menge sind Paare, deren zweite Komponente $f(i)$ ist, während die Elemente der zweiten Menge als zweite Komponente $f(j)$ haben, und da f injektiv ist, muss wegen $i \neq j$ auch $f(i) \neq f(j)$ sein.
Sei schließlich h die Funktion, die jedes M aus $\mathfrak{M}$ auf sich selbst wirft, also $h = \langle M \in \mathfrak{M} \mapsto M\rangle$. Es ist h ebenfalls eine Familie von Mengen aus $\mathfrak{U}$, und für jeden Index M gilt $h(M) = M \sim |M| \sim \mathtt{Wb}(g_M)$, und erst recht $h(M) \precsim \mathtt{Wb}(g_M)$. Somit folgt nun nach dem Lemma, dass $\bigcup_{M\in\mathfrak{M}} h(M) \precsim \bigcup_{M\in\mathfrak{M}} \mathtt{Wb}(g_M)$. Wegen $h(M) = M$ ist aber $\bigcup_{M\in\mathfrak{M}} h(M)$ dasselbe wie $\bigcup_{M\in\mathfrak{M}} M$, was mit $\bigcup \mathfrak{M}$ identisch ist. Daher folgt $\bigcup \mathfrak{M} \precsim \bigcup_{M\in\mathfrak{M}} \mathtt{Wb}(g_M)$, und daraus mittels (5.248 S. 318) $|\bigcup \mathfrak{M}| \leq |\bigcup_{M\in\mathfrak{M}} \mathtt{Wb}(g_M)|$. Außerdem ist $|\bigcup_{M\in\mathfrak{M}} \mathtt{Wb}(g_M)| < K^{\maltese}$: Weil $|\mathfrak{M}|$ und alle $\mathtt{Wb}(g_M)$ Elemente von $\mathfrak{U}$ sind, folgt mittels (5.273 S. 329), dass auch $\bigcup_{M\in\mathfrak{M}} \mathtt{Wb}(g_M)$ in $\mathfrak{U}$ liegt, und nach (5.276 S. 329) muss dann $|\bigcup_{M\in\mathfrak{M}} \mathtt{Wb}(g_M)|$ ebenfalls in $\mathfrak{U}$ liegen. Da nun $K^{\maltese}$ größer als alle in $\mathfrak{U}$ liegenden Kardinalzahlen ist, folgt also $|\bigcup_{i\in I} \mathtt{Wb}(g_i)| < K^{\maltese}$.
Insgesamt folgt daher $|\bigcup \mathfrak{M}| < K^{\maltese}$.

So bleibt für $K^{\maltese}$ nur noch die Bedingung (c) für die Unerreichbarkeit nachzuweisen. Sei hierzu vorausgesetzt, dass eine Menge M eine Mächtigkeit κ hat, die $< K^{\maltese}$ ist. Zu zeigen ist $|\mathcal{P}(M)| < K^{\maltese}$. Aus $\kappa < K^{\maltese}$ folgt

mittels (7.75) zunächst, dass $\kappa \in \mathfrak{U}$. Da κ die Mächtigkeit von M ist, gilt $M \sim \kappa$, daraus folgt mit (5.173 S. 258), dass $\mathcal{P}(M) \sim \mathcal{P}(\kappa)$, also gilt wegen (5.246 S. 318) $|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(\kappa)|$. Wegen $\kappa \in \mathfrak{U}$ ist aber nach dem U-Potenzmengenaxiom (5.259 S. 328) auch $\mathcal{P}(\kappa)$ Element von $\mathfrak{U}$, und nach (5.276 S. 329) gilt das auch für die Mächtigkeit $|\mathcal{P}(\kappa)|$ von $\mathcal{P}(\kappa)$. Somit gilt $|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(\kappa)| \in \mathfrak{U}$, und da $K^{\maltese}$ größer als alle in $\mathfrak{U}$ liegenden Kardinalzahlen ist, folgt $|\mathcal{P}(M)| < K^{\maltese}$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Was nun die Mächtigkeit von $\mathfrak{U}$ angeht, so gilt $\kappa < |\mathfrak{U}|$ für jedes κ aus K: Denn für jedes κ aus K, d. h. jede Kardinalzahl κ mit $\kappa \in \mathfrak{U}$ folgt wegen der $\mathcal{P}$-Treue von $\mathfrak{U}$, dass $\mathcal{P}(\kappa) \in \mathfrak{U}$, und daraus per $\in$-Transitivität, dass jedes Element x von $\mathcal{P}(\kappa)$ auch in $\mathfrak{U}$ liegt, also $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathfrak{U}$ gilt. Daher folgt nach (5.89 S. 200) $\mathcal{P}(\kappa) \precsim \mathfrak{U}$. Zusammen mit $\kappa \prec \mathcal{P}(\kappa)$ (Theorem 5.20.19 S. 262) folgt nun gemäß (5.97 S. 201), dass $\kappa \prec \mathfrak{U}$, also wegen (5.247 S. 318) $|\kappa| < |\mathfrak{U}|$, d. h. wegen (5.245 S. 318) $\kappa < |\mathfrak{U}|$.
So ist $|\mathfrak{U}|$ eine der Kardinalzahlen, die größer als jedes κ aus K ist. Da aber das unerreichbare $K^{\maltese}$ die *kleinste* derartige Kardinalzahl ist, folgt $K^{\maltese} \leq |\mathfrak{U}|$. Das heißt: Es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl υ (nämlich $K^{\maltese}$, so dass die Mächtigkeit von $|\mathfrak{U}|$ dieser Kardinalzahl gleich ist oder sei übertrifft. Das war die zweite Behauptung. □

Theorem 5.31.8 S. 329

Ist υ unerreichbar, so ist $\mathbb{V}_\upsilon$ eine universale Menge, und ist umgekehrt für eine Ordinalzahl υ die Menge $\mathbb{V}_\upsilon$ ein Universum, so ist υ eine unerreichbare Kardinalzahl.

Beweis. Sei zunächst υ unerreichbar. Dann ist υ nach Definition der Unerreichbarkeit eine Limes-Kardinalzahl größer als $\aleph_0 (= \omega)$. Aus $\omega < \upsilon$ folgt mittels (5.207 S. 308), dass $\omega \in \mathbb{V}_\upsilon$. Weiter ist $\mathbb{V}_\upsilon$ gemäß 5.195 S. 305 $\in$-transitiv. Weiter zeigt Theorem 5.29.11 S. 310 bzw. 5.29.14 S. 311, dass $\mathbb{V}_\upsilon$ $\bigcup$-treu bzw. $\mathcal{P}$-treu ist.[42] So bleibt gemäß Definition 5.31.4 S. 328 der Universalität nur noch zu zeigen, dass $\mathbb{V}_\upsilon$ funktionstreu ist. Um dies zu zeigen, ist aus der Voraussetzung, dass f eine Funktion mit $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{V}_\upsilon$ und Werten in $\mathbb{V}_\upsilon$ ist, abzuleiten, dass $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{V}_\upsilon$ gilt. Da υ eine Limeszahl ist, gilt nach (5.192 S. 305) $\mathbb{V}_\upsilon = \bigcup_{\chi \in \upsilon} \mathbb{V}_\chi$. Als Element von $\mathbb{V}_\upsilon$ ist daher $\mathtt{Db}(f)$ Element eines $\mathbb{V}_\chi$ mit $\chi \in \upsilon$, d. h. $\chi < \upsilon$. Nach (5.196 S. 305) ist $\mathtt{Db}(f)$ auch eine Teilmenge von $\mathbb{V}_\chi$, also gilt nach (5.89 S. 200), dass $\mathtt{Db}(f) \precsim \mathbb{V}_\chi$, nach (5.248 S. 318) folgt daraus $|\mathtt{Db}(f)| \leq |\mathbb{V}_\chi|$, und da υ unerreichbar ist, folgt aus $\chi < \upsilon$ nach Theorem 5.31.3 S. 327, dass $|\mathbb{V}_\chi| < \upsilon$, also gilt schließlich $|\mathtt{Db}(f)| < \upsilon$. Für die Funktion $F := \langle x \in \mathtt{Db}(f) \mapsto \mathtt{rg}(f(x)) \rangle$, die jedes Argument von f auf den Rang von $f(x)$ wirft (vgl. Definition 5.29.3 S. 308), ist nun $\mathtt{Wb}(F)$ *die Menge aller Ränge, die von Werten von f eingenommen werden*, also der Rangbereich $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ von $\mathtt{Wb}(f)$. Weil nun $\mathtt{Db}(F) = \mathtt{Db}(f)$ und $\mathtt{Db}(f)$ als Element von $\mathbb{V}_\upsilon$ eine Menge ist, ist per Ersetzungsaxiom auch $\mathtt{Wb}(F)$, also der Rangbereich $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$, eine Menge, und zwar als Menge von Rängen (also von Ordinalzahlen) eine Teilmenge von $\mathbb{V}$. Nun gilt nach (5.249 S. 318), dass $|\mathtt{Wb}(F)| \leq |\mathtt{Db}(F)|$. Wegen $|\mathtt{Db}(F)| = |\mathtt{Db}(f)| < \upsilon$ folgt also $|\mathtt{Wb}(F)| < \upsilon$, d. h. $|\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))| < \upsilon$. Außerdem gilt für jedes Element $\mathtt{rg}(f(x))$ von $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$, dass $|\mathtt{rg}(f(x))| < \upsilon$, denn die Werte $f(x)$ von f liegen ja nach Voraussetzung alle in $\mathbb{V}_\upsilon$, so dass nach (5.207 S. 308) $\mathtt{rg}(f(x)) < \upsilon$ gilt; also gilt wegen (5.250 S. 320), dass $|\mathtt{rg}(f(x))| \leq \mathtt{rg}(f(x)) < \upsilon$. Da υ unerreichbar ist, gilt also $|\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))| < \upsilon$, und da υ Limes-Kardinalzahl ist, ist der kardinale Nachfolger $|\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|^+$ von $|\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|$ ebenfalls noch kleiner als υ: $|\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|^+ < \upsilon$. Da nun $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ eine Menge von Ordinalzahlen ist, ist nach (5.14.4 S. 191) $\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ ebenfalls eine Ordinalzahl, und mit (5.250 S. 320) folgt daher $\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f)) < |\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|^+$. So können wir nun insgesamt festhalten:

$$\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f)) < |\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|^+ < \upsilon. \tag{7.76}$$

Nun ist $\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ nach (5.81 S. 192) das Supremum (also eine obere Schranke) von $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$, folglich ist $\mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ nach oben beschränkt und daher ist gemäß (5.212 S. 308) die Teilklasse $\mathtt{Wb}(f)$ von $\mathbb{V}$ ein Element von $\mathbb{V}$. Nun ist nach (5.213 S. 308) der Rang von $\mathtt{Wb}(f)$ die *kleinste* Ordinalzahl, die größer als alle $\mathtt{rg}(f(x))$ (für Elemente $f(x)$ von $\mathtt{Wb}(f)$) ist. Da alle $\mathtt{rg}(f(x))$ kleinergleich dem Supremum $\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))$ des Rangbereichs von $\mathtt{Wb}(f)$ sind, und nach (7.76) $\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f)) < |\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|^+$ gilt, ist $|\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|^+$ bereits eine Ordinalzahl, die größer als alle $\mathtt{rg}(f(x))$ für Elemente $f(x)$ von $\mathtt{Wb}(f)$ ist. Also gilt $\mathtt{rg}(\mathtt{Wb}(f)) \leq |\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|^+$. Da nach (7.76) $|\bigcup \mathtt{Rb}(\mathtt{Wb}(f))|^+ < \upsilon$ gilt, folgt $\mathtt{rg}(\mathtt{Wb}(f)) < \upsilon$, und wegen (5.207 S. 308) folgt $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{V}_\upsilon$. So ist

[42] Zur Anwendung der genannten Theoreme ist zu beachten, dass υ als unendliche Kardinalzahl größer als 1 und wegen (5.244 S. 317) eine Limeszahl ist.

$\mathbb{V}_\upsilon$ funktionstreu und damit ein Universum, und da $\mathbb{V}_\upsilon$ eine Menge ist (wie wir im Anschluss an Definition 5.29.1 S. 305 bewiesen haben), ist $\mathbb{V}_\upsilon$ eine universale Menge.

Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass $\mathbb{V}_\upsilon$ eine universale Menge ist. Dann ist υ zunächst eine Kardinalzahl: Denn ANGENOMMEN, υ ist keine Kardinalzahl, dann muss es (aufgrund der Definition 5.30.1 S. 316 der Kardinalzahl) eine Ordinalzahl α geben mit $\alpha < \upsilon$ und $\alpha \sim \upsilon$. Wegen $\alpha < \upsilon$ gilt gemäß (5.207 S. 308), dass α in $\mathbb{V}_\upsilon$ liegt, und weil $\mathbb{V}_\upsilon$ ein Universum ist, liegt (aufgrund der $\mathcal{P}$-Treue von Universen) auch $\mathcal{P}(\alpha)$ in $\mathbb{V}_\upsilon$. Wegen (5.276 S. 329) folgt schließlich $|\mathcal{P}(\alpha)| \in \mathbb{V}_\upsilon$. Andererseits gilt nach Theorem 5.20.19 S. 262, dass $\alpha \prec \mathcal{P}(\alpha)$. In dieser Aussage darf man gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 α durch das gleichmächtige υ und $\mathcal{P}(\alpha)$ durch das gemäß 5.245 S. 318 gleichmächtige $|\mathcal{P}(\alpha)|$ ersetzen und erhält $\upsilon \prec |\mathcal{P}(\alpha)|$, woraus nach (5.101 S. 201) folgt, dass $\upsilon < |\mathcal{P}(\alpha)|$. Somit gilt *nicht* $|\mathcal{P}(\alpha)| < \upsilon$ und also wegen (5.207) auch *nicht* $|\mathcal{P}(\alpha)| \in \mathbb{V}_\upsilon$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die ANNAHME falsch war.
Sodann ist υ wegen (5.207) größer als sämtliche in $\mathbb{V}_\upsilon$ vorhandenen Kardinalzahlen, und υ muss sogar die *kleinste* Kardinalzahl sein, die größer ist als alle in $\mathbb{V}_\upsilon$ vorhandenen Kardinalzahlen ist, denn jede Kardinalzahl κ, die *kleiner* als υ ist, liegt ja wegen (5.207) selbst in $\mathbb{V}_\upsilon$ und kann daher nicht mehr kleiner als *alle* in $\mathbb{V}_\upsilon$ liegenden Kardinalzahlen sein (sonst müsste κ kleiner als κ sein). Also ist υ wegen Theorem 5.31.7 S. 329 unerreichbar. □

Metatheorem 5.31.10 S. 330

In einem universalen Modell $\mathbb{G}$ sind die ≪unerreichbaren Kardinalzahlen≫ des Modells die in $\mathbb{G}$ liegenden unerreichbaren Kardinalzahlen.

Beweis. ξ ist nach Definition eine ≪unerreichbare Kardinalzahl≫, wenn gilt: ≪ξ ist Limes-Kardinalzahl mit $\aleph_0 < \xi$ (d. h. $\omega \in \xi$) so dass

(a) für jede Mengenmenge $\mathfrak{M}$, für die $|\mathfrak{M}| \in \xi$ sowie $|M| \in \xi$ für alle M aus $\mathfrak{M}$ gilt, auch $|\bigcup \mathfrak{M}| \in \xi$ gilt, und
(b) für jede Menge X, für die $|X| \in \xi$ gilt, auch $|\mathcal{P}(X)| \in \xi$ gilt≫.

Im Modell $\mathbb{G}$ bedeutet das, wenn man (5.255 S. 325), (5.4 S. 116), (5.239 S. 313), (5.223 S. 309), (5.225 S. 309), (5.226 S. 309) sowie (5.253 S. 325) beachtet:[43] ξ ist eine in $\mathbb{G}$ liegende Limes-Kardinalzahl mit $\omega \in \xi$, so dass

(a) für jede in $\mathbb{G}$ liegende Mengenmenge $\mathfrak{M}$,[44] für die $|\mathfrak{M}| \in \xi$ sowie $|M| \in \xi$ für alle M aus $\mathfrak{M}$ gilt,[45] auch $|\bigcup \mathfrak{M}| \in \xi$ gilt (aufgrund der $\bigcup$-Treue liegt $\bigcup \mathfrak{M}$ in $\mathbb{G}$, und wegen 5.276 liegt dann auch $|\bigcup \mathfrak{M}|$ in $\mathbb{G}$, und somit bezeichnet $|\bigcup \mathfrak{M}|$ nach 5.253 S. 325 in beiden Modellen dasselbe Objekt) und
(b) für jede in $\mathbb{G}$ liegende Menge X,[46] für die $|X| \in \xi$ gilt, auch $|\mathcal{P}(X)| \in \xi$ gilt.[47]

Sei nun zunächst ξ im Standardmodell eine in $\mathbb{G}$ liegende ≪unerreichbare Kardinalzahl≫, so ist also ξ eine in $\mathbb{G}$ liegende Limes-Kardinalzahl größer als ω, und da die Aussagen (a) und (b) nun für jede *beliebige* Mengenmenge bzw. jede *beliebige* Menge gelten, gelten sie natürlich auch für jede *in* $\mathbb{G}$ *liegende* Mengenmenge bzw. Menge. Also ist ξ dann im Modell $\mathbb{G}$ eine ≪unerreichbare Kardinalzahl≫.

---

[43] Sätze (5.255) und (5.253) können angewendet werden, da $\mathbb{G}$ wegen (5.265 S. 329) paartreu ist, und (5.239), da $\mathbb{G}$ als Universum darüber hinaus $\bigcup$-treu ist.

[44] Eigentlich müsste es heißen: ≪für jede in $\mathbb{G}$ liegende Mengenmenge $\mathfrak{M}$, *die* $\mathbb{G}$*-Objekt ist*≫, aber jede in $\mathbb{G}$ liegende Mengenmenge ist ohnehin ein $\mathbb{G}$-Objekt.

[45] Eigentlich müsste es heißen ≪für alle M aus $\mathfrak{M}$, *die* $\mathbb{G}$*-Objekte sind*≫, aber da $\mathfrak{M}$ Element von $\mathbb{G}$ ist, gilt für alle M aus $\mathfrak{M}$, dass $M \in \mathfrak{M} \in \mathbb{G}$, so dass $M \in \mathbb{G}$ (per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$) gilt und M ohnehin ein $\mathbb{G}$-Objekt ist. Da M Element von $\mathbb{G}$ ist, ist außerdem nach (5.276 S. 329) auch $|M|$ Element von $\mathbb{G}$, so dass nach Satz (5.253) ≪$|M|$≫ in beiden Modellen dasselbe bezeichnet. Da auch $\mathfrak{M}$ in $\mathbb{G}$ liegt, bezeichnet aus demselben Grund auch ≪$|\mathfrak{M}|$≫ in beiden Modellen dasselbe Objekt.

[46] Eigentlich müsste es heißen: ≪für jede in $\mathbb{G}$ liegende Menge X, *die* $\mathbb{G}$*-Objekt ist*≫, aber jede in $\mathbb{G}$ liegende Menge ist ohnehin ein $\mathbb{G}$-Objekt.

[47] Aufgrund der $\mathcal{P}$-Treue liegt $\mathcal{P}(X)$ in $\mathbb{G}$, und wegen (5.276) liegt dann auch $|\mathcal{P}(X)|$ in $\mathbb{G}$, und somit bezeichnet $|\mathcal{P}(X)|$ nach (5.253 S. 325) in beiden Modellen dasselbe Objekt. Da X in $\mathbb{G}$ liegt, bezeichnet aus demselben Grund auch ≪$|X|$≫ in beiden Modellen dasselbe Objekt.

Sei nun umgekehrt ξ im Modell $\mathbb{G}$ eine «unerreichbare Kardinalzahl». Dann ist ξ im Standardmodell zunächst eine in $\mathbb{G}$ liegende Limes-Kardinalzahl größer als ω, und die Aussagen (a) und (b) gelten für *in* $\mathbb{G}$ *liegende* Mengenmengen bzw. Mengen. So bleibt nur zu zeigen, dass sie für *beliebige* Mengenmengen bzw. Mengen gelten. Sei also $\mathfrak{M}$ eine (beliebige) Mengenmenge mit $|\mathfrak{M}| \in \xi$ und $|M| \in \xi$ für alle Elemente M von $\mathfrak{M}$. Wegen $\xi \in \mathbb{G}$ gilt dann per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$, dass $|\mathfrak{M}|$ und alle $|M|$ in $\mathbb{G}$ liegen. So ist $\mu := |\mathfrak{M}|$ eine in $\mathbb{G}$ liegende Mengenmenge, und es gilt $\mu \sim \mathfrak{M}$, d. h. es gibt eine Bijektion b von μ in $\mathfrak{M}$, und die Mengen M aus $\mathfrak{M}$ sind die Funktionswerte $b(m)$ für Elemente m aus μ. Es ist also $|b(m)|$ jeweils eine in $\mathbb{G}$ liegende Kardinalzahl. Sei nun für jedes m aus μ jeweils $B(m)$ die Klasse aller Paare $\langle m, x\rangle$ mit erster Komponente m und zweiter Komponente x aus $|b(m)|$; wegen (5.267 S. 329) liegen diese Paare in $\mathbb{G}$. Die Funktion, die x aus $|b(m)|$ auf $\langle m, x\rangle$ wirft, ist dann eine Bijektion von der in $\mathbb{G}$ gelegenen Menge $|b(m)|$ in die Klasse $B(m)$ mit Werten aus $\mathbb{G}$; also liegt der Wertebereich $B(m)$ dieser Funktion wegen (5.261 S. 328) ebenfalls in $\mathbb{G}$, und es gilt $|b(m)| \sim B(m)$. Wegen $b(m) \sim |b(m)|$ folgt dann $b(m) \sim B(m)$. Da $B(m)$ nun eine in $\mathbb{G}$ gelegene Mengenmenge ist und ξ im Modell $\mathbb{G}$ eine unerreichbare Kardinalzahl ist, folgt $|\bigcup B(m)| \in \xi$ (d. h. $|\bigcup B(m)| < \xi$), und da die Familie $f := \langle m \in \mu \mapsto B(m)\rangle$ disjunkt ist (für verschiedene m, n aus μ unterscheiden sich die Elemente von $B(m)$ und $B(n)$ durch die erste Komponente ihrer Elemente) und es wegen $B(m) \sim b(m)$ für jedes m eine Bijektion b_m von $B(m)$ in $b(m)$ gibt, ist die Vereinigung aller dieser Bijektionen eine Surjektion von $\bigcup_{m\in\mu} B(m)$ in $\bigcup_{m\in\mu} b(m)$, so dass nach (5.91 S. 200) $\bigcup_{m\in\mu} B(m) \succsim \bigcup_{m\in\mu} b(m)$ gilt. Also folgt $\bigcup M = \bigcup_{m\in\mu} b(m) \precsim \bigcup_{m\in\mu} B(m)$, somit wegen (5.247 S. 318) $|\bigcup M| = |\bigcup_{m\in\mu} b(m)| \leq |\bigcup_{m\in\mu} B(m)| < \xi$, also $|\bigcup M| < \xi$, d. h. $|\bigcup M| \in \xi$.
Sei schließlich X eine beliebige Menge mit $|X| \in \xi$, so gilt für $\alpha := |X|$, dass $\alpha \in \xi \in \mathbb{G}$, also $\alpha \in \mathbb{G}$ per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$. Weil somit α eine in $\mathbb{G}$ gelegene Menge und ξ im Modell $\mathbb{G}$ eine unerreichbare Kardinalzahl ist, folgt $|\mathcal{P}(\alpha)| \in \xi$. Da α die Kardinalzahl von X ist, gilt weiter $\alpha \sim X$, daraus folgt nach (5.173 S. 258) $\mathcal{P}(X) \sim \mathcal{P}(\alpha)$, also wegen (5.246 S. 318) $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(\alpha)| \in \xi$. So ist ξ eine «unerrreichbare Kardinalzahl» im Standardmodell. □

Metatheorem 5.31.11 S. 330

Ist υ unerreichbar, so existiert ein Modell $\mathbb{G}_\upsilon$ mit $|\mathbb{G}_\upsilon| = \upsilon$, dessen «Ordinalzahlen» genau die unterhalb von υ liegenden Ordinalzahlen sind, und in dem alle bisherigen Axiome gelten.

Beweis. Ich formuliere und beweise zunächst einige Lemmata, die auch für sich interessant sind.

Lemma 1. Es liege die Menge M bzw. die Kardinalzahl κ in einem Universum $\mathfrak{U}$, das selbst eine Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ ist. Dann gilt $\mathfrak{U}^M \precsim \mathfrak{U}$ bzw. $\mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U}) \precsim \mathfrak{U}$.

Erinnerung: $\mathcal{P}_{=\kappa}(C)$ bzw. $\mathcal{P}_{<\kappa}(C)$ bezeichnet die Klasse der Teilmengen von C mit genau bzw. mit weniger als κ Elementen (vgl. Definition 5.30.4 S. 318).

Beweis. Es gilt $\mathfrak{U}^M \subseteq \bigcup_{W\in\mathbb{M}\cap\mathfrak{U}} W^M$: Sei nämlich $f \in \mathfrak{U}^M$, dann ist f eine Funktion von M in die Teilklasse $\mathtt{Wb}(f)$ von $\mathfrak{U}$, d. h. f ist Element von $\mathtt{Wb}(f)^M$. Dabei ist $\mathtt{Wb}(f)$ nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge, die wegen der Funktionstreue von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{U}$ liegt. Insgesamt ist $\mathtt{Wb}(f)$ ein Element W von $\mathbb{M} \cap \mathfrak{U}$. Also liegt f in $\bigcup_{W\in\mathbb{M}\cap\mathfrak{U}} W^M$. So ist $\mathfrak{U}^M \subseteq \bigcup_{W\in\mathbb{M}\cap\mathfrak{U}} W^M$ bewiesen, und es folgt nach (5.89 S. 200) $\mathfrak{U}^M \precsim \bigcup_{W\in\mathbb{M}\cap\mathfrak{U}} W^M$.
Weiter gilt $\bigcup_{W\in\mathbb{M}\cap\mathfrak{U}} W^M \precsim \mathfrak{U}$: Für jede Menge W aus $\mathfrak{U}$ ist nämlich die Menge W^M (d. h. $\mathtt{Func}(M, W)$) gemäß (5.270) ein Element von $\mathfrak{U}$, also per $\in$-Transitivität von $\mathfrak{U}$ auch eine Teilklasse von $\mathfrak{U}$ (aus $x \in W^M \in \mathfrak{U}$ folgt $x \in \mathfrak{U}$), so dass gemäß (5.89) $W^M \precsim \mathfrak{U}$ gilt. Ebenso ist $\mathbb{M} \cup \mathfrak{U}$ Teilklasse von $\mathfrak{U}$, so dass $\mathbb{M} \cup \mathfrak{U} \precsim \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{U}$ eine Menge oder eine Unmenge der Stufen $\llbracket\Omega\rrbracket$ oder $\llbracket\mathbb{D}\rrbracket$ ist, folgt also mit Theorem 5.20.15 S. 261 $\bigcup_{W\in\mathbb{M}\cap\mathfrak{U}} W^M \precsim \mathfrak{U}$. Aus $\mathfrak{U}^M \precsim \bigcup_{W\in\mathbb{M}\cap\mathfrak{U}} W^M$ und $\bigcup_{W\in\mathbb{M}\cap\mathfrak{U}} W^M \precsim \mathfrak{U}$ folgt nach (5.95 S. 201) $\mathfrak{U}^M \precsim \mathfrak{U}$.

Nun zur zweiten Behauptung $\mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U}) \precsim \mathfrak{U}$. Sei V die Teilklasse $\{f \mid f\colon \kappa \longrightarrow \mathfrak{U} \text{ und } |\mathtt{Wb}(f)| = \kappa\}$ von $\mathfrak{U}^\kappa$ und F die Funktion $\langle f \in V \mapsto \mathtt{Wb}(f)\rangle$. Wegen $\kappa \in \mathbb{M}$ ist $\mathtt{Wb}(f)$ per Ersetzungsaxiom für jedes f eine Teil*menge* von $\mathfrak{U}$, liegt also in $\mathcal{P}(\mathfrak{U})$, und wegen $|\mathtt{Wb}(f)| = \kappa$ sogar in $\mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U})$. So ist F eine Funktion von V in $\mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U})$, und zwar eine Surjektion (für T aus $\mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U})$ gilt $|T| = \kappa$, d. h. $\kappa \sim T$, so dass es eine Funktion f von κ in T gibt; f ist dann Funktion von κ in $\mathfrak{U}$ mit $\mathtt{Wb}(f) = T$, und liegt wegen $|\mathtt{Wb}(f)| = |T| = \kappa$ in V; also gilt $F(f) = T$). Wegen (5.91 S. 200) folgt also $V \succsim \mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U})$, d. h. $\mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U}) \precsim V$. Da V Teilklasse von $\mathfrak{U}^\kappa$ ist, folgt wegen (5.89) $V \precsim \mathfrak{U}^\kappa$, und wegen der schon bewiesenen ersten Behauptung $\mathfrak{U}^\kappa \precsim \mathfrak{U}$, zusammenfassend also $\mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U}) \precsim V \precsim \mathfrak{U}^\kappa \precsim \mathfrak{U}$, also gemäß (5.95) $\mathcal{P}_{=\kappa}(\mathfrak{U}) \precsim \mathfrak{U}$. So ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2. Für unerreichbares υ gilt $\mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon) \sim \upsilon$.

Beweis. Die Klasse $\mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon)$ der Teilmengen von $\mathbb{V}_\upsilon$ mit weniger als υ Elementen ist die Vereinigung aller Klassen $\mathcal{P}_{=\xi}(\mathbb{V}_\upsilon)$ für Kardinalzahlen ξ, die kleiner als (d. h. Element von) υ sind, d. h. es gilt $\mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon) = \bigcup_{\xi\in\mathtt{Cn}\cap\upsilon} \mathcal{P}_{=\xi}(\mathbb{V}_\upsilon)$. Da jedes ξ aus $\mathtt{Cn}\cap\upsilon$ eine in $\mathbb{V}_\upsilon$ liegende Kardinalzahl ist (denn aus $\xi \in \upsilon$, d. h. $\xi < \upsilon$, folgt wegen 5.207 S. 308 $\xi \in \mathbb{V}_\upsilon$), gilt wegen Lemma 1 $\mathcal{P}_{=\xi}(\mathbb{V}_\upsilon) \precsim \mathbb{V}_\upsilon$. In dieser Aussage ersetzen wir $\mathbb{V}_\upsilon$ gemäß Theorem 5.15.4 S. 201 durch das gleichmächtige υ (es gilt ja nach Theorem 5.31.3 S. 327, dass $|\mathbb{V}_\upsilon| = \upsilon$, also nach Definition der Mächtigkeit $\upsilon \sim \mathbb{V}_\upsilon$) und erhalten $\mathcal{P}_{=\xi}(\mathbb{V}_\upsilon) \precsim \upsilon$. Da $\mathtt{Cn}\cap\upsilon$ eine Teilklasse von υ ist, gilt außerdem gemäß (5.89) $\mathtt{Cn}\cap\upsilon \precsim \upsilon$. Insgesamt folgt mit Theorem 5.20.15, dass $\bigcup_{\xi\in\mathtt{Cn}\cap\upsilon} \mathcal{P}_{=\xi}(\mathbb{V}_\upsilon) \precsim \upsilon$, d. h. $\mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon) \precsim \upsilon$. Andererseits ist $\upsilon \precsim \mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon)$. Dies folgt aus (5.90 S. 200), da die Funktion, die jedes x aus υ auf das einelementige $\{x\}$ wirft, eine (trivialerweise injektive) Funktion von υ in $\mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon)$ ist (jedes x aus υ ist eine Ordinalzahl mit $x < \upsilon$, liegt also gemäß (5.207) in $\mathbb{V}_\upsilon$, so dass das 1-elementige $\{x\}$ wegen $|\{x\}| = 1 < \upsilon$ in $\mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon)$ liegt).
Insgesamt folgt also mit Theorem 5.15.5 S. 201, dass $\mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon) \sim \upsilon$. So ist Lemma 2 bewiesen.

Lemma 3. Für Mengen A und B mit $A \sim B$ und Kardinalzahlen κ gilt $\mathcal{P}_{<\kappa}(A) \sim \mathcal{P}_{<\kappa}(B)$.

Beweis. Wegen $A \sim B$ gibt es eine Bijektion f von A in B. Sei F die Funktion, die jedes T aus $\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$ auf $F(T) := \mathtt{Wb}(f/T)$ wirft. $F(T)$ ist als Wertebereich einer Einschränkung von f eine Teilklasse von B, und da B eine Menge ist, ist $F(T)$ per Teilmengenaxiom eine Teilmenge von B. Da T in $\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$ liegt, ist außerdem $|T| < \kappa$, also gilt wegen (5.249 S. 318) $|F(T)| = |\mathtt{Wb}(f/T)| \leq |\mathtt{Db}(f/T)| = |T| < \kappa$, somit $|F(T)| < \kappa$, und also liegt $F(T)$ in $\mathcal{P}_{<\kappa}(B)$. Folglich ist F eine Funktion von $\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$ in $\mathcal{P}_{<\kappa}(B)$.
Die Funktion F ist injektiv: Sind verschiedene Mengen aus $\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$ gegeben, gibt es in der einen (sie heiße S) ein Element x, das nicht in der anderen (sie heiße T) liegt. Dann liegt $f(x)$ in $F(S)$, aber nicht in $F(T)$ (sonst gäbe es ein y aus T – das von x verschieden sein muss, da x nicht in T liegt – so dass $f(y) = f(x)$, im Widerspruch zur Injektivität von f). Also ist $F(S) \neq F(T)$.
F ist auch surjektiv. Ist nämlich S aus $\mathcal{P}_{<\kappa}(B)$, so sei T die Teilklasse $\mathtt{Wb}(f^{\rightharpoonup}/S)$ von A. T ist per Ersetzungsaxiom eine Menge. Wegen (5.249 S. 318) gilt $|T| = |\mathtt{Wb}(f^{\rightharpoonup}/S)| \leq |\mathtt{Db}(f^{\rightharpoonup}/S)| = |S| < \kappa$, also liegt T in $\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$, und es ist $F(T) = S$. Insgesamt ist F somit eine Bijektion von $\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$ in $\mathcal{P}_{<\kappa}(B)$, also gilt $\mathcal{P}_{<\kappa}(A) \sim \mathcal{P}_{<\kappa}(B)$ und das Lemma ist bewiesen.

Lemma 4. Ist υ unerreichbar, so gilt für jedes X mit $X \sim \upsilon$, dass $\mathcal{P}_{<\upsilon}(X) \sim \upsilon$.

Beweis. Wegen $\upsilon \sim \mathbb{V}_\upsilon$ (siehe Theorem 5.31.3 S. 327) gilt $X \sim \mathbb{V}_\upsilon$, und mit Lemma 2 und Lemma 3 ergibt sich $\mathcal{P}_{<\upsilon}(X) \sim \mathcal{P}_{<\upsilon}(\mathbb{V}_\upsilon) \sim \upsilon$, womit Lemma 4 bewiesen ist.

Wegen $\mathbb{D} \sim \mathbb{U}$ (Axiom für Urelemente) können wir eine Bijektion f von $\mathbb{D}$ in $\mathbb{U}$ wählen; ihre Einschränkung f_υ auf $\mathbb{V}_\upsilon$ ist dann eine Bijektion von $\mathbb{V}_\upsilon$ in die Teilklasse $U_\upsilon := \mathtt{Wb}(f_\upsilon)$ von $\mathbb{U}$. So ist U_υ eine Klasse von Urelementen mit $U_\upsilon \sim \mathbb{V}_\upsilon$ (also wegen Theorem 5.31.3 mit $U_\upsilon \sim \upsilon$). Nun **definieren** wir durch Sukzessor-Limes-Rekursion (Theorem 5.14.12 S. 194) für alle Ordinalzahlen α eine Menge G_α:

$$G_0 := U_\upsilon \cup \mathbb{V}_\upsilon, \quad G_{\alpha+1} := \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha) \cup U \text{ für Ordinalzahlen } \alpha, \quad G_\lambda := \bigcup_{\xi\in\lambda} G_\xi \text{ für Limeszahlen } \lambda.$$

Hierauf aufbauend **definieren** wir: $\mathbb{G}_\upsilon :\equiv G_\upsilon$. Da υ eine Limeszahl ist, folgt $\mathbb{G}_\upsilon = \bigcup_{\xi\in\upsilon} G_\xi$. Dieses $\mathbb{G}_\upsilon$, für das wir auch kurz $\mathbb{G}$ schreiben, hat die verlangten Eigenschaften. Zum Beweis werden noch die folgenden Lemmata benötigt.

Lemma 5. Jedes G_α (und somit auch $\mathbb{G}$) ist eine Menge, und die darin enthaltenen Urelemente sind genau die Elemente von U_υ, d. h. es gilt $\mathbb{U} \cap G_\alpha = U_\upsilon$.

Beweis. Dies wird durch Sukzessor-Limes-Induktion bewiesen.
Induktionsanfang. Nach Theorem 5.12.10 S. 167 ist das zu $\mathbb{V}_\upsilon$ gleichmächtige U_υ eine Menge, also ist nach Theorem (5.10.20 S. 125) auch $G_0 = \mathbb{V}_\upsilon \cup U_\upsilon$ eine Menge, und da $\mathbb{V}_\upsilon$ nur Mengen enthält, gilt $G_0 \cap \mathbb{U} = U_\upsilon$.
Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: G_α ist eine Menge. Dann gilt dies nach dem Potenzmengenaxiom auch für $\mathcal{P}(G_\alpha)$, nach dem Teilmengenaxiom auch für die Teilklasse $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha)$ von $\mathcal{P}(G_\alpha)$, und nach (5.10.20) für $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha) \cup U_\upsilon$, d. h. für $G_{\alpha+1}$. Da $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha)$ nur Mengen enthält, gilt außerdem $G_{\alpha+1} \cap \mathbb{U} = U_\upsilon$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Für eine Limeszahl λ ist jedes G_ξ für $\xi \in \lambda$ eine Menge mit $\mathbb{U} \cap G_\xi = U_\upsilon$. Dann ist nach dem Vereinigungsmengenaxiom auch G_λ, d. h. $\bigcup_{\xi\in\lambda} G_\xi$, eine Menge und enthält als Urelemente ebenfalls nur diejenigen von U_υ, d. h. $G_\lambda \cap \mathbb{U} = U_\upsilon$.

Lemma 6. Für y aus $\mathbb{V}_\upsilon$ ist $|y| < \upsilon$.

Beweis. Wegen $\mathbb{V}_\upsilon = \bigcup_{\xi\in\upsilon} \mathbb{V}_\xi$ gilt $y \in \mathbb{V}_\xi$ für ein $\xi \in \upsilon$ (d. h. $\xi < \upsilon$), per $\in$-Transitivität von $\mathbb{V}_\xi$ folgt also $y \subseteq \mathbb{V}_\xi$ (aus $x \in y \in \mathbb{V}_\xi$ folgt $x \in \mathbb{V}_\xi$) und daher (wegen (5.89 S. 200) und 5.20.19 S. 262) $y \precsim \mathbb{V}_\xi \prec \mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi) = \mathbb{V}_{\xi+1}$; da außerdem $\mathbb{V}_{\xi+1} \precsim \mathbb{V}_\upsilon$ gilt (da $\xi < \upsilon$, ist $\xi + 1 \leq \upsilon$, also nach 5.197 S. 305 $\mathbb{V}_{\xi+1} \subseteq \mathbb{V}_\upsilon$, also nach 5.89 $\mathbb{V}_{\xi+1} \precsim \mathbb{V}_\upsilon$), folgt nach (5.97 S. 201) $y \prec \mathbb{V}_\upsilon$, worin wir $\mathbb{V}_\upsilon$ nach Theorem 5.15.4 durch das gleichmächtige υ (siehe 5.31.3) ersetzen: So gilt $y \prec \upsilon$, d. h. nach (5.247 S. 318) $|y| < |\upsilon|$ und nach (5.245 S. 318) $|y| < \upsilon$.

Lemma 7. Für jede Menge M aus $\mathbb{G}$ gilt $|M| < \upsilon$.

Beweis. Durch Sukzessor-Limes-Induktion über α zeigen wir, dass $|M| < \upsilon$ für alle M aus G_α gilt:
Induktionsanfang. Liegt eine Menge M in G_0, so liegt M in $\mathbb{V}_\upsilon$, also folgt die Behauptung aus Lemma 6.
Sukzessor-Schritt. Sei M eine Menge aus $G_{\alpha+1}$. Dann liegt M in $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha)$, d. h. M ist eine Teilmenge von G_α mit $|M| < \upsilon$.
Limes-Schritt. Voraussetzung: Sei für jedes ξ aus einer Limeszahl λ wahr, dass die Mächtigkeit jeder Menge aus G_ξ kleiner als υ ist. Ist nun M eine in G_λ liegende Menge, so liegt M aber in einem G_ξ mit ξ aus λ. Also ist $|M| < \upsilon$.

Lemma 8. Gilt $\alpha < \beta$, so ist $G_\alpha \subseteq G_\beta$.

Beweis. Angenommen das ist falsch.
Dann gibt es ein α, für welches die Menge $M := \{\beta \,|\, \alpha < \beta \text{ und } G_\alpha \subseteq G_\beta \text{ ist falsch}\}$ nichtleer ist, also ein Minimum β_0 hat. Wegen $\beta_0 \in M$ gilt, dass $\alpha < \beta_0$ und dass dennoch $G_\alpha \subseteq G_{\beta_0}$ falsch ist.
Dieses β_0 ist aber $\neq 0$ (sonst wäre $0 \leq \alpha < \beta_0 = 0$, also $0 < 0$)
Es istβ_0 auch keine Limeszahl: Andernfalls ist $G_{\beta_0} = \bigcup_{\xi\in\beta_0} G_\xi$, und weil α zu den Ordinalzahlen ξ mit $\xi < \beta_0$ (d. h. mit $\xi \in \beta_0$) gehört, liegen die Elemente von G_α in $\bigcup_{\xi\in\beta_0} G_\xi$, d. h. in G_{β_0}, so dass $G_\alpha \subseteq G_{\beta_0}$ im Widerspruch zu $\beta_0 \in M$.
Schließlich ist β_0 auch keine Sukzessorzahl. Andernfalls gibt es ein ξ mit $\beta_0 = \xi + 1$. Dann ist ξ kleiner als β_0 und liegt daher nicht in M. Da α ein Vorgänger von β_0 ist, während ξ der *unmittelbare Vorgänger* von β_0 ist, gilt $\alpha \leq \xi$, und es folgt $G_\alpha \subseteq G_\xi$ (wenn $\alpha = \xi$, ist das klar, und wenn $\alpha < \xi$ folgt dies daraus, dass ξ nicht in M liegt). Da außerdem $G_\xi \subseteq G_{\beta_0}$ gilt (ist $x \in G_\xi$, so ist im Fall $x \in U_\upsilon$ sofort $x \in U_\upsilon \cup \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\xi)$, d. h. $x \in G_{\xi+1}$, d. h. $x \in G_{\beta_0}$, und im Fall $x \notin U_\upsilon$ ist x eine in G_ξ und damit auch in $\mathbb{G}$ liegende Menge, so dass nach Lemma 7 $|x| < \upsilon$ folgt; außerdem ist x in diesem Fall als Element von G_ξ per $\in$-Transitivität von G_ξ eine Teilmenge von G_ξ, so dass x in $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\xi)$ und somit wieder in $G_{\xi+1}$ liegt, d. h. in G_{β_0}), folgt $G_\alpha \subseteq G_{\beta_0}$ im Widerspruch zu $\beta_0 \in M$. Da β_0 also weder die Null, noch eine Sukzessorzahl noch eine Limeszahl ist, kann β_0 nicht existieren. So ist die Annahme widerlegt und das Lemma bewiesen.

Analog zum Rang $\mathtt{rg}(x)$ eines x aus $\mathbb{V}$ definieren wir nun für x aus $\mathbb{G}$:

$\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(x)$ [Lesart: $\mathbb{G}$-Rang von x] := das kleinste α aus $\mathtt{On}$ so dass $x \in G_{\alpha+1}$.[48]

Lemma 9. Sei T eine Teilklasse von $\mathbb{G}$ mit $|T| < \upsilon$, für die es eine Ordinalzahl α mit $\alpha < \upsilon$ gibt, so dass $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t)$ für alle t aus T kleiner als α ist. Dann gilt $T \in \mathbb{G}$.

Beweis. Für jedes t aus T gilt wegen $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t) < \alpha$, dass $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t) + 1 \leq \alpha$, also gemäß Lemma 8, dass $G_{\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t)+1} \subseteq G_\alpha$, so dass jedes Element von $G_{\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t)+1}$ auch ein solches von G_α ist. Nun ist t nach Definition von $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t)$ ein Element von $G_{\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t)+1}$. Also gilt $t \in G_\alpha$.
Damit ist T eine Teilklasse der Menge G_α, also per Teilmengenaxiom eine Teilmenge von G_α, also ein Element von $\mathcal{P}(G_\alpha)$ ist. Da außerdem $|T| < \upsilon$ ist, folgt $T \in \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha)$, also $T \in G_{\alpha+1}$. Wegen $\alpha < \upsilon$ gilt $\alpha + 1 \leq \upsilon$, und da υ Limeszahl ist, ist $\alpha + 1 < \upsilon$, d. h. $\alpha + 1 \in \upsilon$. Somit liegt T in $\bigcup_{\xi\in\upsilon} G_\xi$, d. h. in G_υ, d. h. in $\mathbb{G}$. So ist das Lemma bewiesen.

Nun lassen sich für $\mathbb{G}$ die verlangten Eigenschaften nachweisen:

(a) Es zeigt sich, dass $|\mathbb{G}| = \upsilon$, d. h. $\mathbb{G} \sim \upsilon$. Denn durch Sukzessor-Limes-Induktion folgt, dass $\alpha > \upsilon$ oder $G_\alpha \sim \upsilon$ (also gilt insbesondere $G_\upsilon \sim \upsilon$, d. h. $\mathbb{G} \sim \upsilon$):
Induktionsanfang. Wegen $\mathbb{V}_\upsilon \sim \mathbb{V}_\upsilon$ und $U_\upsilon \sim \mathbb{V}_\upsilon$ gilt nach Theorem 5.20.9 S. 260 $\mathbb{V}_\upsilon \cup U_\upsilon \sim \mathbb{V}_\upsilon$, d. h. $G_0 \sim \mathbb{V}_\upsilon$, und da wegen Theorem 5.31.3 $\mathbb{V}_\upsilon \sim \upsilon$, gilt insgesamt $G_0 \sim \upsilon$.
Sukzessor-Schritt. Voraussetzung: $G_\alpha \sim \upsilon$ oder $\alpha > \upsilon$. Ist $\alpha > \upsilon$, so auch $\alpha + 1 > \upsilon$. Ist $G_\alpha \sim \upsilon$, so folgt wegen Lemma 4 $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha) \sim \upsilon$, und da auch $U_\upsilon \sim \mathbb{V}_\upsilon \sim \upsilon$ ist (nach Wahl von U_υ und Theorem 5.31.3),

[48] Dass es überhaupt ein α mit $x \in G_{\alpha+1}$ gibt, ist klar: Wegen $x \in \mathbb{G}$ gibt es ein α mit $x \in G_\alpha$, und wegen $\alpha < \alpha+1$ ist dann nach Lemma 8 $G_\alpha \subseteq G_{\alpha+1}$, also ist x auch Element von $G_{\alpha+1}$.

gilt nach Theorem 5.20.9 S. 260, dass $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha) \cup U_\upsilon \sim \upsilon$, d. h. $G_{\alpha+1} \sim \upsilon$.
LIMES-SCHRITT. VORAUSSETZUNG: Für jedes ξ aus λ gilt $\xi > \upsilon$ oder $G_\xi \sim \upsilon$.
FALL 1. Es gilt für ein Element ξ von λ (d. h. für ein ξ mit $\lambda > \xi$), dass $\xi > \upsilon$. Dann gilt erst recht $\lambda > \upsilon$.
FALL 2. Es gilt für alle ξ aus λ, dass $\xi \leq \upsilon$ und somit nach VORAUSSETZUNG $G_\xi \sim \upsilon$ und erst recht $G_\xi \precsim \upsilon$. Weil dann außerdem $\lambda \leq \upsilon$ ist (andernfalls wäre $\upsilon < \lambda$, also $\upsilon + 1 \leq \lambda$, und da λ Limeszahl ist, wäre sogar $\upsilon + 1 < \lambda$; also wäre $\upsilon + 1$ ein ξ aus λ, für das die Voraussetzung $\xi \leq \upsilon$ für den gerade behandelten Fall nicht zutrifft), gilt nach (5.79 S. 192) $\lambda \subseteq \upsilon$, also nach (5.89) $\lambda \precsim \upsilon$, und es folgt gemäß Theorem 5.20.15, dass $\bigcup_{\xi\in\lambda} G_\xi \precsim \upsilon$, d. h. $G_\lambda \precsim \upsilon$. Da auch $\upsilon \precsim G_\lambda$ gilt (denn wegen $0 \in \lambda$ gilt $G_0 \subseteq \bigcup_{\xi\in\lambda} G_\xi = G_\lambda$, also folgt gemäß 5.89 $G_0 \precsim G_\lambda$, und hierin können wir G_0 durch das gemäß Induktionsanfang gleichmächtige υ ersetzen), folgt mittels Theorem 5.15.5, dass $G_\lambda \sim \upsilon$.

(b) Es zeigt sich, dass $\mathbb{G}$ ein Modell ist, in dem alle Axiome einschließlich des Axioms für Urelemente gelten. Um zu zeigen, dass $\mathbb{G}$ ein Modell ist, in dem alle klassischen Axiome gelten, genügt es im Hinblick auf Metatheorem 5.31.6 S. 329 zu zeigen, dass $\mathbb{G}$ ein Universum ist, und um das Axiom für Urelemente nachzuweisen ist, ist wegen (5.221 S. 309), (5.5 S. 116), (5.237 S. 312) sowie Lemma 5 zu zeigen, dass $U_\upsilon \sim \mathbb{G}$ gilt. In der Tat gilt aber nach dem schon bewiesenen Teil (a) sowie nach Wahl von U_υ, dass $U_\upsilon \sim \upsilon \sim \mathbb{G}$, und so bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathbb{G}$ ein Universum ist:

$\mathbb{G}$ ist $\in$-transitiv. Hierzu zeigen wir durch Sukzessor-Limes-Induktion, dass G_α für jede Ordinalzahl $\in$-transitiv ist. INDUKTIONSANFANG. Sei $x \in y \in G_0$. Da y ein Element hat, ist y ein Element von $G_0 (= \mathbb{V}_\upsilon \cup U_\upsilon)$, das kein Urelement ist, also nicht in U_υ liegt; dann muss y in $\mathbb{V}_\upsilon$ liegen. Es gilt also $x \in y \in \mathbb{V}_\upsilon$, und mittels (5.195 S. 305) folgt $x \in \mathbb{V}_\upsilon$ und somit $x \in G_0$.
SUKZESSOR-SCHRITT. Sei G_α $\in$-transitiv, und $x \in y \in G_{\alpha+1}$, wobei $G_{\alpha+1} = \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha) \cup U_\upsilon$. Da y kein Urelement ist, gilt $y \in \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha)$, d. h. $y \subseteq G_\alpha$, also $x \in y \subseteq G_\alpha$ und somit $x \in G_\alpha$. Falls nun x ein Urelement ist, gilt nach Lemma 5, dass $x \in U_\upsilon$, also auch $x \in \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha) \cup U_\upsilon = G_{\alpha+1}$. Andernfalls ist x eine in G_α liegende Menge, also per $\in$-Transitivität von G_α eine Teilmenge von G_α (denn aus $u \in x \in G_\alpha$ folgt $u \in G_\alpha$), d. h. es gilt $x \in \mathcal{P}(G_\alpha)$; außerdem gilt wegen Lemma 7 und $x \in \mathbb{G}$ (was aus $x \in G_\alpha$ folgt), dass $|x| < \upsilon$, und somit $x \in \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\alpha)$, also $x \in G_{\alpha+1}$.
LIMES-SCHRITT. VORAUSSETZUNG. Für jedes ξ aus einer Limeszahl λ gelte, dass G_ξ $\in$-transitiv ist. Ist nun $x \in y \in G_\lambda$, so $x \in y \in G_\xi$ für ein ξ aus λ. Also folgt $x \in G_\xi$ per $\in$-Transitivität von ξ, und somit auch $x \in G_\lambda$.

$\mathbb{G}$ ist $\bigcup$-treu: Sei $\mathfrak{M}$ eine in $\mathbb{G}$ liegende Mengenmenge. Dann gilt nach Lemma 7, dass $|\mathfrak{M}| < \upsilon$ und für jedes M aus $\mathfrak{M}$ (das per $\in$-Transitivität von $\mathbb{G}$ ebenfalls in $\mathbb{G}$ liegt) $|M| < \upsilon$, also per Unerreichbarkeit von υ auch $|\bigcup \mathfrak{M}| < \upsilon$. Wegen $\mathfrak{M} \in \mathbb{G} = G_\upsilon = \bigcup_{\xi\in\upsilon} G_\xi$ folgt weiter, dass es ein ξ aus υ (d. h. ein ξ mit $\xi < \upsilon$) gibt, so dass $\mathfrak{M} \in G_\xi$. Per $\in$-Transitivität von G_ξ liegt auch jedes Element M von $\mathfrak{M}$ und schließlich auch jedes Element m eines Elements M von $\mathfrak{M}$ in G_ξ. Also ist $\bigcup \mathfrak{M}$ Teilklasse von G_ξ und (weil per Vereinigungsmengenaxiom $\bigcup \mathfrak{M}$ eine Menge ist) auch eine Teilmenge von G_ξ, die wegen $|\bigcup \mathfrak{M}| < \upsilon$ in $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\xi)$ liegt, also in $G_{\xi+1}$ und somit in $\bigcup_{\alpha\in\upsilon} G_\alpha$ (denn wegen $\xi < \upsilon$ ist $\xi+1 \leq \upsilon$, und da υ Limeszahl ist, ist auch $\xi+1 < \upsilon$, d. h. $\xi+1 \in \upsilon$), d. h. in $\mathbb{G}$.

$\mathbb{G}$ ist $\mathcal{P}$-treu. Sei nämlich M eine in $\mathbb{G}$ liegende Menge. Dann gilt nach Lemma 7, dass $|M| < \upsilon$, also per Unerreichbarkeit von υ auch $|\mathcal{P}(M)| < \upsilon$. Wegen $M \in \mathbb{G} = G_\upsilon = \bigcup_{\xi\in\upsilon} G_\xi$ folgt weiter, dass es ein ξ aus υ (d. h. ein ξ mit $\xi < \upsilon$) gibt, so dass $M \in G_\xi$. Ferner gilt wegen der $\in$-Transitivität von G_ξ, dass $M \subseteq G_\xi$ (aus $x \in M \in G_\xi$ folgt $x \in G_\xi$), und daraus folgt trivialerweise $\mathcal{P}(M) \subseteq \mathcal{P}(G_\xi)$. Dabei gilt für die Elemente von $\mathcal{P}(M)$, d. h. die Teilmengen T von M wegen (5.249 S. 318), dass $|T| \leq |M|$ und wegen $|M| < \upsilon$ schließlich $|T| < \upsilon$. Also liegen diese T nicht nur in $\mathcal{P}(G_\xi)$, sondern sogar in $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\xi)$. Daher gilt $\mathcal{P}(M) \subseteq \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\xi)$ und wegen $\mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\xi) \subseteq \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_\xi) \cup U_\upsilon = G_{\xi+1}$ auch $\mathcal{P}(M) \subseteq G_{\xi+1}$. Da nach dem Potenzmengenaxiom $\mathcal{P}(M)$ eine Menge ist und $|\mathcal{P}(M)| < \upsilon$ gilt, muss nun $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}_{<\upsilon}(G_{\xi+1})$ sein und daher $\mathcal{P}(M) \in G_{(\xi+1)+1}$, also liegt $\mathcal{P}(M)$ in $\bigcup_{\alpha\in\upsilon} G_\alpha$ (denn da υ Limeszahl ist, folgt aus $\xi < \upsilon$, dass auch $\xi + 1 < \upsilon$ und aus demselben Grund, dass $(\xi + 1) + 1 < \upsilon$, also $(\xi + 1) + 1$ ein Element von υ ist), also in $\mathbb{G}$.

Schließlich ist $\mathbb{G}$ auch funktionstreu. Ist nämlich f eine Funktion mit $\mathtt{Db}(f) \in \mathbb{G}$ und Werten in $\mathbb{G}$, so ist $\mathtt{Wb}(f)$ nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge. Sei g die Funktion mit Definitionsbereich $\mathtt{Wb}(f)$, die jedes x aus $\mathtt{Wb}(f)$ auf $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(x)$ wirft; dabei ist stets $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(x) < \upsilon$: Denn wegen $x \in \mathbb{G} = G_\upsilon = \bigcup_{\xi\in\upsilon} G_\xi$ gibt es ein ξ mit $\xi \in \upsilon$ (d. h. $\xi < \upsilon$), so dass $x \in G_\xi$ und folglich wegen Lemma 8 auch $x \in G_{\xi+1}$, also ist $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(x) \leq \xi < \upsilon$. Nach (5.249 S. 318) und Lemma 7 ist nun $|\mathtt{Wb}(g)| \leq |\mathtt{Db}(g)| = |\mathtt{Wb}(f)| \leq |\mathtt{Db}(f)| < \upsilon$ und für jedes Element $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(x)$ von $\mathtt{Wb}(g)$ gilt wegen $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(x) < \upsilon$, also (nach 5.250 S. 320) auch $|\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(x)| < \upsilon$, also folgt per Unerreichbarkeit von υ, dass $|\bigcup \mathtt{Wb}(g)| < \upsilon$ und sodann $|\mathcal{P}(\bigcup \mathtt{Wb}(g)| < \upsilon$. Außerdem ist nach (5.250) $\bigcup \mathtt{Wb}(g) < |\bigcup \mathtt{Wb}(g)|^+$, und ferner $|\bigcup \mathtt{Wb}(g)|^+ \leq |\mathcal{P}(\bigcup \mathtt{Wb}(g))|$ (denn nach Theorem 5.20.19 gilt $\bigcup \mathtt{Wb}(g) \prec \mathcal{P}(\bigcup \mathtt{Wb}(g))$, also ist nach 5.247 S. 318 $|\mathcal{P}(\bigcup \mathtt{Wb}(g))|$ eine der Kardinalzahlen, die *größer* als $|\bigcup \mathtt{Wb}(g)|$ sind, während $|\bigcup \mathtt{Wb}(g)|^+$ die *kleinste*

dieser Kardinalzahlen ist). Also ist $\alpha := |\mathcal{P}(\bigcup \mathtt{Wb}(g))|$ eine Ordinalzahl kleiner als υ mit $\bigcup \mathtt{Wb}(g) < \alpha$. Da für jedes t aus $\mathtt{Wb}(f)$ nun $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t)$ zu den Elementen von $\mathtt{Wb}(g)$ gehört, ist $\mathtt{rg}(t)$ kleinergleich dem Supremum $\bigcup \mathtt{Wb}(g)$ dieser Menge, also $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t) \leq \bigcup \mathtt{Wb}(g)$, und wegen $\bigcup \mathtt{Wb}(g) < \alpha$ also $\mathtt{rg}_{\mathbb{G}}(t) < \alpha$. Da wir außerdem $|\mathtt{Wb}(f)| \leq |\mathtt{Db}(f)| < \upsilon$ festgestellt haben, gilt nach Lemma 9, dass $\mathtt{Wb}(f) \in \mathbb{G}$. So ist also $\mathbb{G}$ ein Universum.

(c) Schließlich sind die «Ordinalzahlen» des Modells $\mathbb{G}$, d. h. nach (5.224 S. 309) die in $\mathbb{G}$ liegenden Ordinalzahlen, genau die Ordinalzahlen α mit $\alpha < \upsilon$. Denn die in G_0 liegenden Ordinalzahlen sind die in $\mathbb{V}_\upsilon$ liegenden, das sind nach (5.207 S. 308) die Ordinalzahlen $< \upsilon$, und da (wegen Lemma 8) $G_0 \subseteq G_\upsilon = \mathbb{G}$ ist, liegen diese auch in $\mathbb{G}$. Dort liegt aber keine Ordinalzahl α mit $\upsilon \leq \alpha$ (sonst folgt nach 5.79 S. 192 $\upsilon \subseteq \alpha$, also nach 5.89 S. 200 $\upsilon \precsim \alpha$, also nach 5.248 S. 318 $|\upsilon| \leq |\alpha|$, also nach 5.245 $\upsilon \leq |\alpha|$, und wegen Lemma 7 würde α nicht in $\mathbb{G}$ liegen). □

Theorem 5.31.17 S. 334

$\aleph_0 < \mathfrak{c} < \mathfrak{f} < \theta_0$, $\aleph_0 \prec \mathfrak{c} \prec \mathfrak{f} \prec \theta_0$ und $[\![\aleph_0]\!] <_{Fr} [\![\mathfrak{c}]\!] <_{Fr} [\![\mathfrak{f}]\!] <_{Fr} [\![\theta_0]\!]$.

Beweis. $\aleph_0 (= \omega) < \mathfrak{c} < \mathfrak{f}$ gilt nach Theorem 5.22.4. Nach Definition ist nun $\mathfrak{f} \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$, gemäß Satz (5.246) also $|\mathfrak{f}| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))|$, und wegen $|\omega| = \omega < \theta_0$ folgt mittels der Definition der Unerreichbarkeit, dass $|\mathcal{P}(\omega)| < \theta_0$, und daraus wieder per Unerreichbarkeit $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))| < \theta_0$, insgesamt also $\mathfrak{f} = |\mathfrak{f}| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))| < \theta_0$. So gilt $\aleph_0 < \mathfrak{c} < \mathfrak{f} < \theta_0$. Aus Satz (5.247) folgt dann auch $\aleph_0 \prec \mathfrak{c} \prec \mathfrak{f} \prec \theta_0$ und aus Satz (5.108) $[\![\aleph_0]\!] <_{Fr} [\![\mathfrak{c}]\!] <_{Fr} [\![\mathfrak{f}]\!] <_{Fr} [\![\theta_0]\!]$. □

Metatheorem 6.4.8 S. 381

Für jede Formel φ der Sprache mit den Funktoren $\top$, $\top$, $\underline{\perp}$, $-$, $\neg$, $\wedge$, $|$, $\vee$, $\dot{\vee}$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$, $\in$ und den Operatoren $\bigwedge, \bigvee, \dot{\bigvee}, \boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\kappa}$ (ohne $\boldsymbol{\varepsilon}$) gibt es eine Formel φ^*, die stets dasselbe Denotat wie φ hat, und in der außer Variablen höchstens noch die Konstanten $\underline{\perp}, \neg, \vee, =, \in, \bigwedge$ vorkommen.

Beweis. Zunächst können wir jeden Klassenterm $\boldsymbol{\kappa}\ v\ \alpha$ gleichwertig durch einen Term ersetzen, in dem $\boldsymbol{\kappa}$ nicht mehr vorkommt. Denn der Klassenterm $\boldsymbol{\kappa}\ v\ \alpha$ hat offensichtlich dieselbe Bedeutung wie «dasjenige C für das gilt: C ist Klasse und für alle Individuen v gilt: $v \in C$ genau dann, wenn α». Nehmen wir hier für C eine von v verschiedene Variable, die in α nicht vorkommt, und bedenken, dass «C ist Klasse» gleichwertig mit «C ist die leere Klasse oder es gibt ein Element von C» ist, was wir formal durch $(C = \perp) \vee \bigvee x(x \in C)$ wiedergeben können, so ist klar, dass

$$\boldsymbol{\kappa}\ v\ \alpha \text{ dasselbe Denotat hat wie } \boldsymbol{\imath}\ C\ \Big(((C = \perp)\ \vee \bigvee x(x \in C))\ \wedge\ \bigwedge_{v \in \underline{\perp}} (v \in C \leftrightarrow \alpha)\Big).$$

Ebenso gilt für eine $\dot{\bigvee}$-Formel $\dot{\bigvee}\ v\ \alpha$, wenn y eine von v verschiedene Variable ist, dass

$$\dot{\bigvee}\ v\ \alpha \text{ dasselbe Denotat wie } (\bigvee v\ \alpha) \wedge \neg \bigvee y(y \neq v \wedge \alpha(\tfrac{y}{v})) \text{ hat,}$$

und so können wir in jedem Ausdruck die Exemplare von $\boldsymbol{\kappa}\ v\ \alpha$ oder $\dot{\bigvee}\ x\ \alpha$ gleichwertig durch Exemplare von $\boldsymbol{\kappa}$- und $\dot{\bigvee}$-freien Ausdrücken ersetzen. Wir erhalten dann zu jedem Ausdruck α einen gleichwertigen, in dem $\boldsymbol{\kappa}$ und $\bigvee$ nicht mehr vorkommen. Von diesen $\boldsymbol{\kappa}$– und $\dot{\bigvee}$-freien Ausdrücken können wir als Nächstes zu gleichwertigen übergehen, in denen auch $\bigvee$ nicht mehr vorkommt, denn es hat ja $\bigvee v\ \alpha$ stets dasselbe Denotat wie $\neg \bigwedge v\ \neg\alpha$, und so bekommen wir insgesamt *zu jedem Ausdruck* (der Sprache ohne $\boldsymbol{\varepsilon}$) *einen gleichwertigen, in dem* $\bigwedge$ *und* $\boldsymbol{\imath}$ *die einzigen Operatoren sind.*

In diesen Ausdrücken hat nun stets $\alpha \leftrightarrow \beta$ dasselbe Denotat wie $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, ebenso $\alpha \dot{\vee} \beta$ dasselbe wie $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$ und $\alpha \mid \beta$ dasselbe wie $\neg\alpha \wedge \neg\beta$, so dass wir durch entsprechende Ersetzungen *gleichwertige Ausdrücke erhalten, in denen* $\leftrightarrow, \dot{\vee}$ *und* $\mid$ *nicht mehr vorkommen.* Von diesen aber können wir zu gleichwertigen übergehen, in denen auch $\wedge, \rightarrow, -, \top$ und $\perp$ nicht mehr vorkommen, denn es hat stets $\alpha \wedge \beta$ dasselbe Denotat wie $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$, $\alpha \rightarrow \beta$ dasselbe wie $(\neg\alpha) \vee \beta$, $-\alpha$ dasselbe wie $\neg\neg\alpha$, $\top$ dasselbe wie $\underline{\perp} = \underline{\perp}$, und

$\bot$ dasselbe wie $\neg(\underline{\bot} = \underline{\bot})$. Und so *bleiben von den Funktoren nur noch* $\underline{\bot}, \neg, \vee, =, \in$ *übrig.*[49]

Nach den bisherigen Überlegungen gibt es zu jedem Ausdruck α einen gleichwertigen, in dem außer Variablen und Konstanten höchstens noch $\underline{\bot}, \neg, \vee, =, \in, \bigwedge$ und $\imath$ vorkommen. Es bleibt zu zeigen, dass wir von diesen Ausdrücken zu gleichwertigen übergehen können, in denen $\imath$ *höchstens noch als Anfangszeichen vorkommt.* Das beendet den Beweis: Denn da Ausdrücke mit $\imath$ als Anfangszeichen stets Terme und keine Formeln sind, folgt daraus, dass *für jede Formel eine gleichwertige existiert, in kein* $\imath$ *mehr vorkommt.*

Ist nun c einer unserer beiden Termfunktoren $=$ oder $\in$, so ist $(\imath\ v\ \varphi)\ c\ \beta$ offenbar stets gleichwertig zu ≪falls es nicht genau ein v gibt für das φ gilt (so dass $\imath\ v\ \varphi$ den Joker bezeichnet), gilt $\underline{\bot}\ c\ \beta$, und falls es genau ein solches v gibt (so dass $\imath\ v\ \varphi$ dieses v bezeichnet), gibt es auch genau ein v, so dass φ und $v\ c\ \beta$ gilt≫.[50] So gilt generell:

$$(\imath\ v\ \varphi)\ c\ \beta \text{ ist gleichwertig mit } \Big(\neg(\dot{\bigvee}\ v\ \varphi) \to (\underline{\bot}\ c\ \varphi)\Big) \vee \Big((\dot{\bigvee}\ v\ \varphi) \to (\dot{\bigvee}\ v\ (\varphi \wedge\ (x\ c\ \beta))\Big),$$

und von letzterem Ausdruck können wir (wie schon erläutert) zu einem gleichwertigen übergehen, in dem $\dot{\bigvee}, \bigvee, \to$ und $\wedge$ nicht mehr vorkommen. Damit können wir jedes Exemplar eines $\imath$-Ausdrucks, der unmittelbar links von einem Exemplar von c (also $=$ oder $\in$) in einem Ausdruck steht, durch einen $\imath$-freien Ausdruck ersetzen, und auf ganz analoge Weise zeigt sich, dass dies auch für Exemplare von $\imath$-Ausdrücken gilt, die unmittelbar rechts von einem Exemplar von $=$ oder $\in$ stehen.

Schließlich haben wir noch folgende Ausdrücke zu betrachten: $Q\ x\ (\imath\ v\ \varphi)$ (worin Q ein Quantor und x eine Variable ist), und die Ausdrücke $f\ (\imath\ v\ \varphi)$ sowie $(\imath\ v\ \varphi)\ f\ \beta$ und $\beta\ f\ (\imath\ v\ \varphi)$ (wobei f ein Formelfunktor und β Ausdruck ist), und müssen in diesen Ausdrücken darin das angeführte $\imath$ tilgen. Das Denotat dieser Ausdrücke hängt nun allein davon ab, ob oder in welchen Fällen $\imath\ v\ \varphi$ „wahr“ ist, also 1 bezeichnet. Dies aber ist natürlich genau dann der Fall, wenn $(\imath\ v\ \varphi = \top)$ wahr ist, und so erhalten wir zu einem der obigen Ausdrücke immer dann einen gleichwertigen Ausdruck, wenn wir das darin angeführte Exemplar von $\imath\ v\ \varphi$ durch die Gleichung $\imath\ v\ \varphi = \top$ ersetzen. Eine solche Gleichung können wir dann, wie oben gezeigt, durch eine Formel ersetzen, in der $\imath$ nicht mehr vorkommt. Somit sind wir insgesamt in der Lage, Teilstücke eines jeden Ausdrucks so zu ersetzen, dass im resultierenden Ausdruck $\imath$ höchstens noch als Anfangszeichen vorkommt.

□

[49] Man könnte die Zahl der Funktoren nochmals reduzieren, indem man $\neg$ und $\vee$ durch $|$ ausdrückt: $\alpha \vee \beta$ (≪α oder β≫) hat ja dieselbe Bedeutung wie $(\neg\alpha)|(\neg\beta)$ (≪es gilt nicht zugleich $\neg\alpha$ und $\neg\beta$≫), und $\neg\alpha$ (≪nicht α≫) dieselbe wie $\alpha|\alpha$ (≪es gilt nicht zugleich α und α≫). So käme man mit den Funktoren $\underline{\bot}, |, =, \in$ aus.

[50] Leider gilt Analoges nicht für den ε-Operator. Wenn $(\varepsilon\ v\ \varphi)\ c\ \beta$ gilt, gilt zwar auch ≪φ gilt für kein v und $\underline{\bot}\ c\ \beta$, oder φ gilt für mindestens ein v und es gibt ein v mit φ und $v\ c\ \beta$≫. Aber die Umkehrung muss nicht zutreffen. Es kann ja φ und $v\ c\ \beta$ für *ein* Objekt v zutreffen, aber wenn es *mehrere* solche Objekte gibt, muss dieses eine Objekt nicht gerade mit „dem auserwählten“ dieser Objekte, also mit $\varepsilon\ x\ \varphi$ identisch sein.